DERIVADAS

Actividad

Dada la función

$$f(x) = \frac{x+h}{x-h}$$

halla para qué valores de *h* se cumple que la función tiene la función derivada igual a –2 en el punto $x = 0$.

Solución

En primer lugar calculamos la derivada de la función respecto de x y tenemos:

$$f'(x) = \frac{x-h-(x+h)}{(x-h)^2} = \frac{-2h}{(x-h)^2}$$

Ha de cumplirse que:

$f'(0) = -2$

Así pues:

$$\frac{-2h}{(0-h)^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-2h}{h^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad h = 1$$

Actividad

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución

La ecuación de la recta tangente en x = 3 será:

$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

Calculamos:

$f(3) : f(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 1 = 10$

Calculamos:

$f'(3) : f'(x) = 6x^2 - 10x;$
$f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 = 24$

Sustituimos los valores hallados para obtener la ecuación de la recta tangente:

$y - 10 = 24(x - 3) \Leftrightarrow y = 24\,x - 62$

Actividad

Halla un punto de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ cuya tangente sea paralela a la recta $y = 3x + 7$.

Solución

La pendiente en este punto debe ser la misma que la pendiente de la recta $y = 3x + 7$, es decir 3.
Así, debemos buscar el punto $(x, f(x))$ y $f'(x) = 3$.
$f'(x) = 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$
Calculemos $f(1) : f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$.
Luego el punto buscado es (1, 3).

Actividad

Dada la parábola de ecuación $y = 2x^2 - x + 3$, comprueba que la cuerda que une los puntos de dicha parábola, de abscisas x_1 y x_2, siendo $x_1 \neq x_2$, es paralela a la tangente a dicha parábola en el punto de abscisa

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

Solución

Si y = f(x) = $2x^2$ – x + 3 entonces la derivada de esta función en el punto

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2}$$

será la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto. Por lo tanto:

f'(x) = 4 x – 1

$$f'\left(\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right) = 4\left(\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right) - 1 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

La pendiente de la cuerda que une los puntos de la parábola, de abscisas x_1 y x_2 es la tasa de variación media de la función en el intervalo [x_1 y x_2]. El punto de la parábola de abscisa x_1 es

$$(x_1, 2x_1^2 - x_1 + 3)$$

y el de abscisa x_2 es

$$(x_2, 2x_2^2 - x_2 + 3)$$

por lo tanto:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{(2x_2^2 - x_2 + 3) - (2x_1^2 - x_1 + 3)}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{2x_2^2 - 2x_1^2}{x_2 - x_1} - \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} - 1 =$$
$$= 2(x_1 + x_2) - 1$$

Así queda comprobado que las dos rectas, cuerda y tangente al tener la misma pendiente, son paralelas.

Actividad

¿Para qué valor de *m*, la recta tangente a la función

$$f(x) = \frac{mx + 1}{2x + m}$$

en el punto de abscisa $x = 1$, tiene pendiente –1?

Solución

En x = 1 el valor de la derivada de la función debe ser el mismo que el de la pendiente, es decir – 1. Calculamos f':

$$f'(x) = \frac{(mx+1)' \cdot (2x+m) - (2x+m)' \cdot (mx+1)}{(2x+m)^2} =$$

$$= \frac{m \cdot (2x+m) - 2(mx+1)}{(2x+m)^2} =$$

$$= \frac{2mx + m^2 - 2mx - 2}{(2x+m)^2} = \frac{m^2-2}{(2x+m)^2}$$

Así pues: $f'(1) = \frac{m^2-2}{(2+m)^2} = -1$

Por tanto, el valor de m para que dicha pendiente sea –1 es:

$m^2 - 2 = -(m^2 + 4m + m) \Rightarrow 2m^2 + 4m + 4 = 0$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = -1$$

Actividad

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{x}{5}$

b) $g(x) = 3x^2 \cdot e^x$

c) $h(x) = 7x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \ln x$

d) $i(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$

e) $j(x) = e^{2x} \cos^3 2x$

f) $k(x) = (1 + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}^2 x)^4$

g) $l(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

h) $m(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$

Solución

a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{x}{5}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' + \left(\frac{x}{5}\right)' = \frac{-2}{x^3} + \frac{1}{5} = \frac{x^3 - 10}{5x^3}$$

b) $g(x) = 3x^2 \cdot e^x$

$g'(x) = (3x^2)' e^x + 3x^2 (e^x)' = 6x e^x + 3 x^2 e^x = 3x e^x (2 + x)$

c) $h(x) = 7x \cdot \operatorname{sen}x \cdot \ln x$

$$h'(x) = (7x\ \text{sen}\,x)' \cdot \ln x + 7x\ \text{sen}\,x \cdot (\ln x)' =$$
$$= (7\,\text{sen}\,x + 7x\cos x)\cdot \ln x + 7x\ \text{sen}\,x \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= 7(\ln x\ \text{sen}\,x + x\ln x\cos x + \text{sen}\,x)$$

d) $i(x) = \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

$$i'(x) = \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)'\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)-\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)'}{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)-\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\left(-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}}{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2} =$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}-6x+3x\sqrt[3]{x}}$$

e) $j(x) = e^{2x} \cdot \cos^3 2x$

$$j'(x) = (e^{2x})\cdot\cos^3 2x + e^{2x}\cdot(\cos^3 2x)' =$$
$$= 2e^{2x}\cdot\cos^3 2x + e^{2x}\cdot 3\cos^2 2x\cdot 2\cdot \text{sen}\,x =$$
$$= 2e^{2x}\cdot\cos^3 2x + 6\cdot e^2\cos^2 2x\cdot \text{sen}\,x =$$
$$= 2e^{2x}\cdot\cos^2 2x(\cos 2x + 3\,\text{sen}\,x) =$$

