EXAMEN DE SELECTIVIDAD JUNIO 2014.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{y}{2} \\ 760x + 370y \leq 94500 \\ y + \dfrac{x}{2} \geq 100 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el máximo de la función $f(x,y) = x + y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Vamos a representar las tres inecuaciones, para ello calculamos sus respectivas tablas de valores:

(1) $x \geq y/2$

x	y
0	**0**
100	**200**

(100,0) → $100 \geq 0$ Sí

(2) $760x + 370y \leq 94500$

x	y
0	**94500 / 370 = 255,41**
94.500 / 760 = 124,34	**0**

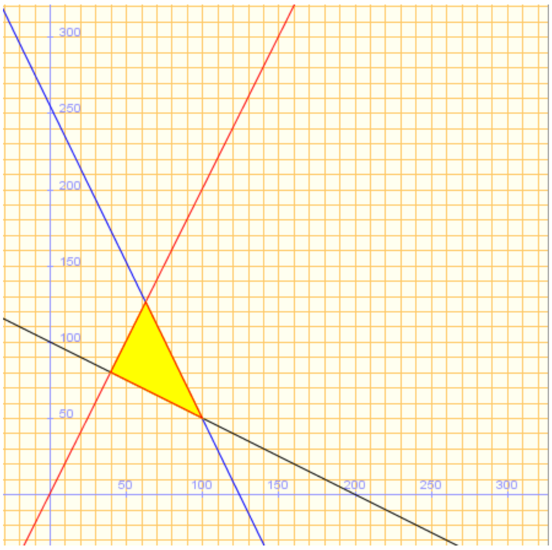
(0,0) → $0 \leq 94500$ Sí

(3) $y + x/2 \geq 100$

x	y
0	**100**
200	**0**

(0,0) → $0 \geq 100$ No

Y la representación gráfica queda:



La región pintada de amarillo son los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones planteado.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes

(1) (2)

$$\text{resolver}\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{y}{2} \\ 760\cdot x+370\cdot y=94500 \end{array}\right. \rightarrow \{\{x=63, y=126\}\}$$

Vértice A = (63, 126)

(2) (3)

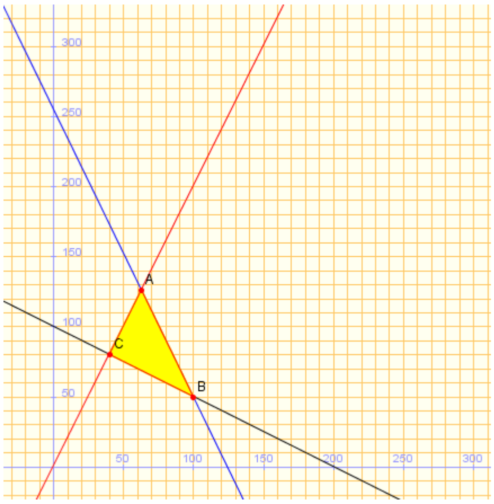
$$\text{resolver}\left\{\begin{array}{l} y+\dfrac{x}{2}=100 \\ 760\cdot x+370\cdot y=94500 \end{array}\right. \rightarrow \{\{x=100, y=50\}\}$$

Vértice B = (100, 50)

(1) (3)

$$\text{resolver}\begin{cases} y+\dfrac{x}{2}=100 \\ x=\dfrac{y}{2} \end{cases} \rightarrow \{\{x=40, y=80\}\}$$

Vértice C = (40, 80)



El máximo de la función f(x,y) se alcanzará en alguno de los extremos de la región acotada.

Calculemos estos valores de la función en los vértices:

Vértice	x	y	f(x,y)=x+y	
A	**63**	**126**	**f(x,y)= 63+126 = 189**	**Máximo**
B	100	50	f(x,y)= 100+50 = 150	
C	40	80	f(x,y)= 40 + 80 = 120	

Solución

Vértice A = (63, 126)

Vértice B = (100, 50)

Vértice C = (40, 80)

El máximo de la función f(x,y) = x + y en esta región es 189 y se alcanza en el punto (63 , 126).

