

Tema 3.

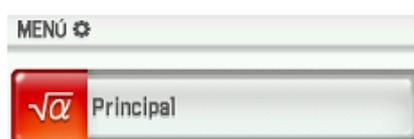
POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS. APLICACIONES AL CÁLCULO

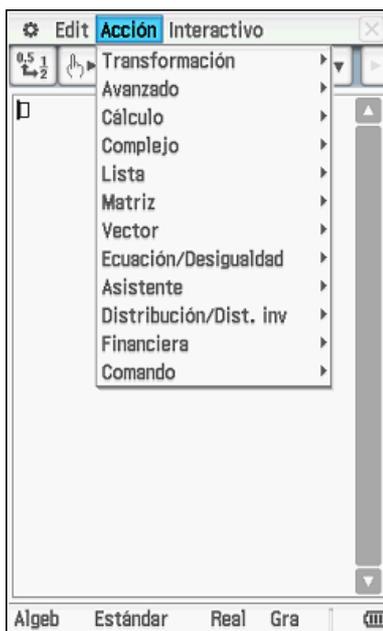
- Introducción.
- Simplificar expresiones.
- Desarrollar expresiones.
- Factorizar expresiones.
- Otras funciones del menú Transformación.
- Aplicaciones al cálculo.
- Cálculo diferencial.
- Cálculo integral.
- Cálculo de límites.
- Suma y producto de series.
- Polinomios de Taylor.
- Otras funciones del menú Cálculo.
- Actividades propuestas.

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora, en los dos temas anteriores la mayoría de las operaciones las hemos realizado sobre argumentos numéricos; por lo que ahora expondremos los diferentes comandos disponibles en la calculadora para abordar la simplificación de expresiones algebraicas y las funciones disponibles para trabajar con polinomios.

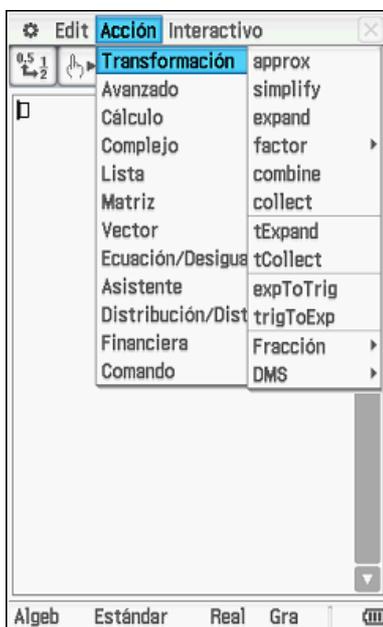
A estos comandos y funciones se accede a través del menú **Acción** que encontramos en el menú principal.





SIMPLIFICAR EXPRESIONES

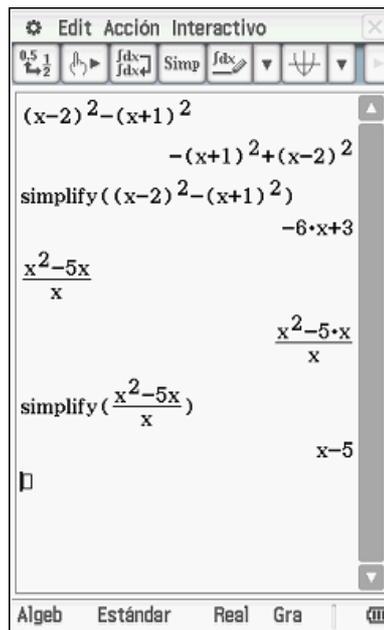
Una vez abierto el menú **Acción** seleccionamos **Transformación** para acceder al siguiente menú:



Una de las primeras funciones que encontramos es **simplify** cuyo significado es evidente, se utilizará para simplificar una expresión.

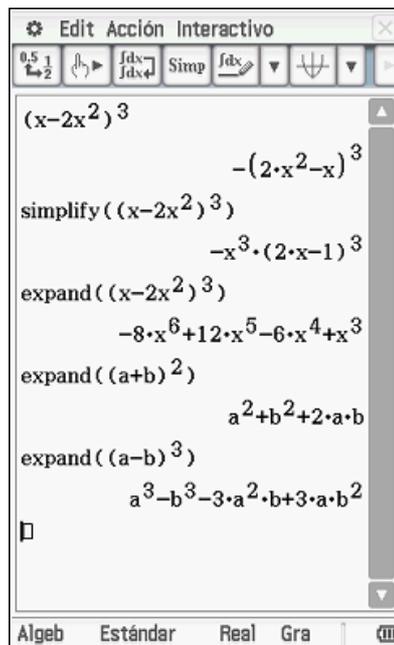
Esta función será necesaria cuando no se obtiene una expresión más sencilla

en la simplificación automática como por ejemplo:



DESARROLLAR EXPRESIONES

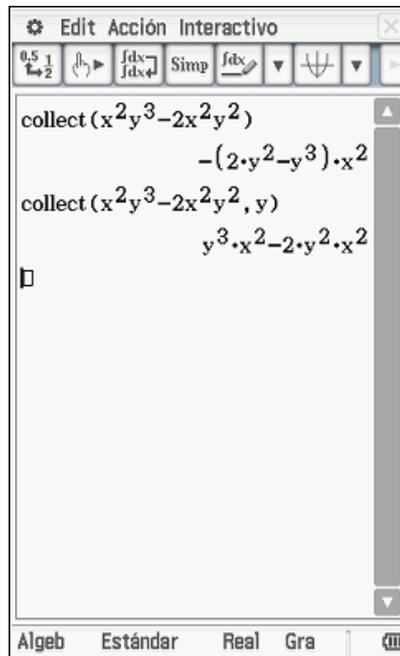
Para desarrollar una expresión se utilizará la función **expand** disponible en el mismo menú anterior. En el siguiente ejemplo se ve la diferencia entre definir la función, simplificarla (**simplify**) o desarrollarla (**expand**)



Para ordenar una expresión con respecto a una variable se utilizará la función **collect**.

