EJERCICIOS PROPUESTOS EN LAS P.A.U. DE LA C. V.

BLOQUE 1: ÁLGEBRA.

JUN00 P4A: Por un helado, dos horchatas y cuatro batidos, nos cobraron en una heladería 1.700 pta un día. Otro día, por cuatro helados y cuatro horchatas nos cobraron 2.200 pta. Un tercer día tuvimos que pagar 1.300 pta por una horchata y cuatro batidos. Razona si hay o no motivos para pensar que alguno de los días nos presentaron una factura incorrecta.

Resolución:

Si asignamos los valores: $x =$ precio del helado, $y =$ precio de la horchata, $z =$ precio del batido, se tiene el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z = 1700 \\ 4x+4y = 2200 \\ y+4z = 1300 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+4z = 1700 \\ x+y = 550 \\ y+4z = 1300 \end{array}\right.$$

Si resolvemos el sistema por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1700 \\ 1 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 400 \\ 1 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -150 \\ 1 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \end{array}\right)$$

Donde los cambios realizados en cada paso son: $\left\{\begin{array}{l} (F_1 \to F_1 + (-1)F_3) \\ (F_1 \to F_1 + (-1)F_2) \end{array}\right.$

Con lo que la 1ª ecuación queda $0 = -150$, que es imposible. Luego el sistema es incompatible y no tiene solución. Así pues debe haber algún error en las facturas.

Resolución alternativa:

Si realizamos la discusión del sistema planteado (Teorema de Rouché-Frobënius), obtenemos:

rg(A): $|A| = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

rg(A^*): $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1700 \\ 1 & 0 & 550 \\ 1 & 4 & 1300 \end{vmatrix} = -600 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

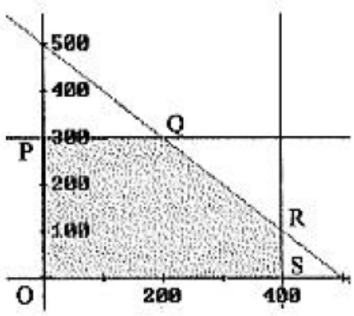
Luego como $rg(A) \neq rg(A^*)$, el sistema es incompatible y por ello ha de haber algún error en las facturas

JUN00 P2: Una factoría produce coches de los modelos A y B. El beneficio por la venta de un coche del modelo A es de 450 euros y la venta del modelo B reporta un beneficio de 600 euros. La capacidad de la factoría impide producir más de 400 coches por día del modelo A y más de 300 coches por día del modelo B. Además, no es posible producir más de 500 coches entre ambos modelos. Se vende toda la producción que se hace y se desea saber, razonadamente, cuántos coches interesa fabricar de cada modelo para obtener el máximo beneficio.

Resolución:

Sea: $\begin{cases} x : \text{nº de coches fabricados del modelo A} \\ y : \text{nº de coches fabricados del modelo B} \end{cases}$ Función objetivo: Maximizar $B(x,y) = 450x + 600y$

Restricciones: $\begin{cases} 0 \le x \le 400 \\ 0 \le y \le 300 \\ x + y \le 500 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$.



Método de los vértices:

Como sabemos, la solución óptima está en alguno de los vértices:

O = (0, 0), P = (0, 300), Q = (200, 300), R = (400, 100) y S = (400, 0)

Los beneficios para esos niveles de producción son:

En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(0, 300) = 180.000
En Q, B(200, 300) = 270.000 ← Máximo
En R, B(400, 100) = 240.000
En S, B(400, 0) = 180.000.

Método de las rectas de nivel:

Escogemos un punto del interior de la región factible: el (200,200).

Su imagen por la función objetivo es $B(200, 200) = 210\,000$ €

Ahora representamos la recta de nivel correspondiente: $450x + 600y = 210\,000$

(la recta de nivel representa todos los puntos para los cuales el valor mediante la función objetivo es de 210 000 €.)

Y dibujamos el vector gradiente: $\nabla f = (450, 600) \sim (90, 120)$

(el vector gradiente indica la dirección de crecimiento de la función objetivo, o hacia dónde cabría trasladar la recta de nivel para obtener valores más altos mediante la función objetivo)

Trasladando de forma paralela la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente, se observa que el último punto de contacto con la región factible es $Q = (200, 300)$. Así este punto es la solución buscada:

Interesa fabricar 200 unidades del modelo A y 300 del modelo B

$\boxed{\text{JUN01 P1A}}$: Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ y aplica los resultados obtenidos para resolver por la regla de Cramer el sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Resolución:

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+3 = 5\ ;\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\ ;\ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12$

Por Crammer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{5}\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{5}$$

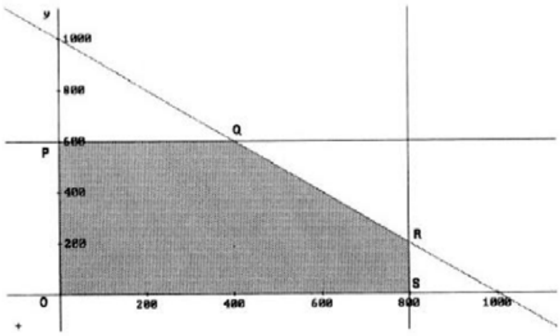
JUN01 P2:. Una fábrica produce bombillas normales a 900 pta cada una y focos halógenos a 1200 pta cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000, entre bombillas normales y focos halógenos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas normales ni más de 600 focos halógenos. Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Averiguar razonadamente cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener la máxima facturación posible y cuál sería ésta.

Resolución:

Sea: x : nº de bombillas
y : nº de focos halógenos

Función objetivo es maximizar $F(x,y) = 900x + 1200y$

Región factible: $\begin{cases} x+y \leq 1000 \\ x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$



Método de los vértices:

Obtenemos los vértices: $O = (0,0); P = (0,600); Q = (400,600); R = (800,200); S = (800,0)$

La facturación en cada caso es:

En O, F(0, 0) = 0 pta
En P, F(0, 600) = 720 000 pta
En Q, F(400, 600) = 1 080 000 pta ← ¡ Máximo !
En R, F(800, 200) = 960 000 pta
En S, F(800, 0) = 720 000 pta.

Para obtener una facturación máxima hay que producir 400 bombillas y 600 focos.

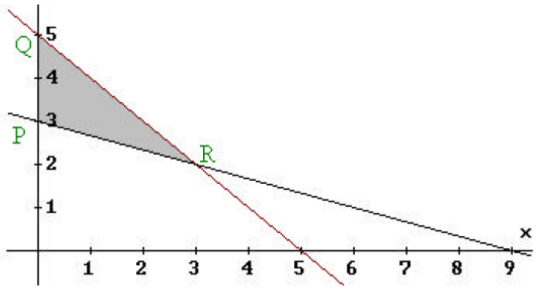
JUN02 P1:.Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x + y \leq 5$$
$$x + 3y \geq 9$$
$$x = 0, y = 0$$

Representar la región factible que determina el sistema de inecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región donde las siguientes funciones alcanzan su máximo y su mínimo: a) $f(x,y) = 2x+3y$ b) $f(x,y) = y-x$

Resolución:

La región factible es la sombreada en la siguiente figura:



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices del polígono de soluciones. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:.

$$P = (0,3);\ Q = (0,5);\ R : \begin{cases} x+y = 5 \\ x+3y = 9 \end{cases} \Rightarrow R = (3,2)$$

• Para la función a) $f(x,y) = 2x+3y$ se tiene:

$f(0, 3) = 9$; $f(0, 5) = 15$; $f(3, 2) = 12$. ⇒ El máximo se alcanza en el punto (0, 5); el mínimo, en (0, 3).

• Para la función b) $f(x,y) = y-x$ se tiene:

$f(0, 3) = 3$; $f(0, 5) = 5$; $f(3, 2) = -1$ ⇒ El máximo se alcanza en el punto (0, 5); el mínimo, en (3, 2).

JUN02 P2A: Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 2115 €. Calcular de forma razonada cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 €, cuántos han pagado el 20 % del billete y cuántos han pagado el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % es el doble del número de viajeros que ha pagado el billete entero.

Resolución:

Sea:

x : nº pasajeros que pagan billete completo
y : nº pasajeros que pagan el 20 %
z : nº pasajeros que pagan el 50 %

. Se tiene: $\begin{cases} x+y+z = 500 \\ 9x+9{\cdot}0,20y+9{\cdot}0,50z = 2115 \\ y = 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x+1,8y+4,50z = 2115 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Sistema que, (resuelto por Gauss o por Cramer) tiene por solución: $x = 150; y = 300; z = 50.$ Por tanto, 300 pasajeros han pagado el 20 % del billete y 50 han pagado el 50 %.

JUN02 P1B: Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes de tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los de tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 € por cada paquete que venda de tipo A y 5 € por cada uno que venda de tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar los beneficios y calcular este.

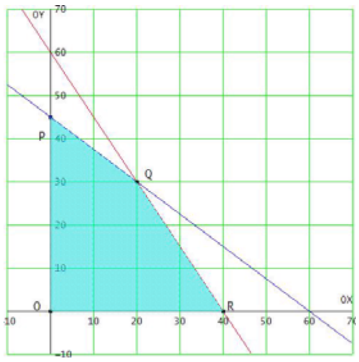
Resolución:

Sea :

x : nº paquetes tipo A
y : nº paquetes tipo B
$\Rightarrow$ Función objetivo: $f(x,y) = 6x + 5y$ (Maximizar)

Región Factible:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 120 & \text{(nº refrescos con cafeína)} \\ 3x + 4y \leq 180 & \text{(nº refrescos sin cafeína)} \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Método de los vértices:

Los vértices son: $O = (0,0)$; $P = (0,45)$; $Q : \begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{cases} \Rightarrow Q = (20,30)$; $R = (40,0)$

$f(0,0) = 0$; $f(0,45) = 5 \cdot 45 = 225$; $f(20,30) = 6 \cdot 20 + 5 \cdot 30 = \mathbf{270}$; $f(40,0) = 6 \cdot 40 = 240$

Por lo que el valor máximo se alcanza en el punto $Q = (20,30)$.