Con WIRIS

dibujar$\left(x=\frac{y}{2},\{color=rojo\}\right) \rightarrow$ tablero1

dibujar$(760\cdot x+370\cdot y=94500,\{color=azul\}) \rightarrow$ tablero1

dibujar$\left(y+\frac{x}{2}=100,\{color=negro\}\right) \rightarrow$ tablero1

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} x=\frac{y}{2} \\ 760\cdot x+370\cdot y=94500 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{x=63,y=126\}\}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} y+\frac{x}{2}=100 \\ 760\cdot x+370\cdot y=94500 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{x=100,y=50\}\}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} y+\frac{x}{2}=100 \\ x=\frac{y}{2} \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{x=40,y=80\}\}$$

dibujar(polígono(punto(63,126),punto(100,50),punto(40,80)),{color=rojo, llenar=cierto,color_relleno=amarillo}) → tablero1

atributos(tablero1,{centro=punto(0,0),anchura=1210.9658,altura=1210.9658,anchura_ventana=446,altura_ventana=446}) → OK

atributos(tablero1,{mostrar_ejes=cierto}) → OK

dibujar(punto(63,126), {color=rojo, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta=A,tamaño_punto=5}) → tablero1

dibujar(punto(100,50), {color=rojo, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta=B,tamaño_punto=5}) → tablero1

dibujar(punto(40,80), {color=rojo, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta=C,tamaño_punto=5}) → tablero1

Problema 2. En una sesión, el valor de una cierta acción, en euros, vino dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x+15 & 0\le x\le 3 \\ x^2-8x+26 & 3<x\le 6 \\ 2x+2 & 6<x\le 8 \end{cases}$$

donde *x* representa el tiempo, en horas, transcurrido desde el inicio de la sesión. Se pide:

a) Estudiar la continuidad de *f* (*x*).

f(x) está definida en el intervalo [0 , 8] mediante tres trozos que son:

-x+15	x^2-8x+26	2x+2

0 3 6 8

En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

$x=3$

1) $\mathrm{f}(3)=-3+15=12$

2) $¿\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x)?$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} x^2-8x+26=3^2-8\cdot 3+26=11$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} -x+15=-3+15=12$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim_{x\to 3^-} f(x)\to \text{No existe} \lim_{x\to 3} f(x) \to \text{En x} =3 \text{ la función no es continua}$$

$x=6$

1) $\mathrm{f}(6)=6^2-8\cdot 6+26=14$

2) $¿\exists \lim\limits_{x\to 6} f(x)?$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+} 2x+2=2\cdot 6+2=14$$

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-} x^2-8x+26=6^2-8\cdot 6+26=14$$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^-} f(x)\to \exists \lim_{x\to 3} f(x)$$

$$\text{Y como en f}(6)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^-} f(x)=14 \to \text{En x}=6 \text{ la función es continua}$$

Entonces, la función es continua en el intervalo [0,8] , menos en el punto {3}. Y en x=3 presenta una discontinuidad de salto finito.

Con WIRIS

Apartado a) Estudiar la continuidad de f(x)

En los intervalos de estudio, al tratarse de funciones polinómicos son continuas.

Por lo tanto, hay que estudiar la continuidad en los puntos de cambio de definición.