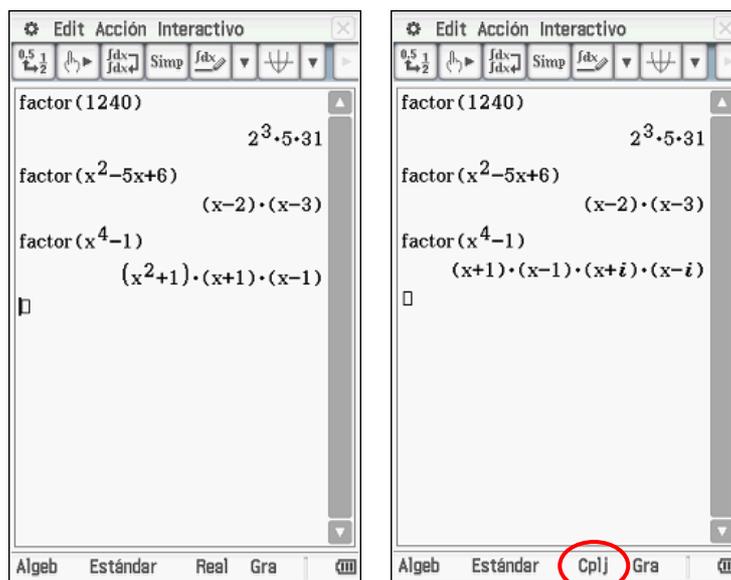
La sintaxis de esta función es: **collect(expresión, variable)**

Cuando no se indica el segundo argumento tomará x como valor por defecto.

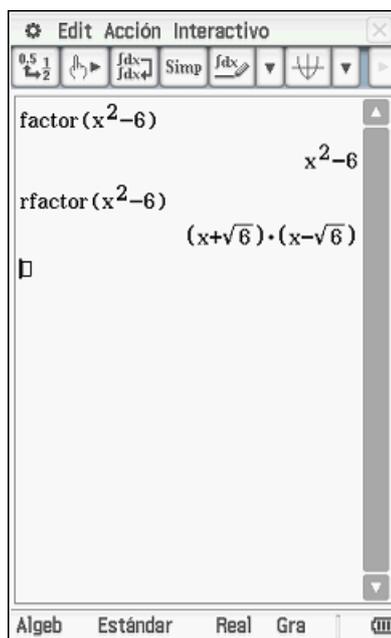


FACTORIZAR EXPRESIONES

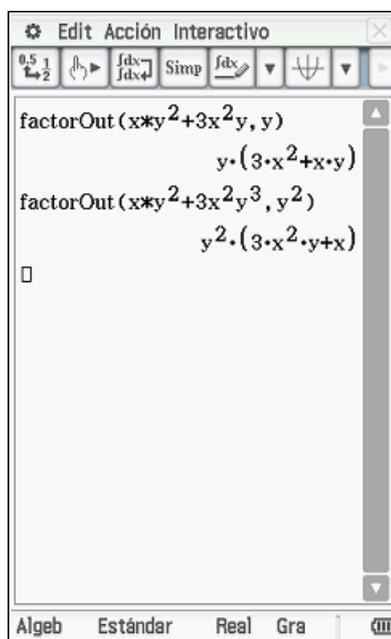
Para factorizar un número en factores primos o una expresión se utilizará la función **factor**. Si queremos que nos de también las raíces complejas debemos cambiar la configuración a modo **Cplj**



La función **rFactor** disponible en el menú **Transformación** permite factorizar una expresión hasta sus raíces reales si las tiene.



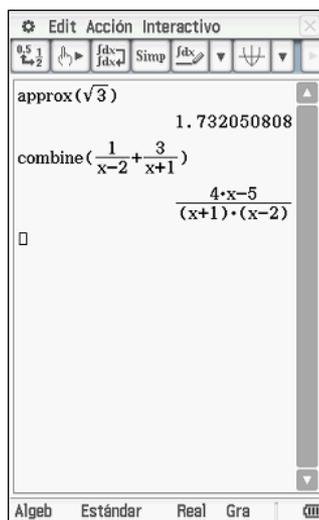
Además, la función **factorOut** permite incluir un segundo argumento para indicar el factor que se desea sacar factor común



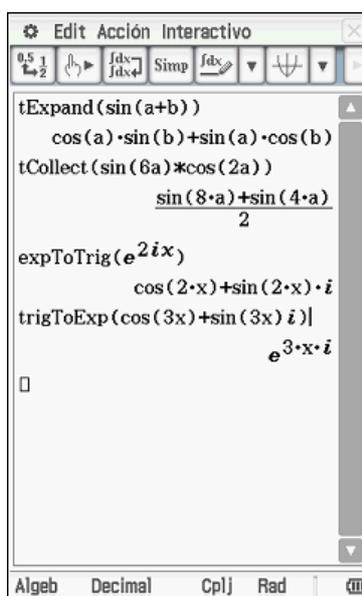
OTRAS FUNCIONES DEL MENÚ TRANSFORMACIÓN

Además, en este menú **Transformación** encontramos las siguientes funciones:

- **approx**: transforma una expresión en una aproximación numérica.
- **combine**: reduce a común denominador una suma de fracciones.