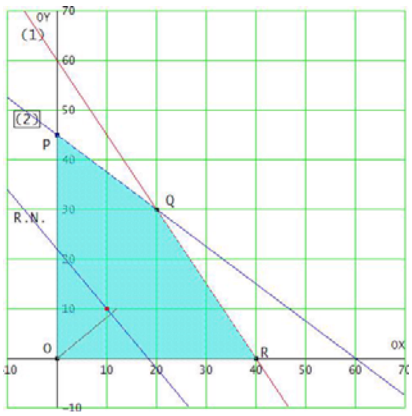
Así, para maximizar los beneficios, debemos vender 20 paquetes del tipo A y 30 del tipo B, en cuyo caso obtendremos un beneficio de 270 €

Método de las rectas de nivel:

Escogemos un punto del interior de la región factible: $(10,10)$. Su imagen por la función objetivo es: $f(10,10) = 6 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 60 + 50 = 110$.

Obtenemos la recta de nivel correspondiente:
$6x + 5y = 110$ y la dibujamos: $\rightarrow$

Dibujamos también el vector gradiente:
$\nabla f = (6,5) \sim (12,10)$ $\rightarrow$



Para maximizar la función objetivo hay que trasladar de forma paralela la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible ($Q = (20,30)$) es la solución buscada. $\Rightarrow$ 20 paquetes tipo A y 30 tipo B

SEP02 P1A:.Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivar más de 8 ha con olivos de tipo A, ni más de 10 ha con olivos del tipo B. Cada hectárea de olivos de tipo A necesita 4 m^3

de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 44 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 litros anuales de aceite:

a) Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.

b) Obtener la producción máxima.

Resolución:

Sea:

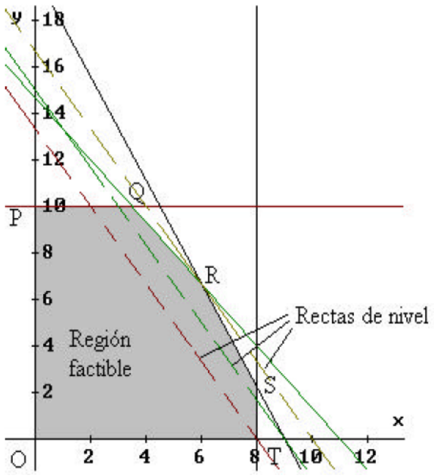
x : nº hectáreas de olivo A

y : nº hectáreas de olivo B

Función objetivo es maximizar: $f(x,y) = 500x + 300y$

Restricciones: $\begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 44 \text{ (restricción por agua)} \\ 500x + 225y \leq 4500 \text{ (restricción por inversión)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) dada en la siguiente figura.



Escogemos $(4,6)$ en la región factible. Sustituyendo en la función objetivo tenemos:

$f(4,6) = 500 \cdot 4 + 300 \cdot 6 = 3800$

Trazamos la recta de nivel y el vector gradiente:

R.N : $500x + 300y = 3800$.

$\nabla f = (500, 300) \sim (5,3)$

Trasladando la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente observamos que el último punto de contacto con la región factible es R.

Para calcular las coordenadas de R, resolvemos el sistema formado por las rectas que se cortan en R:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \Rightarrow R = (6, 6{'}\widehat{6})$$

Por lo que hay que cultivar 6 hectáreas de olivo A y 6,6666 del tipo B.

b) La producción máxima es $P(6, 6,\widehat{6}) = 500 \cdot 6 + 300 \cdot 6,\widehat{6} = 5000$ litros

SEP02 P1B: Una empresa fabrica dos tipos de aparatos A y B que necesitan pasar por los talleres X e Y. En cada uno de los talleres se trabaja 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas de taller X y 1 hora de taller Y y cada aparato B, 1 y 2 horas respectivamente. Cada aparato A se vende a 100 € y cada aparato B, a 150 €

a) Obtener razonadamente cuántos aparatos de cada tipo han de producirse para que el ingreso por venta sea máximo.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

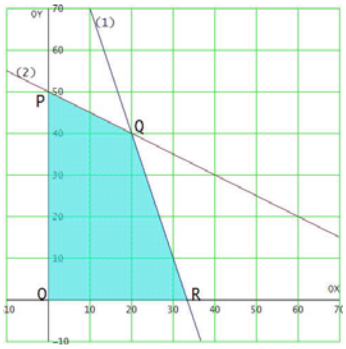
Resolución:

Sea:

$$\begin{cases} x : \text{nº aparatos tipo A} \\ y : \text{nº aparatos tipo B} \end{cases} \quad \text{Función objetivo: } f(x,y) = 100x + 150y$$

Región factible:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 100 \text{ (taller X)} \\ x + 2y \leq 100 \text{ (taller Y)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Método de los vértices:

Los vértices son: $O = (0,0)$; $P = (0,50)$; $Q : \begin{cases} 3x + y = 100 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow Q = (20,40)$; $R = (33\acute{}\widehat{3},0)$

$f(0,0) = 0$; $f(0,50) = 150 \cdot 50 = 7500$; $f(20,40) = 100 \cdot 20 + 150 \cdot 40 = \mathbf{8000}$; $f(33\acute{}\widehat{3},0) = 100 \cdot 33\acute{}\widehat{3} = 3333$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto $Q = (20,40)$. Así, se habrán de producir 20 aparatos de tipo A y 40 de tipo B.

b) El ingreso máximo será $f(20,40) = 8000$ €

SEP02 P2A: Obtener de forma razonada la matriz X que verifica $AX = 2B - C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Para despejar X en la ecuación matricial, premultiplicamos en ambos lados por A^{-1} :

$$AX = 2B - C \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2B - C) \Rightarrow X = A^{-1}(2B - C)$$

Entonces habremos de realizar el cálculo $A^{-1}(2B - C)$. Para ello calculemos primero A^{-1} :

$$|A| = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0\acute{}2 \\ 1 & 0\acute{}4 \end{pmatrix}$$

$$2B - C = 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -13 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora multiplicamos:

$$A^{-1}(2B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = X$$

Resolución alternativa:

Tomando $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

Operando:

$\begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 5a & 5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$. Igualando: $\begin{cases} 2a + c = 8 \\ 2b + d = -1 \\ 5a = 15 \\ 5b = 0 \end{cases}$

Con lo que obtenemos $a = 3; b = 0; c = 2; d = -1$:

La matriz pedida es: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{JUN03 P1A}}$: Dada la siguiente ecuación matricial:

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; obtener de forma razonada los valores de x, y, z.

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -2x + y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y + x \\ -2x + y + y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -10 \\ -2x + 2y = 6 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Sistema que podemos resolver por Gauss, Cramer, o aplicando reducción en las dos primeras ecuaciones para obtener (x,y) y después con el valor de y en la tercera ecuación se obtiene z. $\Rightarrow$ $x = -2;\ y = 1;\ z = 2$

$\boxed{\text{JUN03 P2}}$: Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y 30 minutos para el modelo B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo A y de 10 minutos para el modelo B. Se dispone para el trabajo manual de 6.000 minutos al mes y para el de máquina de 4.800 minutos al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 € para el modelo A y de 10 € para el modelo B, planificar la producción mensual para obtener el máximo beneficio y calcular éste.

Resolución:

Sea:

x : nº de lámparas del modelo A
y : nº de lámparas del modelo B

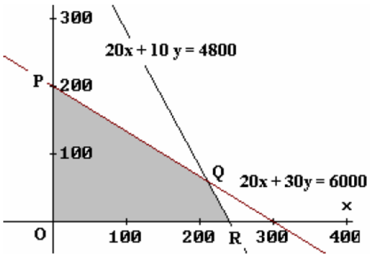
Función objetivo: $f(x,y) = 15x + 10y$ (Maximizar)

Ordenando la información se tiene:

	Cantidad	T. manual	T. de máquina	Beneficio
Modelo A	x	20	20	$15x$
Modelo B	y	30	10	$10y$
Disponible		6000	4800	

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 20x + 30y \leq 6000 \\ 20x + 10y \leq 4800 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$$O = (0,0);\ P = (0,200);\ Q : \begin{cases} 20x + 30y = 6000 \\ 20x + 10y = 4800 \end{cases} \Rightarrow Q = (210,60);\ R = (240,0)$$

El valor de $B(x,y) = 15x + 10y$ en esos vértices es:

En O, $B(0,0) = 0$
En P, $B(0,200) = 2000$
En Q, $B(210,60) = 3750$
En R, $B(240,0) = 36600$

El beneficio máximo, que es de 3750 €, se obtiene fabricando 210 lámparas del modelo A y 60 del modelo B.

JUN03 P2B: Debo tomar al menos 60 mg de vitamina A y al menos 90 mg de vitamina B diariamente. En la farmacia puedo adquirir dos pastillas de marcas diferentes X e Y. Cada pastilla de la marca X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de vitamina B, y cada pastilla de la marca Y contiene 10 mg de cada vitamina. Además, no es conveniente tomar más de 6 pastillas diarias. Sabiendo que el precio de cada pastilla de la marca X es 50 céntimos de euro y cada pastilla de la marca Y cuesta 30 céntimos de euro, calcular de forma razonada:

a) Cuántas pastillas diarias de cada marca debo tomar para que el coste sea mínimo.
b) Cuál es el coste mínimo.

Resolución:

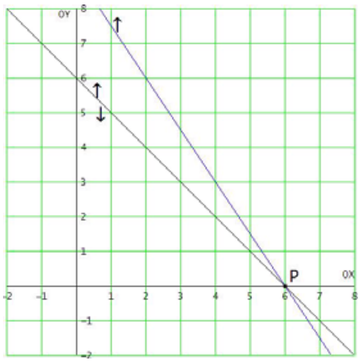
Sea:

x : nº de pastillas diarias de la marca X
y : nº de pastillas diarias de la marca Y

Función objetivo: $f(x,y) = 50x + 30y$ (Minimizar)

Conjunto de restricciones y región factible:

$$\begin{cases} 10x + 10y \geq 60 \text{ (necesidades de vitamina A)} \\ 15x + 10y \geq 90 \text{ (necesidades de vitamina B)} \\ x + y \leq 6 \text{ (no más de 6 pastillas diarias)} \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Observa que la región factible está formada por un único punto: $P = (6, 0)$

Lo cual significa que es la única posibilidad de cumplir las restricciones. Así pues, la única solución posible es 6 pastillas de la marca X y ninguna de la marca Y. En cualquier otro caso, o no se cubren las necesidades de vitaminas o se toman más de 6 pastillas diarias.

b) $f(6, 0) = 50 \cdot 6 = 300.$ Luego el coste mínimo es de 300 céntimos = 3 €.