f) $k(x) = (1 + \text{sen } 2x + \text{sen}^2 x)^4$
$k'(x) = 4 \cdot(1 + \text{sen } 2x + \text{sen}^2 x)^3 \cdot(\cos 2x \cdot 2 + 2\ \text{sen}x \cos x) = 8 \cdot(1 + \text{sen } 2x + \text{sen}^2 x)^3 \cdot (\cos 2x + \text{sen } x \cos x)$

g) $l(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

$$l'(x) = \frac{(1+\cos 2x)' \cdot (1-\cos 2x) - (1+\cos 2x) \cdot (1-\cos 2x)'}{(1-\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{-2\,\text{sen}\,2x \cdot (1-\cos 2x) - (1+\cos 2x) \cdot (2\,\text{sen}\,2x)}{(1-\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{-2\,\text{sen}\,2x + 2\,\text{sen}\,2x\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x - 2\,\text{sen}\,2x\cos 2x}{(1-\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{-4\,\text{sen}\,2x}{(1-\cos 2x)^2}$$

h) $m(x) = \sqrt[3]{\text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$

$$m'(x) = \left(\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}\right)' + \left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)'$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}}\cos x - \frac{3}{\cos^4 x}(-\,\text{sen}\,x) =$$

$$= \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}} + \frac{3\,\text{sen}\,x}{\cos^4 x}$$

Actividad

La evolución de cierta población de insectos sigue esta función:

$$N(t) = 2\left(1 + \frac{4t}{t^2+4}\right)$$

donde *N* es el número de insectos expresado en centenares de individuos y *t* es el tiempo expresado en meses.

a) Calcula la tasa de variación media de los dos primeros meses.
b) Compara la tasa de variación de la evolución entre el cuarto y el sexto mes, y entre el segundo y el cuarto mes.
—¿Qué conclusiones puedes extraer acerca de la evolución de la población en los 6 primeros meses?

Solución

a) Calculamos los valores t = 0 y t = 2:

$$N(0) = 2\left(1 + \frac{4 \cdot 0}{0^2 + 4}\right) = 2$$

$$N(2) = 2\left(1 + \frac{4 \cdot 2}{2^2 + 4}\right) = 4$$

$$TVM[0, 2] = \frac{N(2) - N(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

b) Calculamos los valores de N(x)

$$N(2) = 2\left(1 + \frac{4 \cdot 2}{2^2 + 4}\right) = 4$$

$$N(4) = 2\left(1 + \frac{4 \cdot 4}{4^2 + 4}\right) = 3,6$$

$$N(6) = 2\left(1 + \frac{4 \cdot 6}{6^2 + 4}\right) = 3,2$$

Las tasas de variación media son:

$$TVM[2, 4] = \frac{3,6 - 4}{4 - 2} = -0,2$$

$$TVM[4, 6] = \frac{3,2 - 3,6}{6 - 4} = -0,2$$

— En los dos primeros meses la población aumenta con una TVM de 1, mientras que en los cuatro meses siguientes la población decrece con una TVM de –0,2.

Actividad

La curva que representa una función polinómica *f* de segundo grado tiene una tangente de pendiente 4 en el punto de abscisa $x = 1$. La tangente en el punto de abscisa 3 tiene pendiente 8. Si sabemos además que la función pasa por el punto (0, 3), determina la expresión analítica de *f*.

Solución

Si f(x) es una función de segundo grado, tiene la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Si f pasa por el punto (0, 3), se cumple:

$3 = f(0) = 0 + c \Rightarrow c = 3$

La función derivada de f es:

$f'(x) = 2\,ax + b$

Imponemos que las pendientes de las rectas tangentes en x = 1 y x = 3 valgan 4 y 8, respectivamente:

$$\begin{cases} 4 = f'(1) = 2a + b \\ 8 = f'(3) = 6a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2a + b \\ 8 = 6a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Por tanto:

$f(x) = x^2 + 2x + 3$

Actividad

Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$ en $x = 2$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = -3$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$ en $x = 0$

d) $i(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ en $x = 0$

e) $j(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 11)^2}$ en $x = 2$

Solución

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$ en $x = 2$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x + 2) - (x^2 - 3x + 2)}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 8}{(x + 2)^2}$$

$$f(2) = \frac{2^2 + 4 \cdot 2 - 8}{(2 + 2)^2} = \frac{1}{4}$$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = -3$

$$f'(x) = \frac{1}{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x}$$

$$f'(-3) = \frac{1}{3}$$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$ en $x = 0$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 - 1)e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2 + 1}{e^x}$$

$$f'(0) = 1$$

d) $i(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ en $x = 0$

$$i'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'(1 + \cos x) - (1 -}{(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - (-s}{(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$i'(0) = \frac{\cos 0 + 1}{(1 + \cos 0)^2} = \frac{1 + 1}{(1 + 1)^2} =$$

e) $j(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 11)^2}$ en x =

$$j'(x) = \left(\sqrt[3]{(2x^3 + 11)^2}\right)' = ($$

$$= \frac{2}{3}(2x^3 + 11)^{-\frac{1}{3}} \cdot 6x$$

$$= \frac{4x^2}{\sqrt[3]{2x^3 + 11}}$$

$$j'(2) = \frac{4 \cdot 2^2}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^3 + 11}} = \frac{16}{\sqrt[3]{27}}$$