$f(x) = -x+15 \rightarrow x \mapsto -x+15$

$g(x) = x^2-8\cdot x+26 \rightarrow x \mapsto x^2-8\cdot x+26$

$h(x) = 2\cdot x+2 \rightarrow x \mapsto 2\cdot x+2$

x=3

$f(3) \rightarrow 12$

$\lim_{x\to 3^+} (x^2-8\cdot x+26) \rightarrow 11$

$\lim_{x\to 3^-} -x+15 \rightarrow 12$

En x=3 la función no es continua

x=6

$g(6) \rightarrow 14$

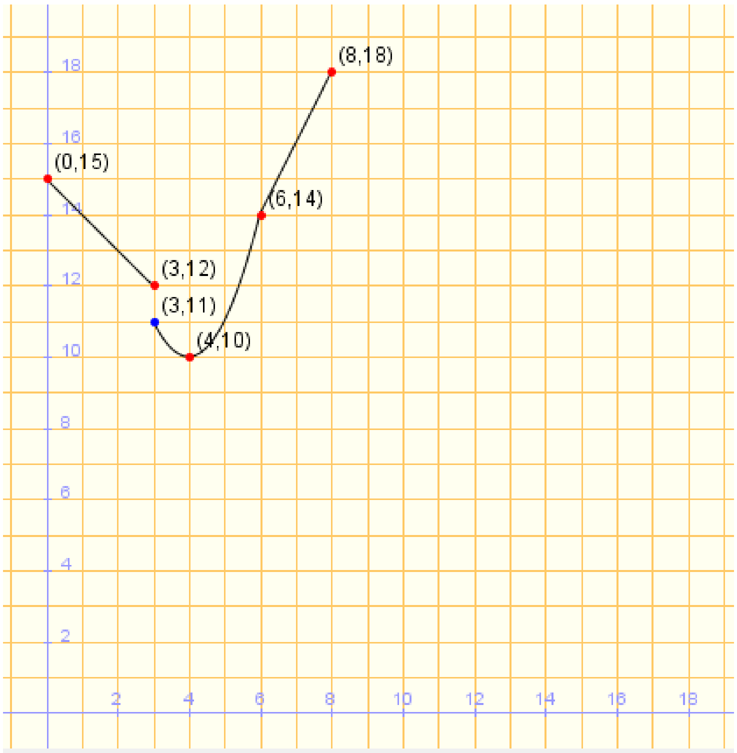
$\lim_{x\to 6^+} (2\cdot x+2) \rightarrow 14$

$\lim_{x\to 6^-} (x^2-8\cdot x+26) \rightarrow 14$

En x=6 la función es continua

b) Calcular el valor máximo y el valor mínimo que alcanzó la acción.

Si realizamos la representación gráfica de la función definida a trozos, es sencillo responder a la pregunta que nos realizan:



Solución

Observamos que el valor máximos se alcanza a las 8 de la tarde, con un valor de 18 €.

Y el valor mínimo a las 4 de la tarde, con un valor de 10 €.

Con WIRIS

Apartado b) Calcular el valor máximo y el valor mínmo que alconzó la función

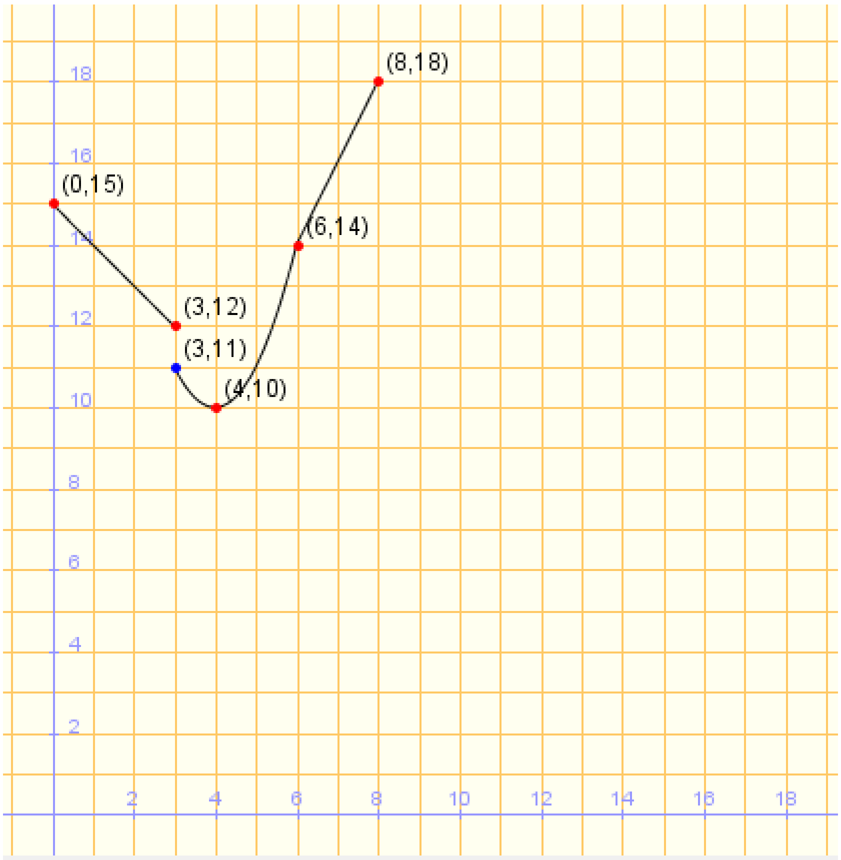
dibujar$(-x+15, 0..3)$ → tablero1
dibujar$(x^2-8\cdot x+26, 3..6)$ → tablero1
dibujar$(2\cdot x+2, 6..8)$ → tablero1
$f(x) = -x+15$ → $x \mapsto -x+15$
$g(x) = x^2-8\cdot x+26$ → $x \mapsto x^2-8\cdot x+26$
$h(x) = 2\cdot x+2$ → $x \mapsto 2\cdot x+2$