JUN03 P3B: Cinco amigos suelen tomar café juntos. El primer día tomaron 2 cafés, 2 cortados y un café con leche y debieron pagar 3 €. Al día siguiente tomaron un café, un cortado y tres cafés con leche, por lo que pagaron 3,25 €. El tercer día sólo acudieron cuatro de ellos y tomaron un café, dos cortados y un café con leche, ascendiendo la cuenta a 2,45 €. Calcular de forma razonada el precio del café, del cortado y del café con leche.

Resolución:

Llamaremos:

x : precio del café.
y : precio del cortado.
z : precio del café.con leche.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x + y + 3z = 3.25 \\ x + 2y + z = 2.45 \end{cases}$$

Sistema que se puede resolver por Gauss o por Cramer y tiene por solución $x = 0.55; y = 0.6; z = 0.7.$ Así pues, el café solo vale 55 céntimos, el cortado 60 c y el café con leche 70 c.

SEP03 P2: Una empresa dispone de un máximo de 16 000 unidades de un producto que puede vender en unidades sueltas o en lotes de cuatro unidades. Para empaquetar un lote de cuatro unidades se necesita el triple de material que para empaquetar una unidad suelta. Si se dispone de material para empaquetar 15 000 unidades sueltas, y si el beneficio que se obtiene por la venta de cada unidad suelta es de 2 € y de cada lote de cuatro unidades es de 7 €, calcular de forma razonada el número de unidades sueltas y de lotes de cuatro unidades que hay que preparar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Resolución:

Ordenando la información se tiene:

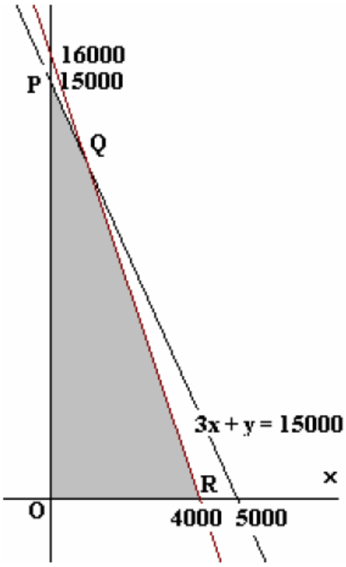
	Cantidad	Unidades	Material	Beneficio
Lotes de 4	x	4x	3x	7x
U. sueltas	y	y	y	2y
Disponible		16000	15000	

Función Objetivo: $B(x,y) = 7x + 2y$

Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + y \leq 16000 \\ 3x + y \leq 15000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Región Factible:



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$$O = (0,0); P = (0,15000); Q : \begin{cases} 4x + y = 16000 \\ 3x + y = 15000 \end{cases} \rightarrow Q = (1000,12000);\ R = (4000,0)$$

El valor de $B(x,y) = 7x + 2y$ en esos vértices es:

En O, $B(0,0) = 0$

En P, $B(0,15000) = 30000$

En Q, $B(1000,12000) = 31000 \quad \Leftarrow \textit{Máximo}$

En R, $B(4000,0) = 28000$

El beneficio máximo se obtiene vendiendo 1000 lotes y 12000 unidades sueltas; ese beneficio será de 31000 €.

SEP03 P2: Se pretende invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B ha de ser al menos de 3000 € y no se quiere invertir en A más del doble que en B. Se supone que A proporcionará un beneficio del 10 % y B del 5 %. Si se dispone de 12.000 €, calcular de forma razonada cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio y determinar éste.

Resolución:

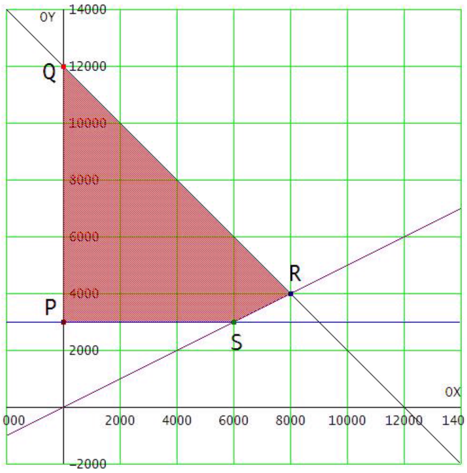
Sea: $\begin{cases} x : \text{€ invertidos en A} \\ y : \text{€ invertidos en B} \end{cases}$.

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} y \geq 3000 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 12000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

Función objetivo: $f(x,y) = 0.1x + 0.05y$

REGIÓN FACTIBLE

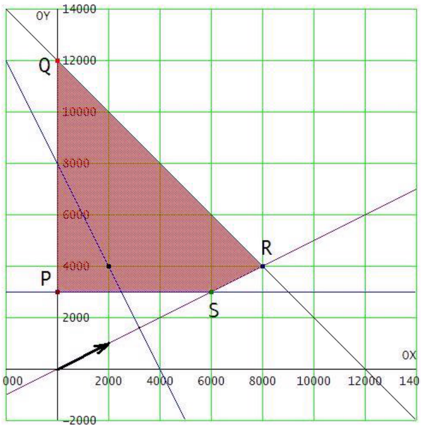


Método de la recta de nivel:

Escogemos un pto de la región factible: el $(2000, 4000)$.
Su imagen por la función objetivo es
$f(2000,4000) = 0.1 \cdot 2000 + 0.05 \cdot 4000 = 400.$
Dibujamos la recta de nivel que pasa por (2000,4000), que simboliza el conjunto de puntos cuya imagen por la función objetivo también vale 400:

R.Nivel : $\mathbf{0.1x + 0.05y = 400} \quad \Rightarrow$

También dibujamos el vector gradiente, que simboliza la dirección y sentido de crecimiento de la función objetivo:
$\nabla f = (0.1, 0.05) \sim (1000, 500) \sim (2000, 1000) \quad \Rightarrow$



Como hay que **maximizar**, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en el sentido que indica el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible es

$$R: \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12000 \end{cases} \Rightarrow R = (8000, 4000).$$

Por tanto, para maximizar beneficios se debe invertir 8000 € en el producto financiero A y 4000 en el producto financiero B. En este caso los beneficios serán de $f(8000,4000) = 0.1 \cdot 8000 + 0.05 \cdot 4000 = 1000$

JUN04 P1A:. Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AXB = 2C$.

Resolución:

Para despejar X en la anterior ecuación matricial, premultiplicamos por A^{-1} y postmultiplicamos por B^{-1} :

$$AXB = 2C \Rightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}2C \Rightarrow XB = A^{-1}2C \Rightarrow XBB^{-1} = A^{-1}2CB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}2CB$$

Así pues, el cálculo que hay que realizar es $A^{-1}2CB^{-1}$. Calcularemos primero $A^{-1}, 2C$ y B^{-1} :

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix} \quad 2C = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}2CB^{-1} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 2.0 & 0.5 \end{pmatrix} = X$$

Resolución alternativa:

Si $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, operando se obtiene: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4x & -4y \\ x+z & y+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4x-8y & -8x \\ -x-z+2y+2t & 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes:

$$\begin{cases} 4x - 8y = 4 \\ -8x = 0 \\ -x - z + 2y + 2t = -2 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 0;\ y = \frac{-1}{2};\ z = 2;\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

JUN04 P2A: Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos del 14 % y 7 %, respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo en la razón de 4 a 5. Determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los dos tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

Resolución:

Llamamos **x** a la cantidad prestada a alto riesgo e **y** a la prestada a medio riesgo, (ambas en millones de euros). El objetivo es maximizar el beneficio, $B(x,y) = 0,14x + 0,07y$

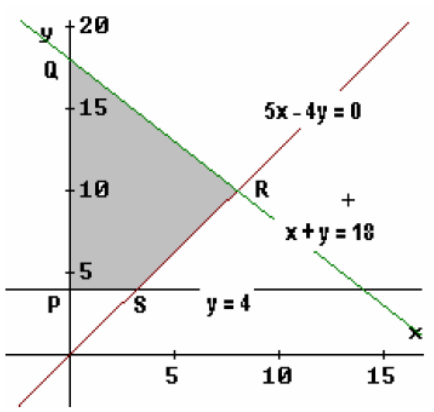
Y las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 18 \ \text{(18 millones es el tope disponible)} \\ y \geq 4 \ \text{(al menos 4 millones a medio riesgo)} \\ 5x - 4y \leq 0 \ \text{(ver observación)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Observación: x e y deben estar a lo sumo en la razón de 4 a 5 significa:

La razón de 4 a 5 es $\frac{4}{5}$. Si x e y deben estar a lo sumo en esa razón, quiere decir que la razón $\frac{x}{y} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow 5x \leq 4y \Rightarrow 5x - 4y \leq 0$

Estas restricciones determinan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:
$P = (0,4); Q = (0,18);$

$R : \begin{cases} x+y = 18 \\ 5x-4y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = (8,10); S : \begin{cases} y = 4 \\ 5x-4y = 0 \end{cases} \Rightarrow S = (16/5,4)$

El valor de $B(x,y) = 0,14x + 0,07y$ en esos vértices es:

En P, $B(0,4) = 0,28$ millones de euros.

En Q, $B(0,18) = 1,26$ millones de euros.

En R, $B(8,10) = 1,82$ millones de euros.

En S, $B(16/5,4) = 0,728$ millones de euros.

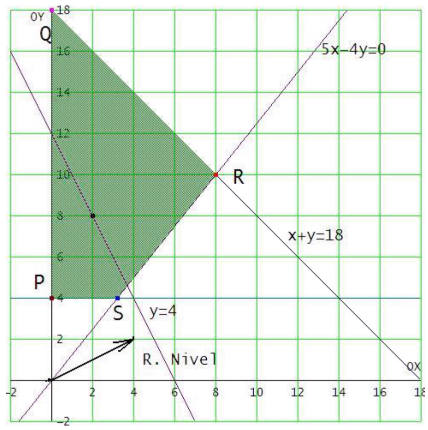
El beneficio máximo, que es de 1,82 millones de euros, se obtiene prestando 8 millones a alto riesgo y 10 millones a medio riesgo.