Actividad

Estudia los puntos donde se anula *f'*, siendo

$$f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 9}$$

Solución

Calculamos f':

$$f(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 9 - 2x(x - 5)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-x^2 + 10x - 9}{(x^2 - 9)^2}$$

Buscamos los ceros de f':

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

Actividad

Halla la derivada segunda de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{2x^2}{4} + x + 5$

$b)\ g(x) = (2x^2 + 5)^3$

$c)\ h(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x}$

$d)\ i(x) = \sqrt{x + 3}$

$e)\ j(x) = 5 \operatorname{sen} t^2$

$f)\ k(x) = 3x \ln(x + 2)$

Solución

a)

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{2x^2}{4} + x + 5$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{6} + \frac{4x}{4} + 1 = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$f''(x) = \frac{2x}{2} + 1 = x + 1$$

b)

$$g(x) = (2x^2 + 5)^3$$

$$g'(x) = 3(2x^2 + 5)^2 \cdot (4x) = 12x(2x^2 + 5)^2$$

$$g''(x) = 12(2x^2 + 5)^2 + 12x \cdot 2(2x^2 + 5) \cdot (4x)$$

$$= 12(2x^2 + 5) \cdot (10x^2 + 5)$$

c)

$$h(x) = \frac{5x^2 + 1}{x}$$

$$h'(x) = \frac{10x \cdot x - (5x^2 + 1)}{x^2} = \frac{5x^2 - 1}{x^2}$$

$$h''(x) = \frac{10x \cdot x^2 - (5x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

d)

$$i(x) = \sqrt{x + 3}$$

$$i'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}} = $$

$$i''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot (x +$$

e)

$$j(x) = 5 \operatorname{sen} t^2$$

$$j'(x) = 5 \cos t^2 \cdot$$

$$j''(x) = 10 \cos t^2$$

$$= 10 \cos t^2 + 20t$$

f)

$$k(x) = 3x \ln(x + 2)$$

$$k'(x) = 3 \ln(x + 2) +$$

$$k''(x) = \frac{3}{x + 2} + $$

$$= \frac{3}{x + 2} + \frac{6}{(x + 2)^2}$$

Actividad

Considera las funciones:

$$f(x) = \ln(3x^2 - 2)\ ;\ g(x) = \frac{x^3 - 19}{x + 1}$$

$$h(x) = \sqrt{8x^3 - 4}\ ;\ v(t) = t^7 e^{-(t-1)}$$

Calcula $f'(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$ y $v'(1)$.

Solución

Calculamos las funciones derivadas y hallamos su valor para x = 1:

$$f(x) = \ln(3x^2 - 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{6}{3 - 2} = 6$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 19}{x + 1}$$

$$g'(x) = \frac{3x^2(x + 1) - 1 \cdot (x^3 - 19)}{(x + 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(1) = \frac{3 \cdot 2 - 1 + 19}{2^2} = 6$$

$$h(x) = \sqrt{8x^3 - 4}$$

$$h'(x) = \frac{24x^2}{2\sqrt{8x^3 - 4}} = \frac{12x^2}{\sqrt{8x^3 - 4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(1) = \frac{12}{\sqrt{8 - 4}} = 6$$

$$v(t) = t^7 e^{-(t-1)}$$

$$v'(t) = 7\,t^6 e^{-(t-1)} + t^7 e^{-(t-1)}\,(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'(1) = 7\,e^0 + 1\,e^0\,(-1) = 6$$

Aplicación de las derivadas

Utilizar el cálculo de derivadas para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función, para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social y extraer conclusiones del fenómeno analizado.

Dificultad no definida

Actividad

Tras la ingestión de una bebida alcohólica, la concentración de alcohol en la sangre (en $g \cdot L^{-1}$) evoluciona según la función:

$C(t) = k \cdot t \cdot e^{1-t}$, en $g \cdot L^{-1}$ ($k > 0$)

donde t es el tiempo, en horas, transcurrido desde el instante de la ingestión y k es un factor de corrección que depende del volumen ingerido, la masa corporal...
Calcula el momento en el que se alcanzará la concentración máxima y cuánto valdrá ésta.

Solución

Para hallar la concentración máxima, calculamos C'(t) y la igualamos a cero.

$C'(t) = k \cdot e^{1-t} \cdot (1 - t)$
$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Comprobamos si se trata de un máximo con la segunda derivada:

$C''(t) = k \cdot e^{1-t}\,(t - 2)$
$C''(t) = -k\,e^0 = -k < 0 \Rightarrow$ es un máximo

La concentración en t = 1 será C(1) = k g/l.
Por tanto, la máxima concentración se producirá pasada 1 h y será de k g/l.
Actividad

El número de unidades de un cierto artículo fabricadas cada mes, *x*, influye en el precio en euros de cada unidad según la función:

$$P(x) = 580 - \frac{x^2}{16\,000}$$

Sabiendo que la fabricación tiene unos gastos fijos de 250000 € y unos gastos variables de 125 € por cada unidad producida:

a) Escribe la fórmula de la función *B* (*x*) que expresa el beneficio obtenido por la venta de *x* unidades (los ingresos obtenidos menos los gastos totales).
b) Calcula qué número de unidades hay que fabricar para obtener el máximo beneficio.
c) ¿Cuál es entonces el precio de cada unidad?