$f(0)$ → 15
$f(3)$ → 12
$g(3)$ → 11
$g(6)$ → 14
$h(6)$ → 14
$h(8)$ → 18

dibujar(punto(0,15), {color=rojo, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta="(0,15)",tamaño_punto=5}) → tablero1
dibujar(punto(3,12), {color=rojo, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta="(3,12)",tamaño_punto=5}) → tablero1
dibujar(punto(3,11), {color=azul, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta="(3,11)",tamaño_punto=5}) → tablero1
dibujar(punto(4,10), {color=rojo, mostrar_etiqueta=cierto, etiqueta="(4,10)",tamaño_punto=5}) → tablero1

c) ¿En qué momentos convino comprar u vender para maximizar el beneficio¿ ¿Cuál hubiera sido este?

Si realizamos la representación gráfica de la función definida a trozos, es sencillo responder a la pregunta que nos realizan:



Solución

Observamos que convino comprar a las 4 de la tarde y vender al cierre de la sesión para maximizar el beneficio, que resulta en 18-8 = 10 €.

Problema 3. Una factoría dispone de tres máquinas para fabricar una misma pieza. La más Antigua fabrica 1000 unidades al día, de las que el 2% son defectuosas. La segunda máquina más antigua, 3000 unidades al día, de las que el 1,5% son defectuosas. La más moderna fabrica 4000 unidades al día, con el 0,5% defectuosas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosas?

Definimos los sucesos:

A = la pieza ha sido fabricada por la máquina más antigua

B = la pieza ha sido fabricada por la segunda máquina más antigua

C = la pieza ha sido fabricada por la máquina más moderna

D = la pieza es defectuosa

ND = la pieza no es defectuosa

Y construyendo un diagrama de árbol:

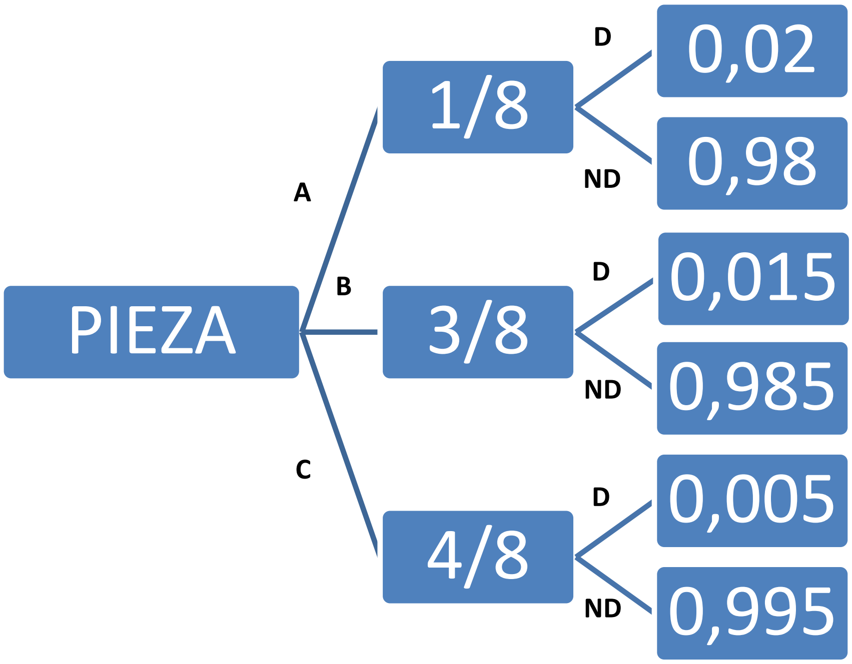
Total de piezas = 1000 + 3000 + 4000 = 8000 piezas