Método de la recta de nivel:

Escogemos un punto de la región factible: el $(2,8)$.
Su imagen por la función objetivo es
$f(2,8) = 0.14 \cdot 2 + 0.07 \cdot 8 = 0.84$
Dibujamos la recta de nivel que pasa por (2,8), que simboliza el conjunto de puntos cuya imagen por la función objetivo también vale 0.84:

$R.Nivel : \mathbf{0.14x + 0.07y = 0.84} \quad \Rightarrow\Rightarrow$

También dibujamos el vector gradiente, que simboliza la dirección y sentido de crecimiento de la función objetivo:
$\nabla f = (0.14, 0.07) \sim (14,7) \sim (2,1) \sim (4,2) \quad \Rightarrow$



Como hay que **maximizar**, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en el sentido que indica el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible es $R : \begin{cases} x+y = 18 \\ 5x-4y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = (8,10).$

Por tanto, para maximizar beneficios se debe prestar 8 millones a alto riesgo y 10 millones a medio riesgo. En este caso el beneficio será de $f(8,10) = 0.14 \cdot 8 + 0.07 \cdot 10 = 1.82$ millones de euros.

JUN04 P1B: Juan decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Resolución:

Sea: $\begin{cases} x : \text{dinero invertido en acciones de A} \\ y : \text{dinero invertido en acciones de B} \\ z : \text{dinero invertido en acciones de C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 12000 \\ x = 2(y+z) \\ 0.04x+0.05y-0.02z = 432.5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 12000 \\ x-2y-2z = 0 \\ 0.04x+0.05y-0.02z = 432.5 \end{cases} \Rightarrow x = 8000;\ y = 2750;\ z = 1250$$

Invirtió 8000 € en la empresa A, 2750 € en la empresa B y 1250 € en la empresa C

JUN04 P2B: Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por vagón de coches y 360 € por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

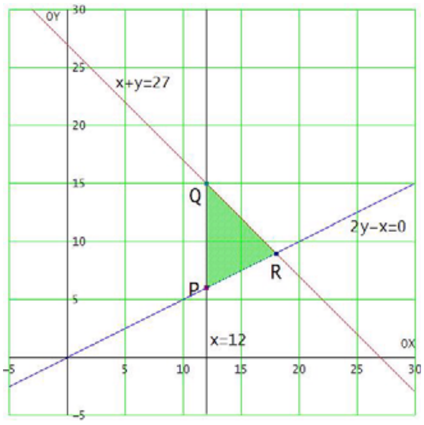
Resolución:

Definimos: **x**: nº vagones destinados a coches. **y** : nº de vagones destinados a motos.

Función objetivo: $f(x,y) = 540x+360y$.

Restricciones: Región Factible:

$$\begin{cases} x+y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \frac{x}{2} \rightarrow 2y-x \geq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



Método de la recta de nivel:

Escogemos el pto (14,9) del interior de la región factible.

Su imagen por la función objetivo es:

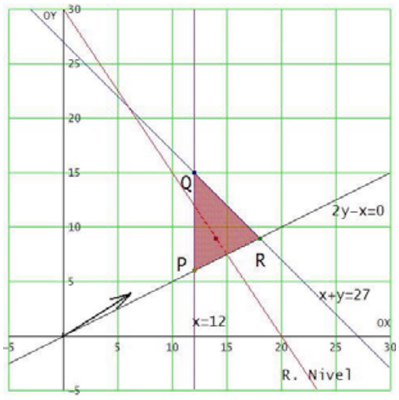
$f(14,9) = 540 \cdot 14+360 \cdot 9 = 10800$

Trazamos la recta de nivel que pasa por él:

$$\mathbf{540x+360y = 10800} \quad \Rightarrow$$

Dibujamos un vector proporcional al vector gradiente:

$$\nabla f = (540,360) \sim (6,4) \quad \Rightarrow$$



Como se trata de maximizar la función objetivo, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente hasta encontrar el último punto de contacto con la región factible, (R), que será la solución.

$$R : \begin{cases} 2y - x = 0 \\ x + y = 27 \end{cases} \Rightarrow R = (18, 9).$$

Se obtendrán beneficios máximos cuando se dispongan 18 vagones destinados a coches y 9 destinados a motos, en cuyo caso el beneficio será de $f(18,9) = 540 \cdot 18 + 360 \cdot 9 = 12960$ €.

SEP04 P1A: Obtener la matriz X que verifica $AX - B = 3X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Despejamos la matriz X en la ecuación:

$$AX - B = 3X \Rightarrow AX - 3X = B \Rightarrow (A - 3I)X = B \Rightarrow (A - 3I)^{-1}(A - 3I)X = (A - 3I)^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = (A - 3I)^{-1}B$$

Observa cómo se saca factor común de X en el segundo paso ($\mathbf{AX} - \mathbf{3X} = (\mathbf{A} - \mathbf{3I})\mathbf{X}$). El 2º término querará $3I$ y no sólamente 3, en cuyo caso no se podría hacer el cálculo $(A - 3)$, pues no se puede restar una matriz y un número.

Calcularemos $A - 3I$, después obtendremos su inversa y lo que nos de lo premultiplicaremos por B :

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - 3I| = -5 \Rightarrow (A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -9 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -9 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 28 \end{pmatrix}$$

SEP04 P1B:. Dos hijos deciden hacer un regalo de 100 € a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2 € que paga el hermano menor, el mayor paga 3 €. ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

Resolución:

Sean x, y, z las cantidades que aportan el padre, el hermano mayor y el hermano menor, respectivamente. Se debe cumplir:

$x+y+z = 100$ Dado que el regalo vale 100 euros.

$x = 3(y+z)$ Ya que el padre paga el triple que los dos hijos juntos.

$\frac{z}{2} = \frac{y}{3}$ Porque por cada 2 € del menor, el mayor pone 3 €. Se obtiene el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z = 100 \\ x-3y-3z = 0 \\ \quad 2y-3z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 75;\ y = 15;\ z = 10$$

El padre pone 75 euros, el hijo mayor 15 y el menor 10.

SEP04 P2A:. Un fabricante produce en dos talleres tres modelos distintos de archivadores, el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C. Al fabricante le cuesta 720 € al día el funcionamiento del primer taller y 960 € el del segundo. El primer taller produce diariamente 4 archivadores del modelo A, 2 del B y 4 del C, mientras que el segundo produce 2, 2 y 12 archivadores, respectivamente. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para, cumpliendo el contrato conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento? ¿Cuál es el valor de dicho coste? ¿Quedaría algún excedente de algún producto en los talleres? En caso afirmativo, determinar cuánto.

Resolución:

Sea **x** : días de trabajo del primer taller ; e **y** : días de trabajo del segundo taller.

Función Objetivo: $f(x,y) = 720x+960y$ (MINIMIZAR)

Restricciones:

Para construir las restricciones, puede que te ayude organizar los datos en una tabla:

	Taller1	Taller2	Producción mínima
Archiv. A	4x	2y	12
Archiv. B	2x	2y	8
Archiv. C	4x	12y	24

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x+2y \geq 12 \ \text{(archivadores A fabricados)} \\ 2x+2y \geq 8 \ \text{(archivadores B fabricados)} \\ 4x+12y \geq 24 \ \text{(archivadores C fabricados)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y \geq 6 \\ x+y \geq 4 \\ x+3y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}\right.$$

Método de las rectas de nivel:

Escogemos el punto (4,4) del interior de la región factible.

Su imagen por la función objetivo es:

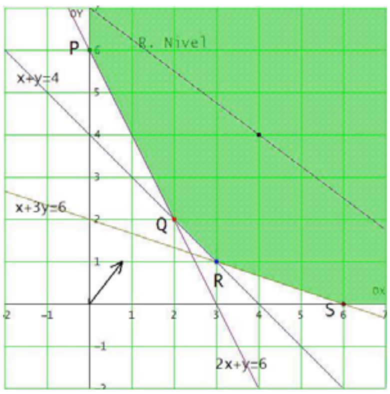
$f(4,4) = 720 \cdot 4+960 \cdot 4 = 6720$

Trazamos la recta de nivel que pasa por él:

$$\mathbf{720x+960y = 6720} \quad \Rightarrow$$

Dibujamos un vector proporcional al vector gradiente:

$$\nabla f = (720,960) \sim (3,4) \sim (0.75,1) \quad \Rightarrow$$



Como se trata de **minimizar** la función objetivo, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en el sentido contrario al indicado por el vector gradiente hasta encontrar el último punto de contacto con la región factible, (R), que será la solución.

$$R : \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 4x + 12y = 24 \end{cases} \Rightarrow R = (3, 1).$$

Así pues, el primer taller deberá trabajar 3 días y el segundo, 1 día. Los costes en este caso resultan ser: $f(3,1) = 720 \cdot 3 + 960 \cdot 1 = 3120$ €.

En este caso, el número de archivadores fabricados resulta ser:

	Taller1	Taller2	Total
Archiv. A	12	2	14
Archiv. B	6	2	8
Archiv. C	12	12	24

Por lo que sobrarían 2 archivadores de tipo A, lo cual representa el excedente que quedaría en los talleres.

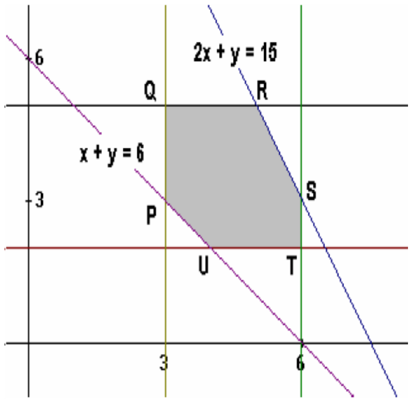
SEP04 P2B: Calcular los puntos de la región definida por:

$x + y \geq 6$; $2x + y \leq 15$; $3 \leq x \leq 6$; $2 \leq y \leq 5$

donde la función $z = 3x + 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo.