Solución

$$P(x) = 580 - \frac{x^2}{16\,000};$$

$$I(x) = x\left(580 - \frac{x^2}{16\,000}\right) = 580\,x - \frac{x^3}{16\,000}$$

a) $G(x) = 250\,000 + 125\,x$

$$B(x) = I(x) - G(x) =$$

$$= 580\,x - \frac{x^3}{16\,000} - 250\,000 - 125\,x$$

$$B(x) = 455\,x - \frac{x^3}{16\,000} - 250\,000$$

b) Hallamos B'(x) y determinamos cuándo se anula:

$$B'(x) = 455 - \frac{3\,x^2}{16\,000}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{455 \cdot 16\,000}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1\,558 \text{ unidades}$$

(pues x debe ser entero y B (1558) > B (1557))

$$B''(x) = -\frac{6\,x}{16\,000}$$

B"(1 558) < 0 ⇒ es un máximo

c) Aplicamos la función P(x).

$$P(1558) = 580 - \frac{(1558)^2}{16000} = 428 \text{ euros}$$

Actividad

Una agencia inmobiliaria tiene alquilados 200 apartamentos en una ciudad a 160 € al mes cada uno. Por cada 5 € de aumento en el alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro apartamento más económico. ¿Cuál es el alquiler que produce mayor beneficio a la agencia?

Solución

1. Si llamamos x al precio de alquiler mensual en euros e y al número de apartamentos alquilados, la expresión analítica de la función que debe optimizarse es:

$B(x, y) = x \cdot y$

2. Podemos relacionar las dos variables teniendo en cuenta que por cada 5 euros que aumenta el precio del alquiler, x, el número de apartamentos alquilados, y, disminuye en una unidad.
Por tanto, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} x = 160 + 5k \\ y = 200 - k \end{array}\right\} \Rightarrow y - 200 = -k = \frac{160 - x}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 200 = -\frac{1}{5}(x - 160) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + 232$$

Así, podemos expresar B como función únicamente de x:

$$B(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{1}{5}x + 232\right)$$

3. Determinamos los extremos relativos de B:

$$0 = B'(x) = \left(-\frac{1}{5}x + 232\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}x + 232 \Leftrightarrow x = 580$$

Veamos que x = 580 corresponde a un máximo de B:

$$B''(x) = -\frac{2}{5} \Rightarrow B''(580) = -\frac{2}{5} < 0 \Rightarrow x = 580$$

es un máximo relativo de B.

Como la función B es derivable, el hecho de que no tenga mínimos relativos nos asegura que x = 580 es un máximo absoluto.

El alquiler que produce mayor beneficio a la agencia es de 580 €.

Actividad

Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 €/m y la de los otros tres lados, 0,625 €/m. Halla el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 €.

Solución

1. La función que queremos optimizar es la que nos da la superficie del campo.
Si llamamos b a la longitud del lado del terreno que da al camino y h a la de uno de los lados que empiezan en el camino, la expresión analítica de la función es:

$S(b, h) = b \cdot h$

2. Podemos relacionar las variables a partir del coste del vallado:

$1800 = 5b + 0,625\ b + 0,625\ h + 0,625\ h$
$1800 = 5,625\ b + 1,25\ h$

luego,

$$h = \frac{-5,625\ b + 1800}{1,25} = -4,5\ b + 1440$$

Por tanto, la expresión de la función que se va a optimizar dependiendo de una sola variable es:

$S(b) = b \cdot h = b \cdot (-4,5\ b + 1\ 440)$

3. Buscamos los extremos relativos de S(b):

$0 = S'(b) = 1 \cdot (-4,5\ b + 1\ 440) + b(-4,\ 5) = -9b + 1\ 440 \Leftrightarrow b = 160$

Comprobamos que $b = 160$ corresponde a un máximo de S:
$S''(b) = -9 \Rightarrow S''(160) < 0 \Rightarrow b = 160$ es un máximo relativo.
Como S es derivable y no tiene más extremos relativos, $b = 160$ es también un máximo absoluto.
La superficie máxima que se puede hallar es:

$S(160) = 160 \cdot (-4,5 \cdot 160 + 1440) = 115200\ m^2$
Actividad

Una esmeralda pesa 16 g y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.

Solución

1. La función que queremos optimizar es la que nos da el valor de la esmeralda después de dividirla, que dependerá del peso de cada trozo.
Si llamamos x al peso de un trozo e y al peso del otro, podemos expresar analíticamente esa función:

$V(x, y) = k \cdot x^2 + k \cdot y^2 = k \cdot (x^2 + y^2)$

siendo $k \in \mathbb{R}^+$ la constante de proporcionalidad que nos da el valor de un trozo de esmeralda a partir del cuadrado de su peso.

2. Podemos transformar V(x, y) en función de una sola variable si imponemos que el trozo de esmeralda que se quiere dividir pesa 16 g:

$16 = x + y \Rightarrow y = 16 - x$

Así, V(x, y) tiene la siguiente expresión analítica como función de x:

$V(x) = k(x^2 + y^2) = k(x^2 + (16 - x)^2) = k(2\ x^2 - 32\ x + 256)$

3. Buscamos los extremos relativos de V:

$V'(x) = k(4\ x - 32)\ ,\ V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$

Como 2 k > 0, la gráfica de V es una parábola con las ramas hacia arriba, luego x = 8 corresponde al vértice, que es un mínimo absoluto.
Para que el valor final de la esmeralda sea mínimo, debemos dividirla en dos trozos de 8 g cada uno (y para que sea máximo, no debemos dividirla).

Actividad

La evolución del número de socios de un equipo de fútbol fundado en 1953 viene dada

$S(t) = –0{,}2\ (2\ t^3 – 45\ t^2 – 4200\ t – 60)$

donde *t* se expresa en años.
Calcula el número mínimo y el número máximo de socios que ha tenido dicho club hasta el año 2008.