P(A) = 1000/8000 = 1/8

P(B)= 3000/8000 = 3/8

P(C)= 4000/8000 = 4/8

<u>DIAGRAMA DE ÁRBOL</u>



$$P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C) = \frac{1}{8}\cdot 0{,}02 + \frac{3}{8}\cdot 0{,}015 + \frac{4}{8}\cdot 0{,}005 \approx 0{,}0106$$

b) Si una pieza elegida al azar es defectuosas, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina más Antigua?

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{D}) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{8}\cdot 0{,}02}{0{,}0106} \approx 0{,}2353$$

c) Sabiendo que una pieza elegida al azar no es defectuosas, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la máquina más moderna?

$$P(\overline{\mathrm{C}}/\overline{\mathrm{D}}) = P(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{D}}) + P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{D}}) = \frac{P(A\cap\overline{\mathrm{D}})}{P(\overline{\mathrm{D}})} + \frac{P(B\cap\overline{\mathrm{D}})}{P(\overline{\mathrm{D}})} = \frac{\frac{1}{8}\cdot 0{,}98}{1-0{,}0106} = \frac{\frac{3}{8}\cdot 0{,}985}{1-0{,}0106} \approx 0{,}4972$$

Con WIRIS

Problema 3.
Apartado a) P(Defectuosa)
Se sabe que Fabrica A produce 1000 piezas, B 3000 piezas, C 4000 piezas--> Total 8000 piezas

$PA=\frac{1000}{8000} \rightarrow \frac{1}{8}$

$PB=\frac{3000}{8000} \rightarrow \frac{3}{8}$

$PC=\frac{4000}{8000} \rightarrow \frac{1}{2}$

$PDA=\frac{2}{100} \rightarrow \frac{1}{50}$

$PNDA=\frac{98}{100} \rightarrow \frac{49}{50}$

$PDB=\frac{1.5}{100} \rightarrow 0.015$

PNDB=98.5/100 → 0.985

PDC=0.5/100 → 0.005

PNDC=99.5/100 → 0.995

PD=PA·PDA+PB·PDB+PC·PDC → 0.010625

b)P(A/D)

P(A/D) = (PA·PDA)/PD → $\frac{A}{D} \mapsto 0.23529$

c) P(NC/ND)=P(A/ND)+P(B/ND)

P(NC/ND)= (PA·PNDA)/(1−PD)+(PB·PNDB)/(1−PD) → $\frac{NC}{ND} \mapsto 0.49716$

OPCIÓN B

Problema 1. Después de aplicar un descuento del 10% a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, una cuaderno y una carpeta 3,96 €. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula el precio original de cada objeto.

Planteamiento

x = precio original del rotulador. y = precio original del cuaderno. z = precio original de la carpeta.	Si se aplica un descuento del 10%, los precios quedan: 0,9x = precio original del rotulador. 0,9 y = precio original del cuaderno. 0,9 z = precio original de la carpeta.

De los datos del problema obtenemos:

El importe de la compra rebajado fue de 3,96 € → **0,9x + 0,9y + 0,9 z = 3,96**

El precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador→ **y = x/2**

El precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del rotulador → **z = y + 0,20x**

$$\begin{cases} 0{,}9\cdot x+0{,}9\cdot y+0{,}9\cdot z=3{,}96 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+0{,}2\cdot x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0{,}9\cdot x+0{,}9\cdot y+0{,}9\cdot z=3{,}96 \\ x-2y=0 \\ 0{,}2\cdot x+y-z=0 \end{cases}$$