Resolución:

Representando las rectas asociadas a cada inecuación se obtiene la región sombreada en la siguiente figura.



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$$P : \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (3,3); Q = (3,5); R : \begin{cases} 2x + y = 15 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow R = (5,5);$$

$$S : \begin{cases} 2x + y = 15 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow S = (6,3); T = (6,2); U : \begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow U = (4,2)$$

El valor de la función $z = 3x + 2y$ en esos vértices es:

En P, $z(3,3) = 15$ En Q, $z(3,5) = 19$ En R, $z(5,5) = 25$

En S, $z(6,3) = 24$ En T, $z(6,2) = 22$ En U, $z(4,2) = 16$

Por tanto, el máximo, que es 25, se alcanza en el punto R = (5, 5); el mínimo, que vale 15, en el punto P = (3, 3).

JUN05 P1A: Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Resolución:

Tenemos que averiguar: $\begin{cases} x \text{ : nº de hojas que reparte Elena.} \\ y \text{ : nº de hojas que reparte Pedro.} \\ z \text{ : nº de hojas que reparte Juan.} \end{cases}$

Pedro reparte el 20 % $\Rightarrow \quad y = 0.20(x+y+z)$

Juan reparte 100 más que Elena $\Rightarrow \quad z = x + 100$

Entre Pedro y Elena colocan 850 $\Rightarrow \quad x + y = 850$

Arreglamos el sistema y lo resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ -x \qquad + z = 100 \\ x + y \qquad = 850 \end{cases}$$

Para comprobar si tiene solución única calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

$\Rightarrow$ Sí tiene solución única. Calculémosla: $\left(x = \dfrac{|A_x|}{|A|} \; ; \; y = \dfrac{|A_y|}{|A|} \; ; \; z = \dfrac{|A_z|}{|A|} \right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 100 & 0 & 1 \\ 850 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3300}{-6} = 550 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 100 & 1 \\ 1 & 850 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1800}{-6} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 100 \\ 1 & 1 & 850 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3900}{-6} = 650.$$

Con lo que Elena reparte 550 hojas, Pedro reparte 300 y Juan 650.

$\boxed{\text{JUN05 P1B}}$: Sea $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriz de sus términos independientes. Se pide:

a) Escribir las tres ecuaciones que forman el sistema.

b) Obtener todas las soluciones del sistema.

Resolución:

a) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Realizando la multiplicación: $\begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ 2x + 3y + z \\ 2x + 5y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$

b) Si calculamos $|A| = 0$. (se podía saber de antemano porque tiene 2 columnas proporcionales). Por eso no se puede aplicar la regla de Cramer (no es un SCD). Podríamos discutir el sistema por el Teorema de Rouché-Frobenius (estudiando rg(A) y rg(A*)), pero como nos piden las soluciones lo mejor será tratar de resolverlo directamente por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones:

1^{er} paso: $\begin{cases} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{cases}$

2º paso: $F_3 \to F_3 - 3 \cdot F_1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ \mathbf{y} \quad = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow 2x + z = 1.$ Que tendrá infinitas soluciones. Para obtenerlas utilizamos el parámetro λ :

$\mathbf{z} = \boldsymbol{\lambda} \to 2x + \lambda = 1 \to \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{1 - \lambda}}{\mathbf{2}}$. Así, el conjunto de soluciones será:

$$\left(\frac{1-\lambda}{2}, 0, \lambda\right), \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

JUN05 P2A: Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son de un mínimo de 36 mgr. de vitamina A, 28 mgr. de vitamina C y 34 mgr. de vitamina D. Estas necesidades se cubren tomando pastillas de la marca Energic y de la marca Vigor. Cada pastilla de la marca Energic cuesta 0,03 € y proporciona 2 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 8 mgr. de vitamina D. Cada pastilla de la marca Vigor cuesta 0,04 € y proporciona 3 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 2 mgr. de vitamina D. ¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determinar dicho coste.

Resolución:

Hemos de calcular el nº de pastillas de cada marca por lo que plantearemos:

x : nº de pastillas Energic.
y : nº de pastillas Vigor.

Dado que buscamos minimizar el coste, el coste será la función objetivo:

$$f(x,y) = 0.03x + 0.04y$$

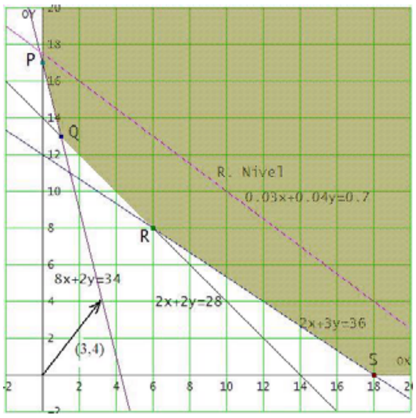
Restriciones:

Podemos organizar previamente los datos en una tabla:

	nº de pastillas	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D
pastilla Energic	x	2x	2x	8x
pastilla Vigor	y	3y	2y	2y
necesidades de vitaminas		36	28	34

Con lo que resulta muy sencillo obtener ahora el conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 34 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$ Dibujamos la región factible:



MÉTODO DE LOS VÉRTICES:

obtenemos los vértices: $P = (0,17); Q = (1,13)$

$R = (6,8); S = (18,0)$.

$f(0,17) = 0.04 \cdot 17 = 0.68$

$f(1,13) = 0.03 \cdot 1 + 0.04 \cdot 13 = 0.55$

$f(6,8) = 0.03 \cdot 6 + 0.04 \cdot 8 = 0.5$

$f(18,0) = 0.03 \cdot 18 = 0.54$

Así, por el método de los vértices, el mínimo se alcanza en el punto (6,8).

Si optamos por el método de la recta de nivel, podríamos escoger el punto (10,10) del interior de la región factible. Lo sustituimos en la función objetivo y obtenemos $f(10,10) = 0.7$.

Dibujamos entonces la recta de nivel $0.03x + 0.04y = 0.7$ y un vector proporcional al vector gradiente $\nabla f = (0.03, 0.04) \sim (3,4)$.

Para minimizar, habría que mover de forma paralela la recta de nivel en el sentido contrario al indicado por el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible, (6,8) es el mínimo buscado.

Así pues para minimizar el coste se ha de tomar diariamente 6 pastillas Energic y 8 pastillas Vigor, en cuyo caso el coste será de $f(6,8) = 0.5$ €.

JUN05 P2B: Un vendedor dispone de 350000 € para invertir en dos tipos de microondas. El que dispone de más accesorios tiene un coste de 150 € y reporta un beneficio de 15 € por unidad vendida, mientras que el otro modelo sólo proporciona un beneficio de 11 € por unidad vendida y tiene un coste de 100 €. Sabiendo que sólo se pueden almacenar 3000 microondas y que no se venderán más de 2000 del modelo más caro, determinar cuántos microondas de cada clase se deben comprar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Resolución:

Nos preguntan el nº de microondas de cada tipo, por lo que definiremos:

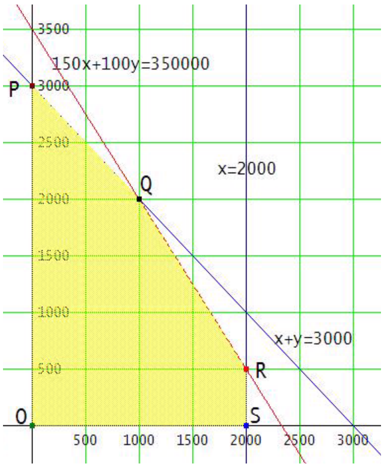
x : nº microondas caros.

y : nº microondas baratos.

Como hay que maximizar beneficios, éstos serán la función objetivo: $f(x,y) = 15x + 11y$.

Conjunto de restricciones y región factible:

$$\begin{cases} 150x + 100y \leq 350000 & \text{(dinero invertido)} \\ x + y \leq 3000 & \text{(microondas almacenados)} \\ x \leq 2000 & \text{(no se venden más de 2000)} \\ x \geq 0\,;\; y \geq 0 \end{cases}$$

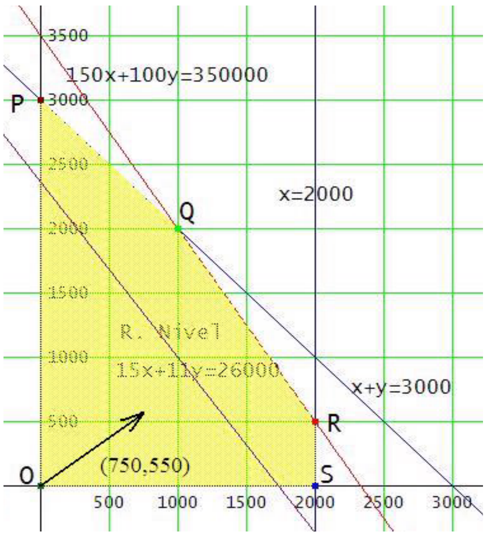


(Nota: La 1ª restricción $150x + 100y \leq 350000$ podríamos haberla simplificado como $3x + 2y \leq 7000$)

Método de las rectas de nivel:

Escogemos el punto (1000,1000) del interior de la región factible y lo sustituios en la región objetivo: $f(1000, 1000) = 15 \cdot 1000 + 11 \cdot 1000 = 26\,000$. Ahora calculamos y dibujamos la correspondiente **recta de nivel**: $15x + 11y = 26000$.

Representamos también un vector proporcional al vector gradiente: $\nabla f = (15, 11) \sim (750, 550)$:



Desplazando la recta de nivel de forma paralela en la dirección y sentido indicado por el vector gradiente, el último punto de contacto con la región factible es

$$Q : \begin{cases} x + y = 3000 \\ 150x + 100y = 350000 \end{cases} \rightarrow$$

$Q = (1000, 2000)$, que es la solución buscada.