Solución

$S(t) = –0{,}2\ (2\ t^3 – 45\ t^2 – 4200t – 60) = –0{,}4\ t^3 + 9\ t^2 + 840\ t + 12$
$S'(t) = –1{,}2\ t^2 + 18\ t + 840$

Hallamos los puntos que anulan S'.

$$S'(t) = -1{,}2\,t^2 + 18\,t + 840 = 0 \iff$$
$$\iff t^2 - 15\,t - 700 = 0 \iff$$
$$\iff t = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 700}}{2} = \begin{cases} t = 35 \\ t = \cancel{-20} \end{cases}$$

La solución t = –20 no es válida porque no tiene sentido un tiempo negativo.

$S''(t) = –2{,}4\ t + 18 \Rightarrow S''(35) = –66 < 0$

Calculamos el intervalo de tiempo que consideramos, si estamos en el año 2000:

2000 – 1 945 = 55

Así, estamos considerando S(t) en el intervalo [0, 55].
Hemos visto que en (0, 55) S sólo tiene un extremo relativo y por el teorema de Weierstrass ha de tener un máximo y un mínimo absolutos en [0, 55]. Así, consideramos los extremos de éste:

S(0) = 12 ; S(35) = 23287 ; S(55) = 6887

Por tanto, el número mínimo de socios fue 12 y el máximo 23287.

Actividad

La cantidad de madera, en metros cúbicos, que se extrae de un bosque viene dada por:

$V(t) = e^{0{,}05\ t}$, donde *t* se expresa en años.

Cierto año, el precio de la madera es 4 €/m3 y, a partir de ese año, la madera se deprecia 0,125 €/m3 cada año. Halla qué momento es el más rentable para talar los árboles.

Solución

El precio de la madera será: $p(t) = 4 – 0{,}125\ (t – t_0)$. El precio de venta de la madera será el producto del precio por metro cúbico multiplicado por el volumen. Así:

$P(t) = V(t) \cdot p(t)$
$P(t) = e^{0{,}05\ t} \cdot [4 – 0{,}125\ (t – t_0)]$

Hallamos la primera derivada del precio total y la igualamos a cero para determinar los extremos relativos.

$$P'(t) = 0{,}05 \cdot e^{0{,}05\,t}[4 - 0{,}125\ (t - t_0)] + e^{0{,}05\,t} \cdot (-0{,}125)$$

$$P'(t) = e^{0{,}05\,t}[0{,}05 \cdot 4 - 0{,}05 \cdot 0{,}125\,(t - t_0) - 0{,}125]$$

$$P'(t) = 0 \iff 0{,}2 - 6{,}25 \cdot 10^{-3}(t - t_0) - 0{,}125 = 0$$

$$P'(t) = 0 \iff t - t_0 = \frac{0{,}075}{6{,}25 \cdot 10^{-3}}\ ;\ t = t_0 + 12$$

Calculamos la segunda derivada para determinar si se trata de un máximo.

$$P'(t) = e^{0{,}05\,t}[0{,}075 - 6{,}25 \cdot 10^{-3}(t - t_0)]$$

$$P''(t) = 0{,}05 \cdot e^{0{,}05\,t}[0{,}075 - 6{,}25 \cdot 10^{-3}(t - t_0)] + \\ + e^{0{,}05\,t}(-6{,}25 \cdot 10^{-3})$$

$$P''(t) = e^{0{,}05\,t}[-2{,}5 \cdot 10^{-3} - 3{,}125 \cdot 10^{-4}(t - t_0)]$$

$$P''(t_0 + 12) = e^{0{,}05\,(t_0+12)} \cdot (-0{,}00625) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{es un máximo}$$

El momento más rentable para talar los árboles será 12 años después de que su precio sea 4 €/m3.

Actividad

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y su derivabilidad en $x = 0$.
b) Calcula la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

a) Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^{-0} = 1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Por lo tanto, f es continua en x = 0.
Calculamos f' en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2e^{-2x} \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

A partir de este cálculo es evidente que:

$$f'(0^-) = -2e^{-0} = -2 \ , \ f'(0^+) = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1$$

Dado que $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f(x) no es derivable en x = 0.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ para $x > 0$ y $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ para $x > 0$, de donde:

$$f(1) = \frac{1}{2} \ , \ f'(1) = \frac{-1}{4}$$

La recta tangente a la gráfica de f en x = 1 será una recta de pendiente

$-\dfrac{1}{4}$ que pasa por $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow -4y + 2 = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 4y - 3 = 0$$

Actividad

Estudia el crecimiento o decrecimiento y la concavidad o convexidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+9}$ en $x = 0$ y $x = -10$

b) $f(x) = e^x \cdot (2x^2 + x - 8)$ en $x = 0$ y $x = 2$

Solución

a) Calculamos la primera y la segunda derivada de la función

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+9}$ en $x = 0$ y $x = -10$.

$$f'(x) = \frac{(x+9)-(x-3)}{(x+9)^2} = \frac{12}{(x+9)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-24 \cdot (x+9)}{(x+9)^4} = \frac{-24}{(x+9)^3}$$

En x = 0:

$$f'(0) = \frac{12}{81} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente}$$

$$f''(0) = \frac{-24}{9^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Cóncava}$$

En x = –10:

$$f'(-10) = \frac{12}{1} = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Creciente}$$

$$f''(-10) = \frac{-24}{-1} = 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Convexa}$$

b) Calculamos la primera y la segunda derivada de la función $f(x) = e^x \cdot (2x^2 + x - 8)$ en x = 0 y x = 2.