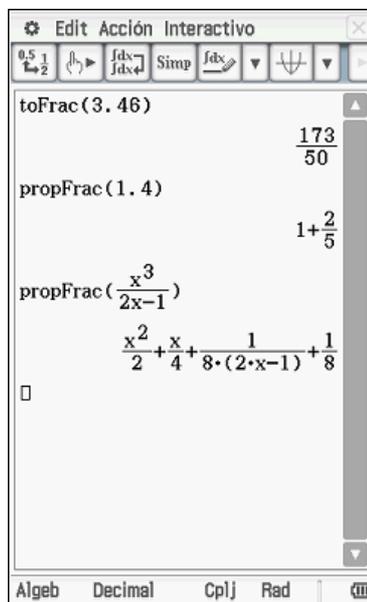
- **tExpand**: desarrolla una expresión trigonométrica utilizando las fórmulas de suma y diferencia.
- **tCollect**: transforma productos en sumas en una expresión trigonométrica.
- **expToTrig**: convierte una expresión exponencial en forma trigonométrica o hiperbólica.
- **triToExp**: realiza la conversión inversa a la anterior.



También encontramos en este menu las funciones para transformar fracciones (**Fracción**)

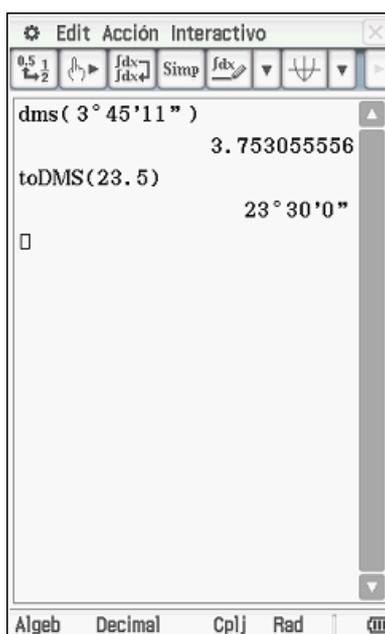
- **toFrac**: transforma un valor decimal en su expresión fraccionaria.
- **propFrac**: transforma un valor decimal en su fracción propia equivalente.

Puede aplicarse sobre una fracción algebraica.



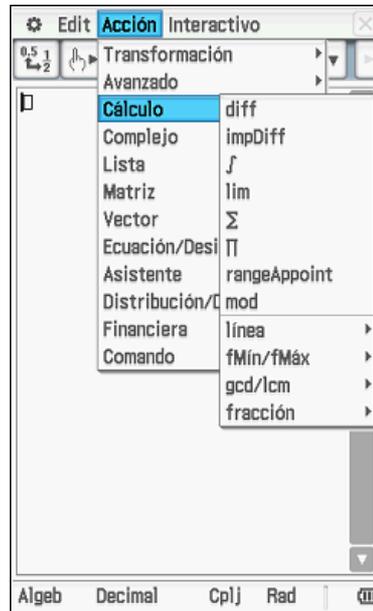
Y funciones para transformar ángulos en las distintas unidades:

- **dms** para pasar del sistema sexagesimal (grados, minutos y segundos), al sistema decimal
- **toDMS** para realizar la conversión inversa.



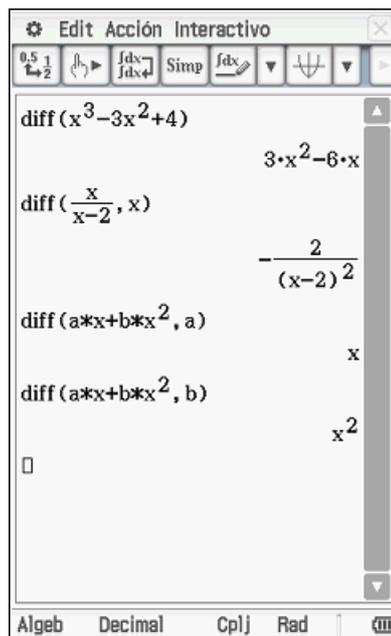
APLICACIONES AL CÁLCULO

Derivadas, límites, integrales, sumas de series y otras aplicaciones de cálculo simbólico se realizarán a través de las funciones disponibles en el menú **Cálculo** disponible en la opción **Acción** del menú principal.



CÁLCULO DIFERENCIAL

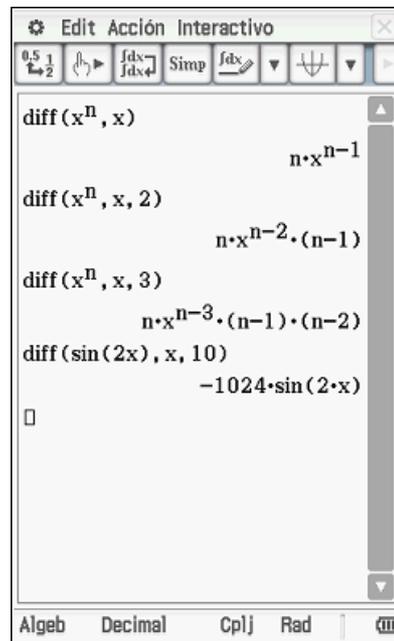
Para calcular la función derivada de una función f se obtiene a partir de la función **diff**, cuya sintaxis es: **diff(función, variable)**.