Por lo tanto los beneficios serán máximos cuando se compren 1000 microondas de los caros y 2000 de los baratos, en cuyo caso el beneficio será de $f(x,y) = 15 \cdot 1000 + 11 \cdot 2000 = 37\,000$ €

SEP 05 P1A: Dos hermanos deciden invertir 10000 € cada uno en distintos productos financieros. El mayor invirtió una cantidad A en un producto que ha proporcionado un beneficio del 6%, una cantidad B en otro que ha dado una rentabilidad del 5% y el resto en un plazo fijo al 2% de interés. El hermano menor invirtió esas mismas cantidades en otros productos que le han proporcionado, respectivamente, unos beneficios del 4, 3 y 7 %. Determinar las cantidades A, B y C invertidas si las ganancias del hermano mayor han sido 415 € y las del pequeño 460 €.

Resolución:

Llamemos:

$$\begin{cases} x \text{ : cantidad A (en €)} \\ y \text{ : cantidad B (en €)} \\ z \text{ : cantidad C (en €)} \end{cases}$$

Se invierten 10000 € : $x + y + z = 10000$
Ganancias del h.. mayor: $0.06x + 0.05y + 0.02z = 415$
Ganancias del h.. menor: $0.04x + 0.03y + 0.07z = 460$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10000 \\ 6x + 5y + 2z = 41500 \\ 4x + 3y + 7z = 46000 \end{cases}$$. Intentemos aplicar Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0. \Rightarrow \text{El sistema tiene solución única (SCD)}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10000 & 1 & 1 \\ 41500 & 5 & 2 \\ 46000 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14\,000}{-7} = 2000 \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10000 & 1 \\ 6 & 41500 & 2 \\ 4 & 46000 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-31\,500}{-7} = 4500$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10000 \\ 6 & 5 & 41500 \\ 4 & 3 & 46000 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-24\,500}{-7} = 3500.$$

Por lo tanto las cantidades A,B y C son 2000, 4500 y 3500 respectivamente.

SEP05 P1B: Calcular la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Resolución:

Despejemos X en la ecuación matricial:

$$AXB = C \to A^{-1}AXB = A^{-1}C \to XB = A^{-1}C \to XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \to X = A^{-1}CB^{-1}$$

Por lo que tendremos que calcular A^{-1} y B^{-1} :

A^{-1} por el método de Gauss: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

(Donde hemos hecho el cambio $F_2 \to F_2 - F_1$.) $\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} : \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \mathbf{X}$$

NOTA: También se podría haber resuelto el ejercicio planteando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 2a-3b \\ a-b-c & 2a-3b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = -1 \\ 2a-3b = -2 \\ a-b-c = -3 \\ 2a-3b-3c = -8 \end{cases} . \text{ Si resolvemos las 2 primeras ecuaciones: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Sustituimos en las otras 2: $\begin{cases} -1-c = -3 & \to c = 2 \\ -2-3c = -8 & \to c = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

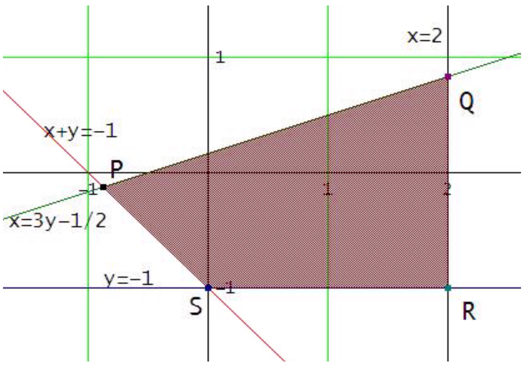
$\boxed{\text{SEP05 P3}}$: Representar la región factible dada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+y \geq -1 \\ x \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x \geq 3y - 1/2 \end{cases}$$

y hallar los puntos de la región en los que la función $f(x,y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y obtener dichos valores.

Resolución:

La región factible quedaría:



Ahora podemos resolver el problema por el método de los vértices o de las rectas de nivel. Lo haremos por el método de los vértices:

Calculemos las coordenadas de todos los vértices:

$P : \begin{cases} x+y = -1 \\ x = 3y - 1/2 \end{cases} \rightarrow P = \left(\frac{-7}{8}, \frac{-1}{8}\right) \;;\; Q : \begin{cases} x = 2 \\ x = 3y - 1/2 \end{cases} \rightarrow Q = \left(2, \frac{5}{6}\right)$

$R = (-1,2) \;;\; S = (0,-1).$

Dado que la función objetivo alcanza sus extremos en los vértices de la región factible, comprobemos cuál es el mínimo y cuál es el máximo:

$f(P) = f\left(\frac{-7}{8}, \frac{-1}{8}\right) = \frac{-14}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{17}{8} \;;\; f(Q) = f\left(2, \frac{5}{6}\right) = 4 + \frac{15}{6} = \frac{13}{2}$

$f(R) = f(-1,2) = -2+6 = 4 \;;\; f(S) = f(0,-1) = 0-3 = -3$

Queda probado que el mínimo se alcanza en el punto $(0,-1)$, donde el valor de la función es -3 y el máximo se alcanza en el punto $(2, \frac{5}{6})$ donde el valor de la función es $\frac{13}{2} = 6´5$.

SEP05 P2: Una empresa farmacéutica tiene en la actualidad dos líneas de investigación, la de medicamentos antiinflamatorios no esteroides y la de fármacos ansiolíticos. Desea invertir en la investigación a lo sumo tres millones de euros, con la condición de dedicar por lo menos 1,5 millones de euros a los ansiolíticos, con los que espera obtener un beneficio del 10%. En cambio en la investigación sobre medicamentos antiinflamatorios, aunque se calcula un beneficio del 25%, no debe invertir más de un millón de euros ¿Qué cantidad debe dedicar a cada línea de investigación para maximizar beneficios, si además debe dedicar a los ansiolíticos al menos el doble de dinero que a los antiinflamatorios? ¿Qué beneficio obtendrá de esta forma la empresa?

Resolución:

Hay que maximizar beneficios, luego la función objetivo será los beneficios. Las cantidades que debemos averiguar son:

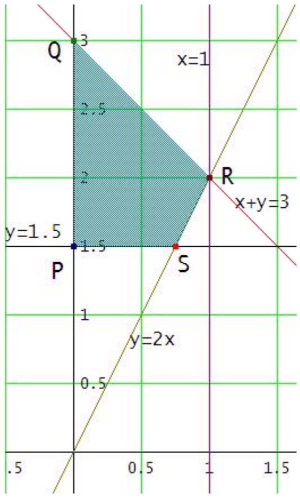
x : cantidad invertida en medicamentos antiinflamatorios no esteroides.
y : cantidad invertida en fármacos ansiolíticos. (ambas en millones de €)

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \leq 3 & \text{(se invierten a lo sumo 3 millones)} \\ y \geq 1.5 & \text{(se dedican por lo menos 1.5 millones a los ansiolíticos)} \\ x \leq 1 & \text{(en antiinflamatorios o más de 1 millón)} \\ y \geq 2x & \text{(se dedica a ansiolíticos al menos el doble que a los antiinflamatorios)} \\ x \geq 0 \;;\; y \geq 0 \end{cases}$$

Función Objetivo: $f(x,y) = 0.25x + 0.1y$.

Representemos la región factible:



Los vértices son: $P = (0,1.5); Q = (0,3); R = (1,2);$
$S = (0.75,1.5)$.

El valor de la función objetivo en esos puntos es:

$f(0,1.5) = 0.1 \cdot 1.5 = 0.15$; $f(0,3) = 0.1 \cdot 3 = 0.3$

$f(1,2) = 0.25 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 = 0.45$

$f(0.75,1.5) = 0.25 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 1.5 = 0.3375$

Dado que el máximo se alcanza en uno de los vértices, éste ha de ser el (1,2).

Es decir la empresa habrá de dedicar 1 millón de euros a la investigación en medicamentos antiinflamatorios y 2 millones a los fármacos ansiolíticos, en cuyo caso los beneficios serán de 450 000 €, que es el valor máximo.

$\boxed{\text{JUN06 P2B}}$: Una refinería de petróleo adquiere dos tipos de crudo, ligero y pesado, a un precio de 70 y 65 € por barril, respectivamente. Con cada barril de crudo ligero la refinería produce 0,3 barriles de gasolina 95, 0,4 barriles de gasolina 98 y 0,2 barriles de gasoil. Asimismo, con cada barril de crudo pesado produce 0,1, 0,2 y 0,5 barriles de cada uno de estos tres productos, respectivamente. La refinería debe suministrar al menos 26300 barriles de gasolina 95, 40600 barriles de gasolina 98 y 29500 barriles de gasoil. Determina cuántos barriles de cada tipo de crudo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades de producción con un coste mínimo y calcula éste.

Resolución:

Sean: x : nº de barriles de crudo ligero.
y : nº de barriles de crudo pesado.

Las restricciones salen debido a que "la refinería debe suministrar al menos...". Por lo que los valores x,y (nº de barriles) habrán de asegurar que se consigan cantidades mayores o iguales que las citadas de gasolina 95, 98 y gasoil. Puede facilitar la tarea organizar los datos en una tabla:

	nº barriles gasolina 95	nº barriles gasolina 98	nº barriles gasoil
"x" barriles crudo ligero	$0.3x$	$0.4x$	$0.2x$
"y" barriles crudo pesado	$0.1y$	$0.2y$	$0.5y$
	$0.3x + 0.1y$	$0.4x + 0.2y$	$0.2x + 0.5y$

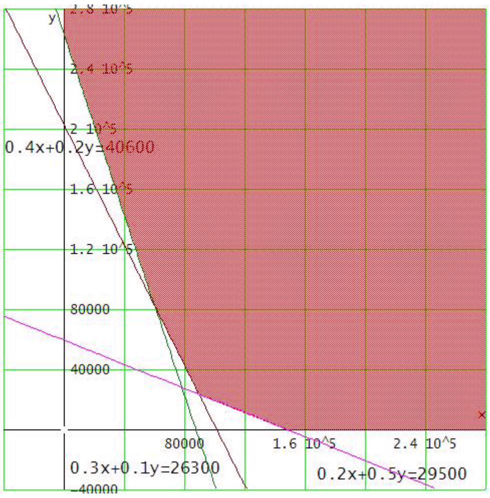
Restricciones: $$\begin{cases} 0.3x + 0.1y \geq 26300 \\ 0.4x + 0.2y \geq 40600 \\ 0.2x + 0.5y \geq 29500 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

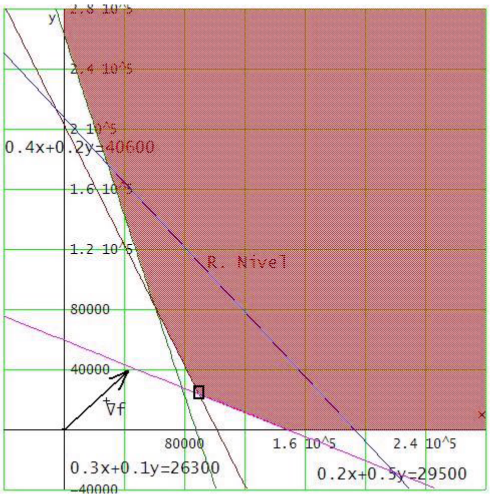
La función objetivo la obtenemos sobre la cantidad que haya que optimizar (maximizar o minimizar). En este caso, hay que minimizar el coste, por lo que la función objetivo será la que defina el gasto o el coste de los barriles que se habrán de comprar:

$$\text{Minimizar} \quad f(x,y) = 70x + 65y \quad \text{(en euros)}$$

Método de la recta de nivel:

Representamos la región factible y a continuación la recta de nivel y el vector gradiente:





Dado que se trata de **minimizar** la función objetivo, traslademos de forma paralela la recta de nivel en el sentido contrario al indicado por el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible es la solución buscada. Calculemos sus coordenadas.