$f'(x) = e^x \cdot (2x^2 + x - 8) + e^x \cdot (4x + 1)$
$f'(x) = e^x \cdot (2x^2 + 5x - 7)$
$f'(x) = e^x \cdot (2x^2 + 5x - 7) + e^x \cdot (4x + 5)$
$f'(x) = e^x \cdot (2x^2 + 9x - 2)$

En x = 0:

$f'(0) = e^0 \cdot (-7) = -7 < 0 \Rightarrow$ Decreciente
$f''(0) = e^0 \cdot (-2) = -2 < 0 \Rightarrow$ Cóncava

En x = 2:

$f'(2) = e^2 \cdot 11 = 11 > 0 \Rightarrow$ Creciente
$f''(2) = e^2 \cdot 24 = 24 > 0 \Rightarrow$ Convexa

Actividad

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, calcula sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos y sus intervalos de curvatura. Esboza su gráfica.

Solución

Calculamos en primer lugar sus derivadas hasta orden tres:

$f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 3$
$f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$

En los puntos de inflexión se anula la derivada segunda y no la tercera:

$0 = 6x \Rightarrow x = 0$
$f'''(0) = 6 \neq 0$

Por tanto, en x = 0 hay un punto de inflexión.
En los puntos de máximo y mínimo relativos se anula la derivada primera y no la segunda:

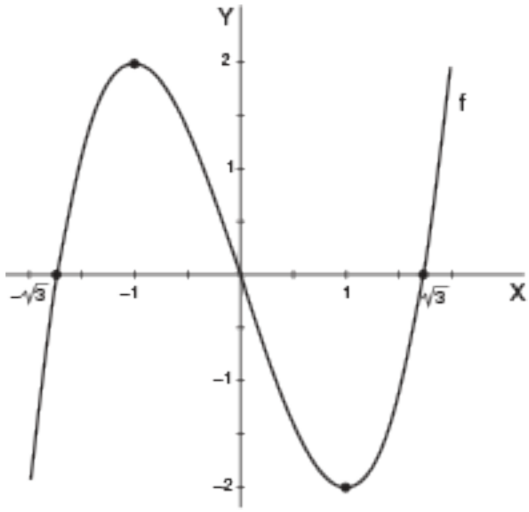
$$0 = 3x^2 - 3 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \text{ y } f''(1) = 6 > 0$$

Por tanto, en x = –1 hay un máximo relativo y en x = 1 hay un mínimo relativo.
Los intervalos de convexidad corresponden a puntos en que $f''(x) > 0$ y los de concavidad a puntos en que $f''(x) < 0$.
Luego en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es cóncava y en $(0, +\infty)$ es convexa.
Teniendo en cuenta, además, que las raíces corresponden a las soluciones de:

$$0 = x^3 - 3x = x(x^2 - 3) \Rightarrow x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

La gráfica de la función tiene la forma que se indica en la siguiente figura:



Actividad

Calcula los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = x^4 - 8x^2 + 3 \qquad b)\ f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solución

a) Igualamos a 0 la primera derivada de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$:

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$
$x(4x^2 - 16) = 0$
$x = 0;\ x = 2;\ x = -2$

Para distinguir máximos y mínimos analizamos la segunda derivada:

$f''(x) = 12x^2 - 16$

Así pues:

En $x = 0$, $f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo
En $x = 2$, $f''(2) = 32 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo
En $x = -2$, $f''(-2) = 32 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo

b) Igualamos a 0 la primera derivada de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}:$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x = 0; \quad x = -\sqrt{3}; \quad x = +\sqrt{3}$$

Para distinguir máximos y mínimos analizamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$$

Así pues:
En x = 0, f''(0) = 0 ⇒ no podemos afirmar nada.

$$\text{En} \quad x = \sqrt{3}, \quad f''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2\left(\sqrt{3}\right)^2 + 6\sqrt{3}}{2^3} > 0 \quad \Rightarrow$$

Mínimo relativo

$$\text{En} \quad x = -\sqrt{3}, \quad f''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 6\sqrt{3}}{2^3} < 0 \quad \Rightarrow$$

Máximo relativo

Actividad

Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$a) \ f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2} \qquad b) \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Solución

a) Calculamos la primera, la segunda y la tercera derivada de la función

$$f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{2}:$$

$$f'(x) = \frac{4x^3}{24} + \frac{3x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3x^2}{6} + 3x = \frac{x^2}{2} + 3x$$

$$f'''(x) = x + 3$$

Buscamos los puntos que anulan la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 3x = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 6x = 0$$

$$x(x+6) = 0 \quad \Rightarrow x = 0; \quad x = -6$$

En x = 0; f'''(0) = 3 ≠ 0 ⇒ Punto de inflexión.
En x = –6, f'''(–6) = –3 ≠ 0 ⇒ Punto de inflexión.

b) Calculamos la primera, la segunda y la tercera derivada de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad :$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(-2x)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{12x(1+x^2)^3 - 3(1+x^2)^2\cdot 2x\cdot(6x^2-2)}{(1+x^2)^6} =$$

$$= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

Buscamos los puntos que anulan la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{En } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f'''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{27\cdot\sqrt{3}}{16} \neq 0 \Rightarrow$$

punto de inflexión.

$$\text{En } x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{27\cdot\sqrt{3}}{16} \neq 0 \Rightarrow$$

punto de inflexión.