Como se observa en la imagen anterior, al omitir la variable, la calculadora asume x como valor por defecto.

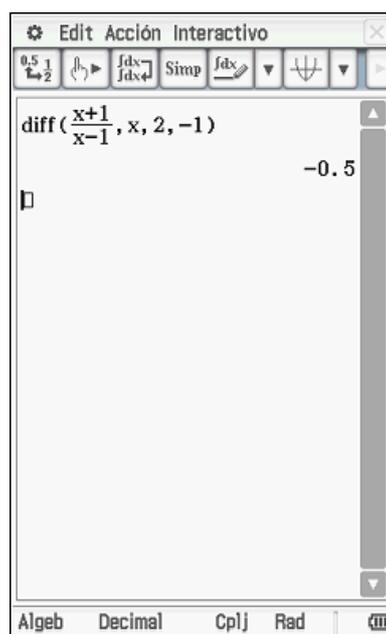
Esta misma función se utilizará para obtener derivadas de una función de orden mayor que 1.

diff(función, variable, orden)

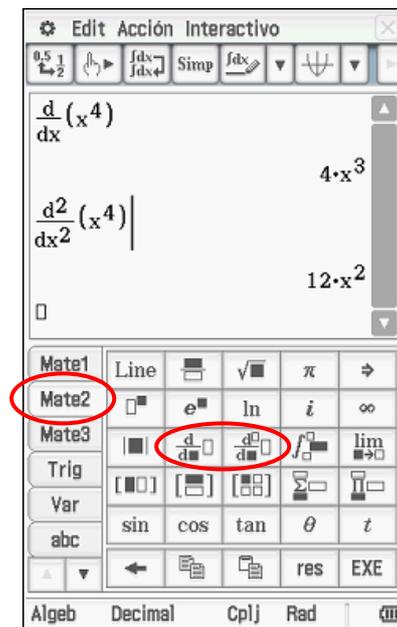


Si se añade un nuevo argumento, se obtendrá el valor de la derivada en el punto indicado:

diff(función, variable, orden, punto)

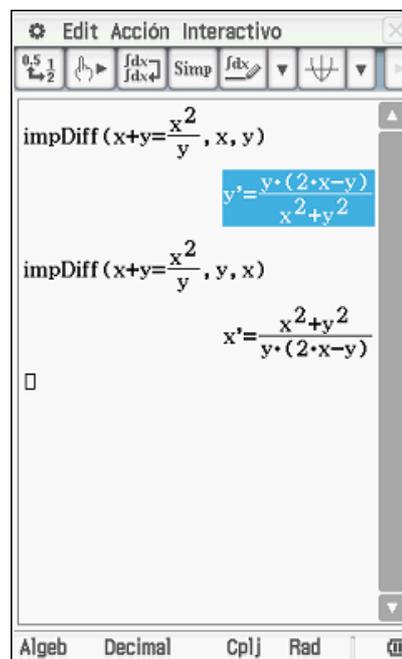


Quizás resulte más sencillo utilizar las opciones que ofrece **CÁLC** el teclado **2D** para escribir la función y argumentos anteriores.



La función **impDiff** permite calcular la diferencial de una ecuación o una expresión implícita con respecto a la variable indicada.

impDiff(expression, variable independiente, variable dependiente)



CÁLCULO INTEGRAL

Tanto para calcular integrales indefinidas como definidas utilizaremos la función

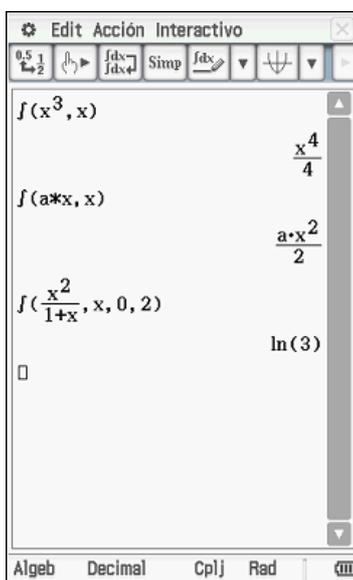
\int cuya sintaxis para calcular una integral indefinida es:

$$\int (\text{función, variable})$$

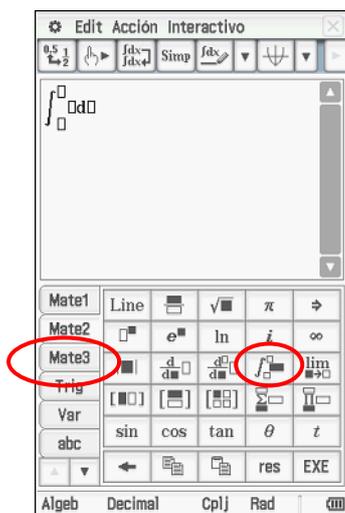
Y para hallar una integral definida sera:

$$\int (\text{función, variable, extremo inferior, extremo superior})$$

Además, se podrá incluir un argumento más para indicar el error admitido al calcular una integral definida.



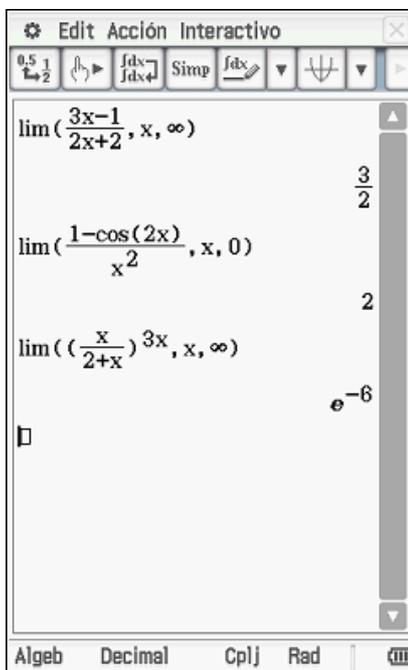
Estas opciones también están disponibles en el teclado **2D**.



CÁLCULO DE LÍMITES

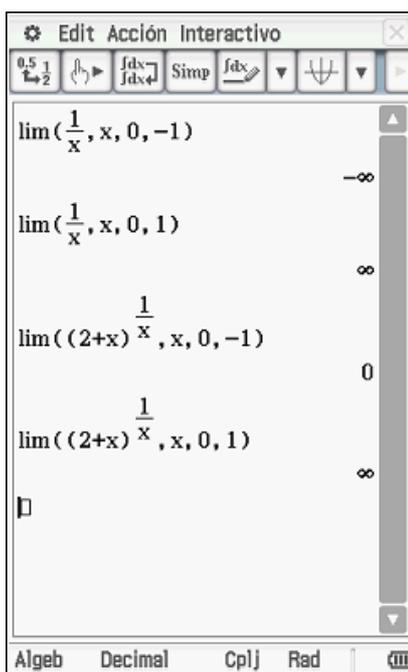
El cálculo de límites se realiza a través de la función **lim** cuya sintaxis es:

$$\mathbf{lim(función, variable, valor)}$$



Para calcular límites laterales se utilizará la función anterior, incluyendo un nuevo argumento (**1** para límite por la derecha y **-1** para límite por la izquierda)

$$\mathbf{lim(función, variable, valor, 1)} \quad \mathbf{lim(función, variable, valor, -1)}$$



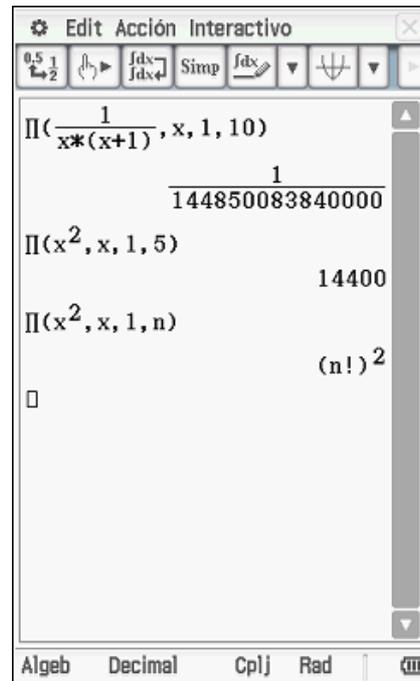
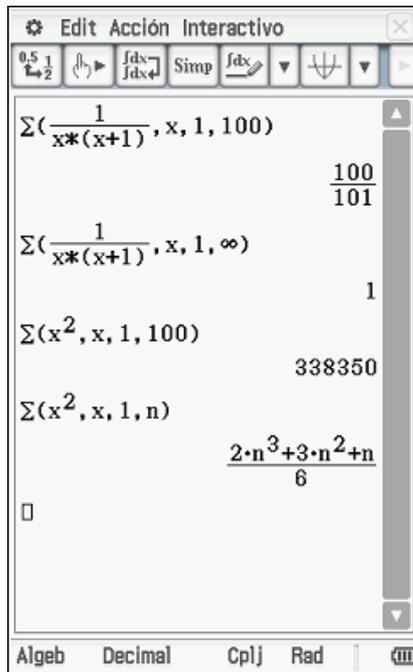
También podemos encontrar esta función en el teclado **2D**.



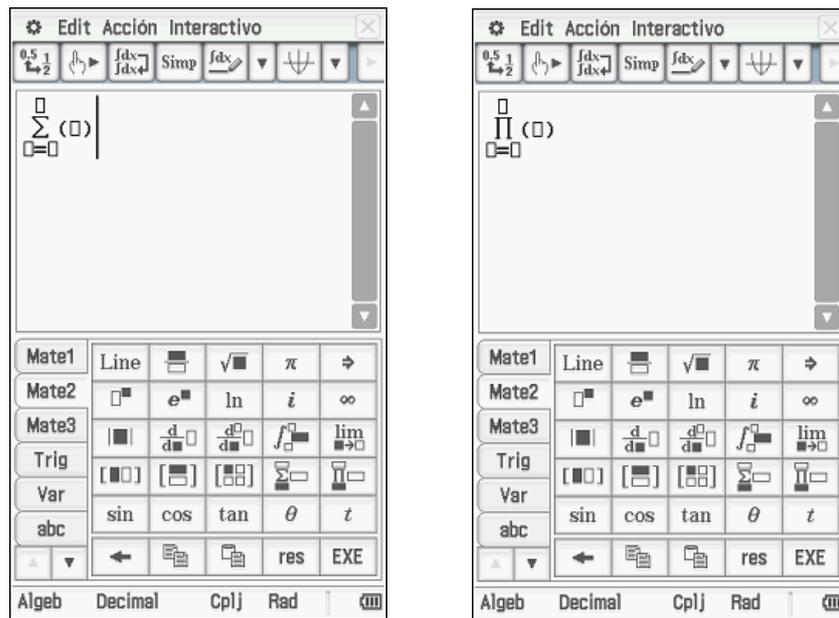
SUMA Y PRODUCTO DE SERIES

Las funciones \sum y \prod se utilizarán para calcular la suma y el producto, respectivamente de una expresión para los valores indicados.

La sintaxis es similar en las dos funciones ya que admiten como argumentos: la expresión de la función, la variable, el valor inicial y el valor final.



También podemos encontrar estas funciones en el teclado **2D**.



OTRAS FUNCIONES DEL MENÚ CÁLCULO

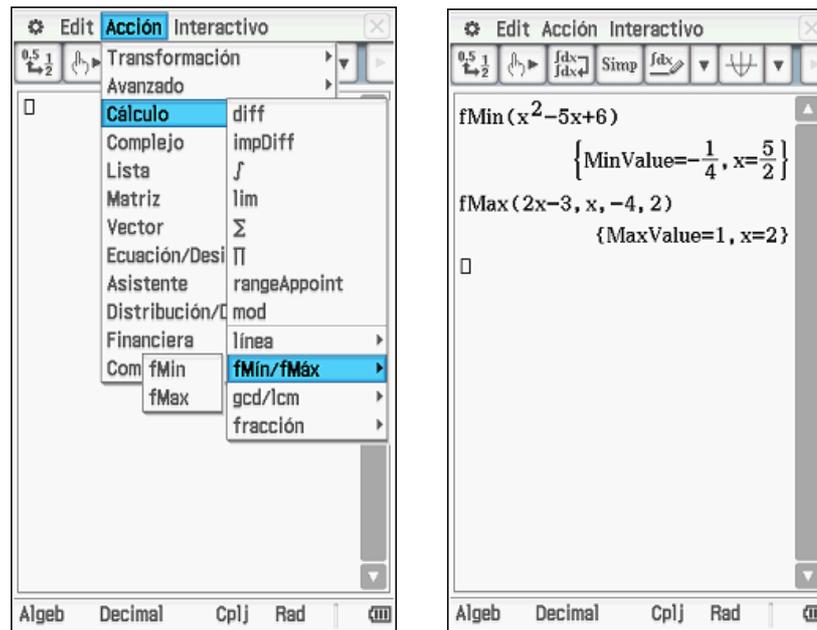
Además, en este menú encontramos las siguientes funciones que relacionamos de manera breve:

- **fMin/fMax**: calculan el mínimo y el máximo, respectivamente de una función en un intervalo.

La sintaxis en ambos casos tiene como argumentos: la función, la variable y los extremos del intervalo.

Si se omiten los valores del intervalo los cálculos se realizarán en $(-\infty, +\infty)$.

Estas funciones admiten como último argumento para determinar la precisión en el cálculo (valor entre 1 y 9).



- **tanLine**: devuelve la expresión de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x=a$.

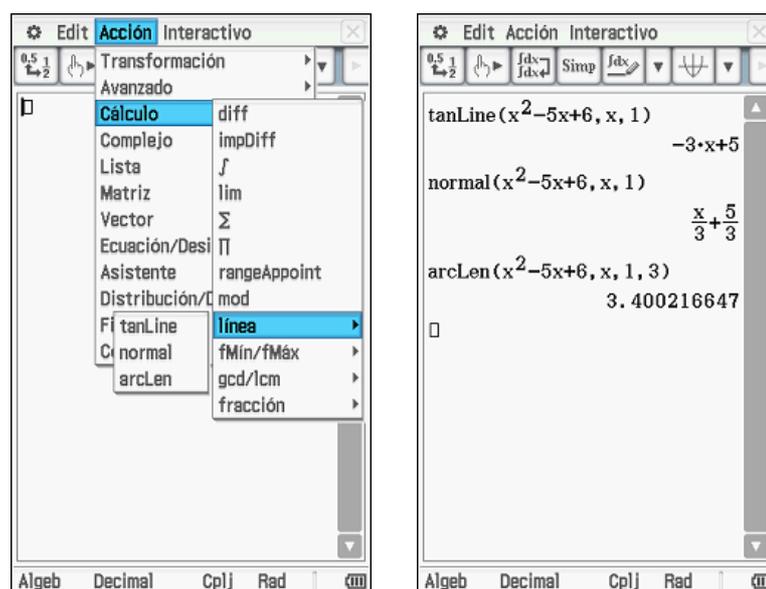
$$\text{tanLine}(f(x), x, a)$$

- **normal**: devuelve la expresión de la recta normal a una función $f(x)$ en un punto $x=a$.

$$\text{normal}(f(x), x, a)$$

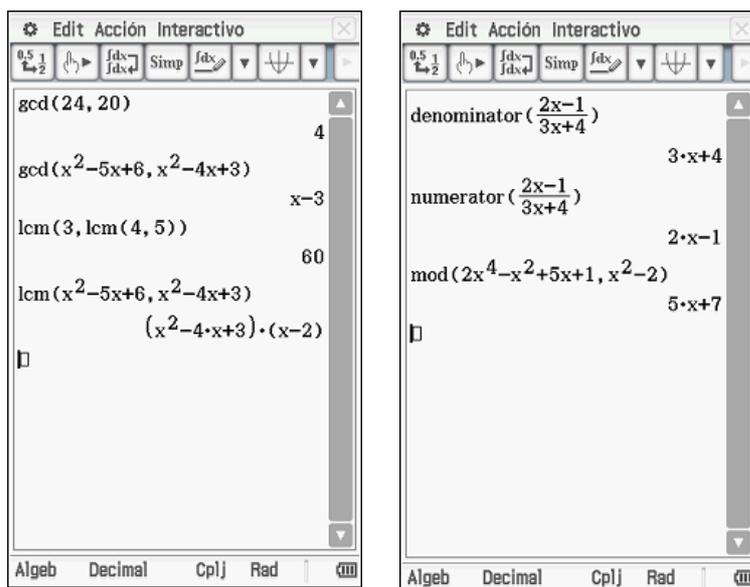
- **arcLen**: halla la longitud del arco de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.

$$\text{arcLen}(f(x), x, a, b)$$



Además se encuentran las siguientes funciones:

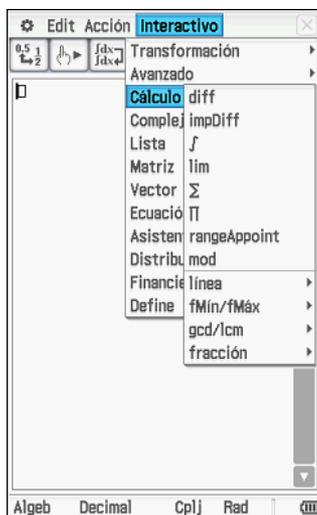
- Las ordenes **gcd/lcm**, hacen el Máximo común divisor o Mínimo común múltiplo de dos números o dos polinomios. Si queremos hacerlo de más de dos expresiones debemos encadenar las ordenes.
- En la pestaña **fracción**, encontramos **denominator/numerator** que nos devuelve el numerador o el denominador de una fracción
- La orden **mod**, nos devuelve el resto de una división



Para terminar, indicaremos que la función **rangeAppoint** devuelve una expresión o valor que satisface las condiciones indicadas en un intervalo [a, b], su sintaxis es:

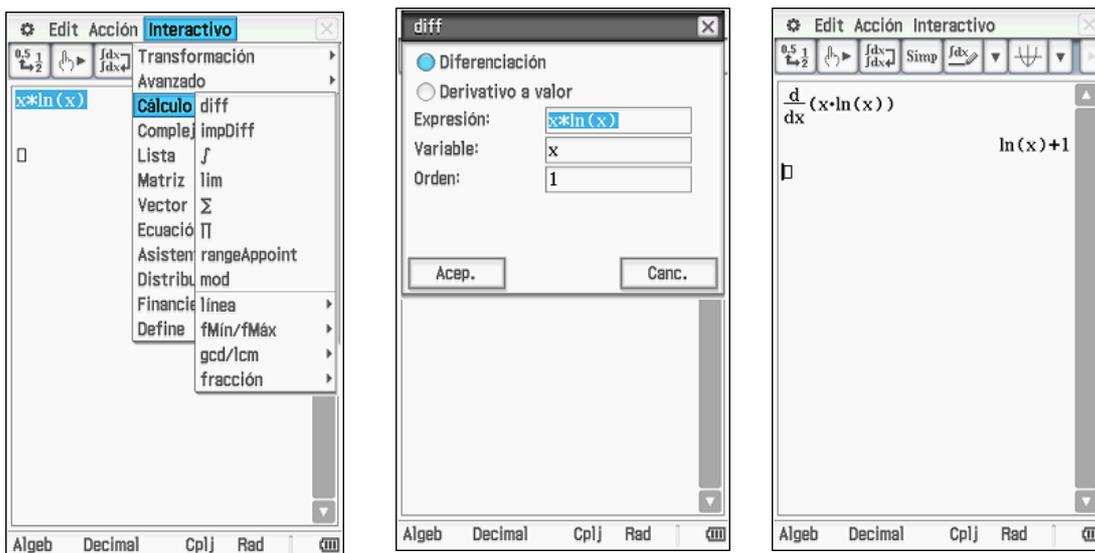
$$\text{rangeAppoint}(\{\text{condición}_1, \text{condición}_2, \dots\}, a, b)$$

En la opción **Interactivo** encontramos un menú con las mismas opciones que han quedado expuestas anteriormente como podemos comprobar en la imagen siguiente:



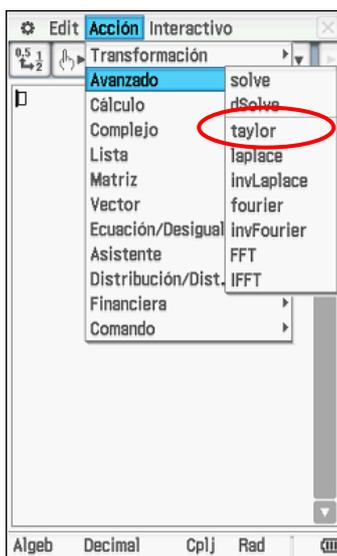
La diferencia de las opciones de este menú con respecto a las que contiene el menú **Acción** radica en que para aplicar una función del menú **Interactivo** previamente es necesario seleccionar la expresión o el valor sobre el que se aplicará.

Por ejemplo para calcular la función derivada de una expresión contenida en el área de trabajo, comenzaremos seleccionando la expresión pulsando a continuación sobre la opción **diff** del menú **Interactivo**.



OPCIONES DEL MENÚ AVANZADO

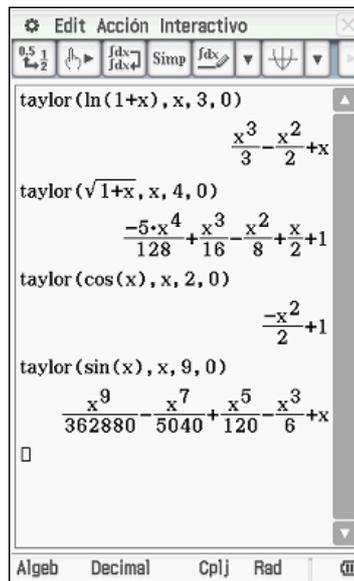
Tanto en menú Acción como en Interactivo encontramos Avanzado que ofrece distintas opciones entre las que encontramos el cálculo de los polinomios de Taylor de una función.



Para hallar los polinomios de Taylor de grado n de una función $f(x)$ con respecto a una variable x en el punto $x=a$, emplearemos la función **taylor**, disponible en el menú **Avanzado**.

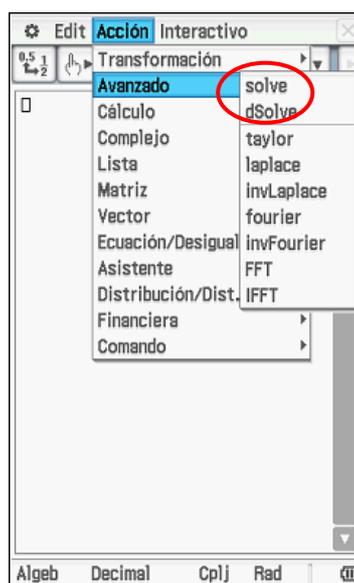
La sintaxis de esta función es:

taylor(f(x), x, n, a)



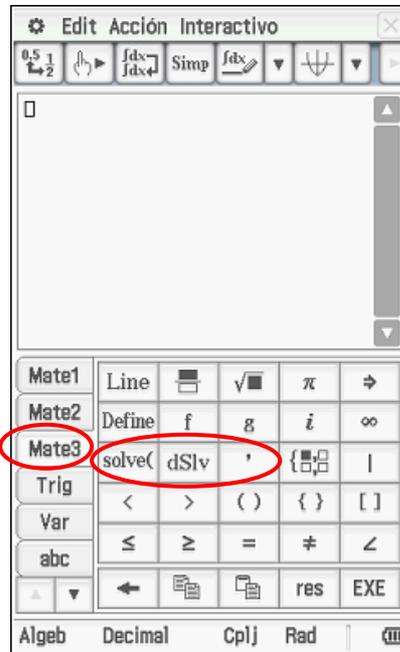
En este menú encontramos opciones ya conocidas como **solve** y también **dSolve** para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

A través de **dSolve** se podrán resolver ecuaciones diferenciales hasta tercer orden y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

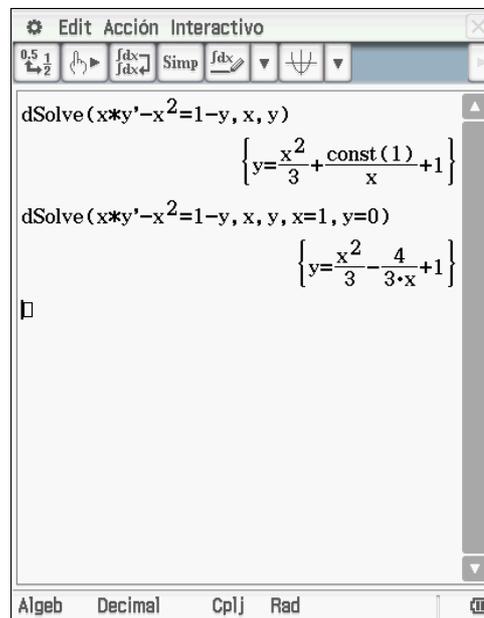


La orden **dSolve** puede utilizarse sin valores iniciales como ocurre en el ejemplo siguiente o introduciendo como argumentos los valores iniciales.

Éstas órdenes así como el símbolo \prime para indicar la derivada también se pueden obtener a partir del teclado **Mate3**



Como por ejemplo:



También, encontramos funciones para obtener la transformada de Laplace o de Fourier así como sus inversas.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Simplifica la expresión: $\frac{1 - \frac{x}{x-1}}{1 + \frac{x}{x-1}}$

2. Calcula: $\frac{1}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x^2-2x}$

3. Simplifica: $\frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{6x^3 - 6x}$

4. Desarrolla la expresión: $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$

5. Determina las raíces enteras de los polinomios:

a. $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

b. $Q(x) = x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$

c. $R(x) = 6x^5 + 25x^4 - 93x^3 - 404x^2 - 48x + 64$

6. Factoriza el polinomio: $P(x) = 2x^5 + 11x^4 + 2x^3 - 51x^2 - 14x + 60$

7. Halla la descomposición en factores primos de 123456 y de 15!

8. Halla las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{\text{sen}x}{1 + \cos x}$

b) $g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

d) $i(x) = 1 + \text{tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

9. Calcula las derivadas f^3 y g^{20}

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$g(x) = x^2 \text{sen}x$$

10. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\begin{array}{ll} \int (x-1) \cos x dx & \text{e) } \int \frac{x^3+1}{x-5} dx \\ \text{b) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx & \text{f) } \int \frac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x} dx \\ \text{c) } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} & \text{g) } \int x^2 \ln x dx \\ \text{d) } \int \frac{2x+3}{x^2+2x+1} dx & \text{h) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx \end{array}$$

11. Halla las siguientes integrales definidas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \\ \text{b) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ \text{c) } \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx \end{array}$$

12. Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+2 \ln x} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}x-1}{\text{sen}4x} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} \end{array}$$

13. Halla los límites cuando x tiende a cero por la derecha y por la izquierda de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$$

14. Halla los polinomios de Taylor de grados 2, 4 y 8 de la función $f(x)$ en $x=0$.

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

15. Hallar la suma de la serie numérica:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$$