El punto que buscamos (marcado en el dibujo) es intersección de las rectas $\begin{cases} 0.4x + 0.2y = 40600 \\ 0.2x + 0.5y = 29500 \end{cases}$

Resolviendo el sistema: $(x, y) = (90000, 23000)$.

Por lo que el coste será mínimo cuando se compren 90000 barriles de crudo ligero y 23000 de crudo pesado.

JUN06 P1A: Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250 000 € en terreno industrial y 250 000 € en terreno rústico. La segunda invirtió 125 000, 250 000 y 125 000 € en terreno urbano, industrial y rústico respectivamente, y la tercera, 100 000, 100 000 y 200 000 € en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año, venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75 %, la de la segunda del 11,25 % y, finalmente, la de la tercera es del 10 %. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

Resolución:

Llamamos:
x : rentabilidad del terreno urbano
y : rentabilidad del terreno industrial (en %)
z : rentabilidad del terreno rústico

Beneficios de la 1ª Constructora: (dinero invertido)•(tanto por uno de rentabilidad)

T. Urbano T.Industrial T.Rústico Total

$$500000 \cdot \frac{x}{100} + 250000 \cdot \frac{y}{100} + 250000 \cdot \frac{z}{100} = 1000000 \cdot \frac{13.75}{100}$$

Planteamos análogamente las ecuaciones para la 2ª y 3ª constructora, y obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5000x + 2500y + 2500z = 137500 \\ 1250x + 2500y + 1250z = 56250 & (\rightarrow 500000 \cdot 0.1125) \\ 1000x + 1000y + 2000z = 40000 & (\rightarrow 400000 \cdot 0.10) \end{cases}$$

Y simplificando $\begin{cases} 50x + 25y + 25z = 1375 \\ 125x + 250y + 125z = 5625 \\ x + y + 2z = 40 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 20;\ y = 10;\ z = 5.$ Así, concluimos que el terreno urbano tiene una rentabilidad del 20 %, el industrial del 10 % y el rústico del 5%.

$\boxed{\text{JUN06 P1B}}$: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = -6 \\ x \quad\quad + z = 5 \\ 2x - y \quad\quad = 11 \end{array}\right\}$$

Resolución:

Sean $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2)$

$- (-2) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 0 + 2 + 2 - 0 - 0 + 1 = \mathbf{5}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-6) \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 11 + 5 \cdot (-1) \cdot (-2)$

$- (-2) \cdot 0 \cdot 11 - 5 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot (-6) = 0 + 11 + 10 - 0 - 0 - 6 = \mathbf{15}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + (-6) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 11 \cdot (-2)$

$- (-2) \cdot 5 \cdot 2 - (-6) \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 11 \cdot 1 = 0 - 12 - 22 + 20 - 0 - 11 = -\mathbf{25}$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 11 + 1 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-6)$

$-(-6) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 11 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 = 0 + 10 + 6 - 0 - 11 + 5 = \mathbf{10}$

$\mathbf{x} = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{15}{5} = \mathbf{3};\ \mathbf{y} = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-25}{5} = -\mathbf{5};\ \mathbf{z} = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{10}{5} = \mathbf{2}.$

Solución que también se puede expresar $(\mathbf{3}, -\mathbf{5}, \mathbf{2})$

$\boxed{\text{SEP06 P1A}}$: Determina la matriz A que verifica la ecuación $AB + A = 2B^t$, donde $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B^t representa la matriz traspuesta de B.

Resolución:

En primer lugar, despejamos la matriz A :

$$AB + A = 2B^t$$
$$A \cdot (B + I) = 2B^t$$

Ahora $(B+I)$ pasa al otro lado multiplicando por la derecha como $(B+I)^{-1}$:

$$A = 2B^t \cdot (B+I)^{-1}$$

Calculamos $2B^t$:

$$2 \cdot B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y ahora calculamos $(B+I)^{-1}$:

$$B + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa de $(B+I)$ podemos utilizar el método de Gauss o por adjuntos.

Lo haremos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \quad \left[\begin{array}{l} F_1 \to 3F_1 + F_2 \\ F_1 \cdot (1/4) \\ F_2 \cdot (1/3) \end{array}\right]$$

Con lo que $(B+I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Así

$$A = 2B^t \cdot (B+I)^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

SEP06 P2A: Una destilería produce dos tipos de whisky blend mezclando sólo dos maltas destiladas distintas, A y B. El primero tiene un 70% de malta A y se vende a 12 €/litro, mientras que el segundo tiene un 50% de dicha malta y se vende a 16 €/litro. La disponibilidad de las maltas A y B son 132 y 90 litros, respectivamente ¿Cuántos litros de cada whisky debe producir la destilería para maximizar sus ingresos, sabiendo que la demanda del segundo whisky nunca supera a la del primero en más del 80%? ¿Cuáles serían en este caso los ingresos de la destilería?.

Resolución:

En primer lugar observamos que se nos pide el nº de litros de cada whisky, por lo que llamaremos:

x : nº de litros del whisky 1.

y : nº de litros del whisky 2.

Por otro lado se nos pide que hay que maximizar ingresos. Por lo que la función objetivo viene determinada por los ingresos:

$$f(x,y) = 12x + 16y$$

y se medirá en €.

Conjunto de restricciones:

Disponibilidad de la malta A:

$$0.70x + 0.50y \leq 132$$

Disponibilidad de la malta B:

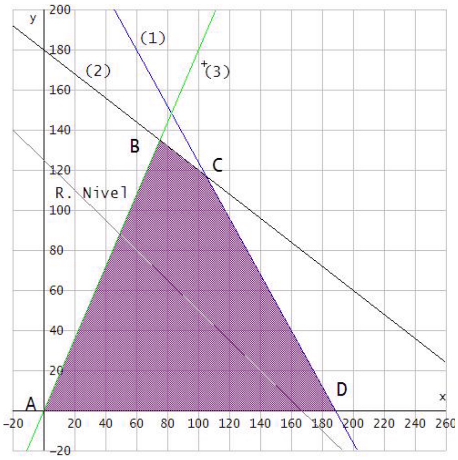
$$0.30x + 0.50y \leq 90$$

Demanda del whisky 2 no supera a la del whisky 1 en más del 80% (es decir, x será menor o igual que el 180% de y):

$$y \leq 1.8x$$

$$\begin{cases} (1)\ 0.70x + 0.50y \leq 132 \\ (2)\ 0.30x + 0.50y \leq 90 \\ (3)\ y \leq 1.8x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible:



Si aplicamos el método de las rectas de nivel (o el de los vértices) obtendremos que la solución se alcanza en el vértice C, que resulta ser la intersección de las rectas (1) y (2):

$$\begin{cases} (1)\ 0.70x + 0.50y = 132 \\ (2)\ 0.30x + 0.50y = 90 \end{cases} . \to C = (105, 117).$$

Por lo tanto, para maximizar los ingresos, deben producirse 105 litros del primer whisky y 117 del segundo, en cuyo caso los beneficios serán de:

$f(105, 117) = 12 \cdot 105 + 16 \cdot 117 = 3132$ €.

SEP06 P1B: En el primer curso de bachillerato de un instituto hay matriculados un total de 65 alumnos divididos en tres grupos: A, B y C. Comen en el centro 42 de ellos, que corresponden a la mitad de los del grupo A, las cuatro quintas partes de los del B y las dos terceras partes de los del C. A una salida fuera del centro acudieron las tres cuartas partes de los alumnos del grupo A, todos los del B y las dos terceras partes de los del C, sumando en total 52 estudiantes. ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo?

Resolución:

En primer lugar definimos x, y, z a el número de alumnos de los grupos A,B y C respectivamente.

Total de 65 alumnos $\to x + y + z = 65$

Comen en el centro $\to \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + \frac{2z}{3} = 42$

Acuden a la salida $\to \frac{3x}{4} + y + \frac{2z}{3} = 52$

Arreglamos el sistema, eliminando los denominadores: $\begin{cases} x+y+z=65 \\ 15x+24y+20z=1260 \\ 9x+12y+8z=624 \end{cases}$

Sistema que, resuelto por Cramer o por Gauss, da lugar al siguiente resultado: $x=24; y=20; z=21$ Por lo que hay 24 alumnos en el grupo A, 20 en el grupo B y 21 en el C.

JUN07 P1A: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $A \cdot A^t - 5A^{-1}$, siendo A^t y A^{-1} las matrices transpuesta e inversa de A, respectivamente.

Resolución:

Obtenemos $A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Y calculemos $A^{-1}=\frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$:

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5.$ $Adj(A)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculemos $A \cdot A^t - 5A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-5\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

JUN07 P2A: Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M1y M2. Para fabricar 1 tonelada de A hacen falta 500 Kg. de M1 y 750 Kg. de M2, mientras que las cantidades de M1 y M2 utilizadas para fabricar 1 Tm. de B son 800 Kg. y 400 Kg., respectivamente. La empresa tiene contratado un suministro máximo de 10 Tm. de cada materia prima y vende a 1.000 € y 1.500 € cada Tm. de abono A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son éstos?

Resolución:

Como se nos preguntan las toneladas de cada abono, llamamos x e y a las toneladas de abono A y B respectivamente.

La función objetivo vendrá determinada por los ingresos:

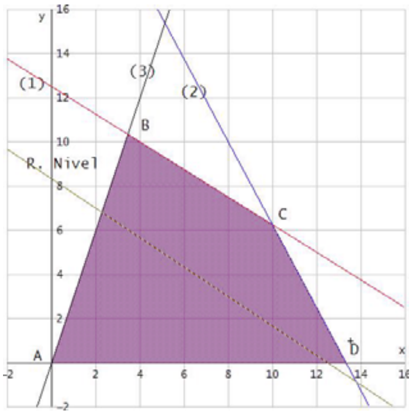
$f(x,y)=1000x+1500y$ (maximizar). Vamos con el conjunto de restricciones:

Por cada tonelada de abono A→ 0.5 t de M1 y 0.75 t de M2.

Por cada tonelada de abono B→ 0.8 t de M1 y 0.4 t de M2. Así:

$\begin{cases} (1)\ 0.5x+0.8y \le 10 \text{ (tope de materia prima M1)} \\ (2)\ 0.75x+0.4y \le 10 \text{ (tope de materia prima M2)} \\ (3)\ y \le 3x \text{ (...no llega a triplicar...)} \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases}$

(Observa que la expresión “...no llega a triplicar..." significa “...es menor o igual que el triple..."). Dibujemos la región factible:



Por cualquiera de los métodos estudiados, llegamos a que la solución se alcanza en el vértice C, intersección de las rectas (1) y (2):

$$\begin{cases} 0.5x + 0.8y = 10 \\ 0.75x + 0.4y = 10 \end{cases} \Rightarrow C = (10, 6.25)$$

Así, deben fabricarse 10 toneladas de abono A y 6.25 toneladas de abono B, en cuyo caso los ingresos serán de:

$f(10, 6.25) = 1000 \cdot 10 + 1500 \cdot 6.25 = 19375$ €

JUN07 P1B: Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 euros, respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1.265.000 euros por la venta de automóviles de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000 euros?

Resolución:

Llamaremos x, y, z al nº de coches de 12000 €, de 15000 € y de 22000 € respectivamente.

Ha ingresado 1.265.000 € $\Rightarrow$ $12000x + 15000y + 22000z = 1265000$.

Del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos: $x = y + z$.

Del más caro, la tercera parte de los que cuestan 15000 €: $z = \frac{y}{3}$. El sistema queda:

$$\begin{cases} 12x + 15y + 22z = 1265 \\ x - y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Sistema que se puede resolver por Cramer, Gauss o incluso sustitución despejando "y" en la 3ª ecuación. El resultado es $x = 44,\ y = 33,\ z = 11.$ Por lo que el concesionario ha vendido 44 unidades del modelo más barato, 33 unidades del modelo de 15000 € y 11 unidades del modelo más caro.

JUN07 P2B: a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema determinado por las siguientes inecuaciones:

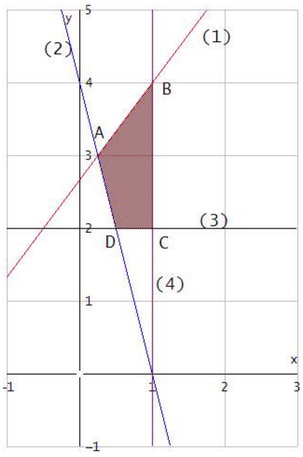
$3y - 4x - 8 \leq 0,\ \ y \geq -4x + 4,\ \ y \geq 2,\ \ x \leq 1.$

b) Halla los vértices de la región anterior.

c) Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función $f(x, y) = 3x - y$ en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

Resolución:

a) Mediante tabla de valores representamos las rectas correspondientes. Las llamaremos (1), (2), (3) y (4) respectivamente. Después debemos “pintar" la parte correspondiente que venga indicada por el símbolo de desigualdad.



b) A es intersección de las rectas (1) y (2). Resolvemos el sistema formado por esas rectas:

$$\begin{cases} 3y-4x-8=0 \\ y=-4x+4 \end{cases} \Rightarrow A=(0.25,3).$$

B es intersección de las rectas (4) y (1):

$$\begin{cases} x=1 \\ 3y-4x=8 \end{cases} \Rightarrow B=(1,4).$$

C es intersección de (3) y (4) $\Rightarrow C=(1,2)$.

D es intersección de (3) y (2):

$$\begin{cases} y=2 \\ y=-4x+4 \end{cases} \Rightarrow D=(0.5,2).$$

c) El mínimo de la función se alcanza en uno de los vértices, por lo que bastará con probar en cada uno de ellos.

$A \to f(0.25,3)=3\cdot 0.25-3=-2.25$

$B \to f(1,4)=3\cdot 1-4=-1$

$C \to f(1,2)=3\cdot 1-2=1$

$D \to f(0.5,2)=3\cdot 0.5-2=-0.5$

Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el punto $A=(0.25,3)$, y dicho valor mínimo es de -2.25.

SEP07 P1A: Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave Enterprise. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

Resolución:

Llamaremos x, y a los gramos de los complementos A y B respectivamente. Construiremos la ecuación que mide la cantidad de riboflavina, y de la misma manera las del hierro y los carbohidratos:

$$\begin{cases} 2x+2y=12 \ \text{(riboflavina)} \\ 3x+y=16 \ \text{(hierro)} \\ 2x+4y=14 \ \text{(carbohidratos)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 6 \text{ (riboflavina)} \\ 3x+y = 16 \text{ (hierro)} \\ x+2y = 7 \text{ (carbohidratos)} \end{cases}$$

Como no tenemos el mismo número de incógnitas, 2, que de ecuaciones, 3, no se puede resolver por Cramer y lo resolveremos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cambios:

(1) $F_2 \to F_2 + (-3)F_1$; $F_3 \to F_3 + (-1)F_1$

(2) $F_2 \to (-1/2)F_2$

(3) $F_3 \to F_3 + (-1)F_2$

Y así obtenmos que el sistema es SCD, con solución $y = 1,\ x = 5$.

Por lo que será necesario producir 5 gramos del complemento A y 1 gramo del complemento B.

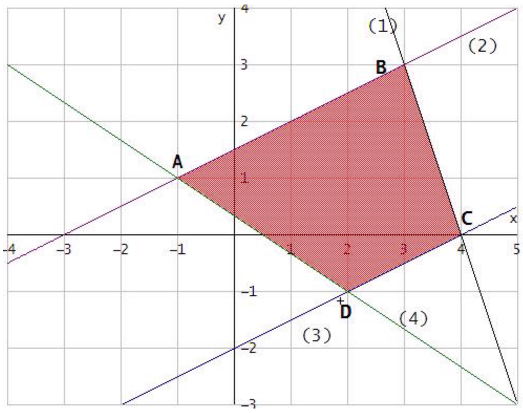
SEP07 P2A: a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$3x + y \leq 12,\ \ x - 2y \geq -3,\ \ y \geq \frac{x}{2} - 2,\ \ 2x + 3y \geq 1$

b) Calcula los puntos de la región donde la función $f(x) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determina éstos.

Resolución:

a) Tomamos las rectas correspondientes a cada inecuación (cambiando el signo por un =) y las representamos mediante tabla de valores (las llamaremos (1), (2) (3) y (4)). En cada recta señalaremos la parte de arriba ($y \geq \ldots$) o la parte de abajo ($y \leq \ldots$) según corresponda. La región factible quedaría de la siguiente manera:



Para calcular las coordenadas de cada vértice, basta con resolver el sistema formado por las 2 ecuaciones de las rectas que concurren en ese vértice:

A (ec (2) y (4)): $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \to A = (-1, -1)$

B (ec (1) y (2)): $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \to B = (3, 3)$

C (ec (1) y (3)): $\begin{cases} y = x/2 - 2 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \to C = (4, 0)$

D (ec (3) y (4)): $\begin{cases} y = x/2 - 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \rightarrow D = (2, -1)$

b) Dado que los extremos de la función objetivo se alcanzan en los vértices, calcularemos el valor de la función en cada uno de los vértices:

$A : f(-1,-1) = 3(-1) - 2(-1) = -1.$

$B : f(3,3) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3.$

$C : f(4,0) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 12.$

$D : f(2,-1) = 3 \cdot 3 - 2(-1) = 11.$

Queda probabo que el máximo se alcanza en el punto *C* mientras que el mínimo se alcanza en el punto *A*.

SEP07 P1B: Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{cases}$$

Resolución:

Vamos a comprobar si es un sistema de Cramer (solución única). Para ello calculamos el valor de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 14 - 2 - 2 - 7 = 0.$$

Por tanto no es un sistema de Cramer y no se puede resolver por dicho método. Estamos ante un caso de SCI o de SI. Lo resolveremos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array}\right) \underset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \end{array}\right) \underset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \text{ Cambios: } \begin{cases} (1)\ F_2 \rightarrow (-2)F_1 + F_2 \\ \quad F_3 \rightarrow 2F_1 + F_3 \\ (2)\ F_3 \rightarrow 3F_2 + F_3 \end{cases}$$

La 3ª ecuación queda $0z = 0 \rightarrow z = \lambda$ (puede tomar cualquier valor).

Sustituyendo en la 2ª ec.:

$-3y - \lambda = 2 \rightarrow y = \dfrac{-2-\lambda}{3}.$

Y sustituyendo en la 1ª ec.:

$x + \dfrac{-2-\lambda}{3} + \lambda = -1 \rightarrow x = \dfrac{-1-2\lambda}{3}.$

Por lo tanto estamos ante un SCI (infinitas soluciones) que las expresaremos así:

$\left\{ \left(\dfrac{-1-2\lambda}{3}, \dfrac{-2-\lambda}{3}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$