Actividad

El coste del combustible que consume una locomotora a motor es proporcional al cuadrado de la velocidad y vale 16 € a la hora cuando la velocidad es de 40 kilómetros por hora. Independientemente de la velocidad, y por otras causas, el coste por hora se incrementa en 36 €. Calcula la velocidad a la que debe ir la locomotora para que el coste por hora sea mínimo.

Solución

Sea x la velocidad buscada. El coste del combustible por hora (C(€/h)) lo podemos expresar de la siguiente manera, siendo k una constante.

C(€/h) = k x^2

A 40 km/h el coste es de 16 €, por lo que:

$$16 = k\cdot 40^2 \Rightarrow k = \frac{16}{1600} = 0{,}01$$

El coste por kilómetro (C(€/km)) lo podemos definir pues de la siguiente manera:

$$C(€/km) = \frac{C(€/h)}{velocidad} = \frac{0{,}01x^2 + 36}{x}$$

Derivamos la función respecto a x y tenemos:

$$C'(€/km) = \frac{x \cdot 0{,}02x - (0{,}01x^2 + 36)}{x^2} =$$

$$= \frac{0{,}01x^2 - 36}{x^2}$$

Igualamos la derivada a 0 para encontrar el valor óptimo y nos queda:

$$\frac{0{,}01x^2 - 36}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}01x^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}01x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3600} = 60$$

Por lo tanto, la velocidad a la que el consumo por kilómetro es menor será 60 km/h.

Actividad

Calcula los valores de p y de q para que la función $f(x) = x^2 + px + q$ pase por el punto (–2, 1) y presente un mínimo para $x = –3$.

Solución

Al ser x = –3 un mínimo, f'(–3) = 0. Por lo tanto:

$f'(x) = 2x + p \Rightarrow f'(-3) = -6 + p = 0 \Rightarrow p = 6$

Al pasar por el punto (–2, 1), tenemos que

$(-2)^2 - 2p + q = 1$

$4 - 2 \cdot 6 + q = 1 \Rightarrow q = 9$

Actividad

Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 - ax - 4x + b$ se anule para $x = 3$ y tenga un punto de inflexión en

$$x = \frac{2}{3}$$

Solución

Calculamos la primera y la segunda derivada:

$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 4$

$f''(x) = 6x - 2a$

Si en $x = \frac{2}{3}$

la función tiene un punto de inflexión, entonces en ese punto se anulará la segunda derivada.

$$6 \cdot \frac{2}{3} - 2a = 0 \quad \Rightarrow a = 2$$

Si la función se anula para x = 3, entonces:

$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 2 - 12 + b = 0 \Rightarrow b = 3$

Actividad

Una estimación sobre el número de visitantes que acudirán cada semana a una exposición viene dada por la siguiente función (expresada en cientos de personas):

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}$$

siendo *t* el número de semanas que lleva la exposición abierta.

a) ¿Cuántas personas visitarán la exposición durante la cuarta semana?
b) ¿Cuál es la semana en la que acudirá un mayor número de personas a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes habrá esa semana?

Solución

a) Para calcular el número de visitantes que acudirán a la exposición durante la cuarta semana simplemente hallamos la imagen de la función cuando t = 4:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(2) = \frac{30 \cdot 4}{4^2 - 2 \cdot 4 + 4} = \frac{120}{12} = 10$$

Por lo tanto, durante la cuarta semana visitarán la exposición 1000 personas.

b) Calculamos la primera derivada de la función e igualamos a 0:

$$f'(t) = \frac{30(t^2 - 2t + 4) - 30t(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 4)^2} =$$
$$= \frac{30t^2 - 60t + 120 - 60t^2 + 60t}{(t^2 - 2t + 4)^2} = \frac{-30t^2 + 120}{(t^2 - 2t + 4)^2} = 0$$
$$-30t^2 + 120 = 0 \Rightarrow t = 2$$

El mayor número de visitantes acudirá a la exposición durante la segunda semana.

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} \Rightarrow$$
$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = \frac{60}{4} = 15$$

Por lo tanto, durante la segunda semana visitarán la exposición 1500 personas.

Actividad

El precio en euros de un artículo que estuvo 10 años en el mercado evolucionó según la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 7 + t^2 & 0 \le t < 2 \\ t + 9 & 2 \le t \le 10 \end{cases}$$

Donde *t* es el tiempo expresado de años.
Halla cuál ha sido su precio mínimo y su precio máximo.

Solución

Para calcular los precios mínimo y máximo hallamos los valores de t que cumplen P'(t) = 0.

$$P'(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t < 2 \\ 1 & 2 < t \le 10 \end{cases}$$

$$2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0$$

Calculamos la derivada segunda: P"(t) = 2 > 0 ⇒ Luego en t = 0 tendremos un mínimo de la función. El precio mínimo ha sido P(0) = 7. Para hallar el máximo, debemos utilizar el teorema de Weierstrass que nos dice que los extremos absolutos de P se encuentran en x = 0, x = 2 o x = 10:

P(0) = 7
P(2) = 11
P(10) = 19

Con lo que el precio máximo ha sido de 19.

Actividad

El departamento comercial de una empresa que fabrica calderas ha de fijar el precio de su producto de modo que el beneficio sea máximo. A partir de un estudio de mercado, se sabe que la función de demanda viene definida por la expresión

$$x = 3\,600 - \frac{p}{2}$$

donde *x* es el número de calderas y *p* el precio de venta. Por otro lado, la función de costes, en €, viene dada por la expresión

$$CT = 3\,800\,000 + \frac{x^2}{4}$$

Calcula cuál es el precio y la cantidad que maximiza el beneficio obtenido por la empresa, y di a cuánto ascendería dicho beneficio.