Despejeando $x=2y$, nos queda un sistema con dos incógnitas y dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 1{,}8y+0{,}9y+0{,}9z=3{,}96 \\ 0{,}4y+y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2{,}7y+0{,}9z=3{,}96 \\ 1{,}40y-z=0 \end{cases}$$

Ahora : $z=1{,}40y$

$$2{,}7y+0{,}9\cdot 1{,}40z=3{,}96 \rightarrow 2{,}7y+1{,}26z=3{,}96 \rightarrow 3{,}96y=3{,}96 \rightarrow y=1$$

$$y=1$$
$$z=1{,}40\cdot 1=1{,}40$$
$$x=2y=2\cdot 1=2$$

Solución

El precio del rotulador es de 2 €, el del cuaderno 1€ y el de la carpeta 1,40 €.

Con WIRIS

OPCION B

Problema 1.

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix} 0.9\cdot x+0.9\cdot y+0.9\cdot z=3.96 \\ -0.5\cdot x+y=0 \\ 0.2\cdot x+y-z=0 \end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{x=2.,y=1.,z=1.4\}\}$$

Problema 2. Dada la función $f(x)=(x-1)^2(x+2)^2$ **se pide:**

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$domf(x)=\Re$, por tratarse de un función polinómica.

Cortes con los ejes :

EJE X $(\mathrm{f}(\mathrm{x})=y=0)$

$$0=(\mathrm{x}-1)^2(x+2)^2 \rightarrow \begin{cases} (\mathrm{x}-1)^2=0 \rightarrow x=1 \\ (x+2)^2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$(1,0)$

$(-2,0)$

EJE Y $(\mathrm{x}=0)$

$\mathrm{f}(0)=(0-1)^2(0+2)^2=1\cdot 4=4$

$(0,4)$

Con WIRIS

Problema 2.

Dad la función $f(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)^2$

a) Su dominio y puntos de corte con los ejers coordenados.

$f(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)^2 \rightarrow x\mapsto x^4+2\cdot x^3-3\cdot x^2-4\cdot x+4$

dominio $f(x) \rightarrow \mathbb{R}$

CORTES CON EL EJE X (y=0)

resolver$(0=(x-1)^2\cdot(x+2)^2) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=1\}\}$

CORTES CON EL EJE Y (x=0)

$f(0) \rightarrow 4$

EJE X --> (−2,0) (1,0)

EJE Y --> (4,0)

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para obtener los intervalos de crecimiento hay que igualar a cero la primera derivada.

$$f'(x) = 2\cdot(x-1)(x+2)^2 + (x-1)^2 2\cdot(x+2) = 2\cdot(x-1)(x^2+4x+4) + (x^2-2x+1)2\cdot(x+2) =$$
$$= 2x^3 + 8x^2 + 8x - 2x^2 - 8x - 8 + 2x^3 - 4x^2 + 2x + 4x^2 - 8x + 4 =$$
$$= 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$$
$$f'(x) = 0$$
$$4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \\ x = \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

	4	6	-6	-4	div(-4) = +-1, +-2, +-4
1		4	10	4	
	4	10	4	0	div(4) = +-1, +-2, +-4
-2		**-8**	**-4**		
	4	2	0		
-1/2		-2			
	4	0			

		- 2	**-1/2**	**1**
f(x)	↘	↗	↘	↗
f'(x)	**f'(-3)=-40 <0**	**f'(-1)= 4>0**	**f'(0)=-4<0**	**f'(2)= 40 >0**

Mínimo **Máximo** **Mínimo**

I.decrecimiento : (-∞,-3) U (-1/2, 1)

I.crecimiento: (-2,-1/2) U (1, +∞)

Con WIRIS

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$f(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)^2 \rightarrow x\mapsto x^4+2\cdot x^3-3\cdot x^2-4\cdot x+4$

$f'(x) \rightarrow 4\cdot x^3+6\cdot x^2-6\cdot x-4$

$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

$f'(-3) \rightarrow -40$

$f'(-1) \rightarrow 4$

$f'(0) \rightarrow -4$

$f'(2) \rightarrow 40$

I.decrecimiento : (-∞,-3) U (-1/2, 1)

I.crecimiento: (-2,-1/2) U (1, +∞)

c) Máximos y mínimos locales.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6$$

$$f''(-2) = 18$$
$$f''(-1/2) = -9$$
$$f''(1) = 18$$

En x= -2 hay un mínimo

f(-2) = 0

Mínimo = (-2, 0)

En x= -1/2 hay un máximo

f(-1/2)= 81/16

Máximo = (-1/2, 81/16)

En x= 1 hay un mínimo

f(1)= 0

Mínimo = (1, 0)

Con WIRIS

Imprimir

c) Máximos y mínimos locales.

$f(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)^2 \rightarrow x\mapsto x^4+2\cdot x^3-3\cdot x^2-4\cdot x+4$

$f'(x) \rightarrow 4\cdot x^3+6\cdot x^2-6\cdot x-4$

$f''(x) \rightarrow 12\cdot x^2+12\cdot x-6$

$f''(-2) \rightarrow 18$

$f''(-\frac{1}{2}) \rightarrow -9$

$f''(1) \rightarrow 18$

$f(-2) \rightarrow 0$

$f(-\frac{1}{2}) \rightarrow \frac{81}{16}$

$f(1) \rightarrow 0$

Mínimo= (−2, 0)
Mínimo = (1, 0)
Máximo = (−1/2, 81/16)

d) El valor de la integral definida de f(x) entre x= -1 y x = 1.

$$(x-1)^2(x+2)^2 = (x^2-2x+1)(x^2+4x+4) = x^4+4x^3+4x^2-2x^3-8x^2-8x+x^2+4x+4 =$$
$$= x^4+2x^3-3x^2-4x+4$$

$$\int_{-1}^{1}(x-1)^2(x+2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4+2x^3-3x^2-4x+4dx = \left.\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}-x^3-2x^2+4x\right|_{-1}^{1} = 0$$

Con WIRIS

d) El valor de la integral definida de f(x) entre $x=-1$ y $x=1$

$f(x)=(x-1)^2\cdot(x+2)^2 \rightarrow x\mapsto x^4+2\cdot x^3-3\cdot x^2-4\cdot x+4$

$\int (x-1)^2\cdot(x+2)^2 \rightarrow \frac{1}{5}\cdot x^5+\frac{1}{2}\cdot x^4-x^3-2\cdot x^2+4\cdot x$

$\int_{1}^{1} f(x) \rightarrow 0$

Problema 3. En una empresa el 30% de los trabajadores son técnicos informáticos y el 20% son técnicos electrónicos, mientras que un 10% tienen las dos especialidades.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de dicha empresa seleccionada al aza sea técnico informático o electrónico.

Utilizando una tabla de doble nos queda:

	I	NI	
E	10	10	**20**
NE	20	60	**80**
	30	**70**	**100**

$$P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

b) Si seleccionamos al aza a un técnico electrónico, ¿Cuál es la probabilidad de que sea también técnico informático?

$$P(I / E) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$P(I / E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = \frac{10}{100} : \frac{20}{100} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

c) Si seleccionamos un trabajador al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un técnico que tienen solo una de las dos especialidades?

$$P(\text{sólo 1 especialidad}) = P(I \cap NE) + P(E \cap NI) = \frac{20}{100} + \frac{10}{100} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Con WIRIS

Problema 3.
I = Informático
E=Electrónico

$PE=20/100 \rightarrow \frac{1}{5}$

$PI=30/100 \rightarrow \frac{3}{10}$

$PIyE=10/100 \rightarrow \frac{1}{10}$

$PINE=20/100 \rightarrow \frac{1}{5}$

$PENI=10/100 \rightarrow \frac{1}{10}$

$PIsabiendoE=PIyE/PE \rightarrow \frac{1}{2}$

$P(NE)=1-PE \rightarrow NE \mapsto \frac{4}{5}$

a) P(IUE)

$PIUE=PE+PI-PIyE \rightarrow \frac{2}{5}$

b)P(I/E)

$PIsabiendoE=PIyE/PE \rightarrow \frac{1}{2}$

c) P(Solo1)=

$Psolo1=PINE+PENI \rightarrow \frac{3}{10}$