Solución

A partir de la función de demanda podemos expresar el precio de una caldera en función de la cantidad demandada:

p = 7 200 – 2x

El beneficio de la empresa (B), que es nuestra función objetivo a maximizar, será la diferencia entre los ingresos (IT) y los costes (CT), siendo:

IT = p · x = (7 200 – 2 x) · x = 7 200 x – 2 x^2

$$B = IT - CT = 7200x - 2x^2 - \left(3800000 + \frac{x^2}{4}\right)$$

$$B = \frac{-9x^2}{4} + 7200x - 3800000$$

Realizamos la derivada de la función e igualamos a 0:

$$B' = \frac{-18\,x}{4} + 7\,200 = 0$$

$$x = 1600$$

$$p = 7200 - 3200 = 4\,000$$

La empresa maximizaría su beneficio fabricando 1600 calderas que podría vender a 4 000 € cada una. En este caso el beneficio sería:

B = IT – CT = 6 400 000 – 4 440 000
B = 1960 000

Actividad

Demuestra que la ecuación $x^3 - 36x + 10 = 0$ no puede tener dos raíces reales en el intervalo (–1, 2). ¿Tiene alguna raíz en este intervalo?

Solución

Se ha de demostrar que la función $f(x) = x^3 - 36\,x + 10$ no puede tener dos raíces reales en (–1, 2). Lo haremos por reducción al absurdo y aplicando el teorema de Rolle.
Supongamos que existen dos raíces de f en el intervalo (–1, 2), $x_1 < x_2$.
Veamos que f satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[x_1, x_2]$: en el intervalo, la función es continua y derivable (ya que es una función polinómica), y por hipótesis, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Por lo tanto, se cumplirá que:

$\exists\ c \in (x_1, x_2) \subset (-1, 2)\ |f'(c) = 0$

Determinemos el valor de c:

$$f'(x) = 3x^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Como f' no tiene raíces en (–1, 2), no puede existir el real c.
Hemos obtenido una contradicción que venia de suponer la existencia de dos raíces distintas de f en (–1, 2). Así pues, o bien f no tiene raíces en este intervalo o tiene sólo una.
Veamos que la función satisface el teorema de Bolzano en [–1, 2]. La función es continua (pues es polinómica) y $f(-1) = 45 > 0$ y $f(2) = -54 < 0$ tienen distinto signo. Por lo tanto:

$\exists\ c \in (-1, 2)\ |f(c) = 0$

Así pues, la función tiene una única raíz en el intervalo (–1, 2).

Actividad

Una empresa fabrica un producto que vende a 50 € la unidad. A este precio la empresa vende 40 000 unidades cada año. Ha realizado un estudio de mercado y sabe que por cada € que aumente el precio del producto, la demanda disminuye en 200 unidades. Calcula cuál es el precio con el que la empresa obtiene un mayor ingreso.

Solución

Sea x el incremento del precio de este articulo. La función a maximizar es la función de ingresos totales (IT) que es igual al producto del precio (p) por la cantidad (q).
Una vez aplicado el incremento el precio será:

p = 50 + x

Y la cantidad:

q = 40 000 – 200 x

La función a optimizar será:

IT = (50 + x)(40 000 – 200 x)
$IT = -200\,x^2 + 30\,000\,x + 2\,000\,000$

Calculamos la derivada y la igualemos a 0

$$IT' = -400x + 30\,000 = 0$$

$$x = \frac{30\,000}{400} = 75$$

Habrá que incrementar el precio 75 € para maximizar el ingreso. Por lo tanto el precio será 125 €, precio al cual se demandan 25 000 unidades, obteniendo un ingreso de 3 125 000 €.

Actividad

Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$

Solución

Dominio: D(f) = ℝ – {0}
Puntos de corte: La gráfica corta al eje OX en (2, 0) y (–1, 0) y no corta al eje OY.
Signo de la función en los intervalos que determinan los puntos de corte y el dominio:

intervalo	signo
$(-\infty, -1)$	–
$(-1, 0)$	+
0	∄
$(0, 2)$	+
$(2, +\infty)$	+

Simetría y periodicidad: Puesto que f(–x) ≠ f(x) y f(–x) ≠ f(x) la función no es simétrica ni tampoco es periódica.
La recta x = 0 es una asíntota vertical, ya que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

No tiene asíntotas verticales ya que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

Tiene una asíntota oblicua: y = x – 3:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 4}{x^2} = -3$$

Intervalos de monotonía y extremos relativos: Calculamos la derivada y obtenemos los valores para los cuales ésta se iguala a 0:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$

Monotonía de la función en los intervalos determinados por x = 2 y el punto de discontinuidad x = 0:

intervalo	signo de f′	monotonía
$(-\infty, 0)$	+	creciente
$(0, 2)$	–	decreciente
$(2, +\infty)$	+	creciente

La función tiene un mínimo relativo en x = 2.
Intervalos de curvatura y puntos de inflexión: Calculamos la derivada segunda y obtenemos los valores para los cuales ésta se iguala a 0:

$$f''(x) = \frac{(3x^2)x^3 - 3x^2(x^3 - 8)}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

No tiene punto de inflexión ya que f''(x) = 0 no tiene solución. Consideramos los intervalos que determina el punto de discontinuidad x = 0

intervalo	signo de f″	curvatura
$(-\infty, 0)$	+	convexa
$(0, +\infty)$	+	convexa

Con todo lo anterior, la representación gráfica de la función quedaría: