EJERCICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Actividad

La suma de las cifras de un número natural comprendido entre 100 y 999 es 6. Además, sabemos que el triple de la cifra de las decenas es igual a la de las unidades. Finalmente, si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99. ¿Cuál es este número?

Solución

— Que el número buscado esté comprendido entre 100 y 999 significa que tiene exactamente tres cifras. Sea x la cifra de las centenas, y la de las decenas y z la de las unidades.
De esta manera, el número buscado es:

100 x + 10 y + z

— Para determinar los valores x, y, z, impondremos las condiciones del enunciado:
• La suma de sus cifras es 6:

x + y + z = 6

• El triple de la cifra de las decenas es igual a la de las unidades:

3y = z

• Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99:

100 z + 10 y + x = 100 x + 10 y + z + 99

Debemos resolver, pues, el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 3y &= z \\ 100z + 10y + x &= 100x + 10y + z + 99 \end{aligned}\right\}$$

que podemos expresar de la forma habitual:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 3y - z &= 0 \\ -99x + 99z &= 99 \end{aligned}\right\}$$

y si dividimos la última ecuación por 99:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y - z = 0 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

— La matriz asociada al sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Si aplicamos el método de Gauss:

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & 7 \end{array}\right)$$

Obtenemos la matriz ampliada asociada a un sistema con las mismas ecuaciones que incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ 3y - z = 0 \\ \frac{7}{3}z = 7 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible determinado y, haciendo sustitución hacia atrás, obtenemos:

$$z = 3$$

$$y = \frac{1}{3}z = 1$$

$$x = 6 - y - x = 6 - 3 - 1 = 2$$

— El número buscado es 213.
Comprobemos que cumple las condiciones:
• La suma de sus cifras es 2 + 1 + 3 = 6.
• El triple de la cifra de las decenas, 3 · 1, es igual a la cifra de las unidades, 3.
• Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 312 – 213 = 99.

Actividad

Ana compra tres pantalones, dos blusas y un sombrero por 135 €; Begoña, un pantalón, tres blusas y un sombrero por 100 €; y Susana, dos pantalones, tres blusas y dos sombreros por 155 €. ¿Cuál es el precio de cada prenda?

Solución

— Sea x el precio de un pantalón, y el de una blusa y z el de un sombrero.
— Debemos determinar el valor de x, y, z imponiendo las hipótesis del enunciado:
• Ana paga 135 € por 3 pantalones, 2 blusas y 1 sombrero:

$3x + 2y + z = 135$

• Begoña compra 1 pantalón, 3 blusas y 1 sombrero por 100 €:

$x + 3y + z = 100$

• Susana compra 2 pantalones, 3 blusas y 2 sombreros por 155 €:

$2x + 3y + 2z = 155$

Debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 135 \\ x + 3y + z &= 100 \\ 2x + 3y + 2z &= 155 \end{aligned}\right\}$$

— La matriz asociada al sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 135 \\ 1 & 3 & 1 & 100 \\ 2 & 3 & 2 & 155 \end{array}\right)$$

Si aplicamos el método de Gauss:

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 100 \\ 3 & 2 & 1 & 135 \\ 2 & 3 & 2 & 155 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & -7 & -2 & -165 \\ 0 & -3 & 0 & -45 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{3}{7}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & -7 & -2 & -165 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{180}{7} \end{array}\right)$$

Obtenemos la matriz ampliada asociada a un sistema con las mismas ecuaciones que incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 100 \\ -7y - 2z &= -165 \\ \frac{6}{7}z &= \frac{180}{7} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 100 \\ 7y + 2z &= 165 \\ 6z &= 180 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo por sustitución hacia atrás, tenemos:

$$z = \frac{180}{6} = 30$$

$$y = \frac{165 - 2z}{7} = \frac{165 - 2 \cdot 30}{7} = 15$$

$$x = 100 - 3y - z = 100 - 3 \cdot 15 - 30 = 25$$

— Por tanto, el precio de un pantalón es de 25 €; el de una blusa, de 15 €; el de un sombrero, de 30 €.
Comprobemos que se satisfacen las hipótesis del enunciado:
• Ana compra 3 pantalones, 2 blusas y 1 sombrero por:

$3 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 30 = 135$ €

• Begoña compra 1 pantalón, 3 blusas y 1 sombrero por:

$1 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 30 = 100$ €

• Susana compra 2 pantalones, 3 blusas y 2 sombreros por:

$2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 30 = 155$ €

Actividad

Una fábrica dispone de tres máquinas, *A*, *B* y *C*, para producir cierto artículo. Cuando trabajan las tres se fabrican 2000 unidades de dicho artículo por día. Si la *A* no funciona, pero la *B* y la *C* sí, la producción desciende un 25 %. Y cuando *A* y *B* funcionan normalmente, pero *C* sólo a tres cuartas partes de su rendimiento normal, la producción baja un 10 %. ¿Cuántas unidades fabrica habitualmente cada máquina?

Solución

Hemos de considerar como incógnitas del problema las unidades que fabrica cada máquina. Así las incógnitas serán:

x = número de unidades que fabrica la máquina A.
y = número de unidades que fabrica la máquina B.
z = número de unidades que fabrica la máquina C.

De acuerdo con las condiciones del enunciado se ha de cumplir:
• Cuando trabajan las tres máquinas se fabrican 2000 piezas:

$x + y + z = 2000$

• Si A no funciona, pero B y C sí, la producción desciende un 25 %:

$$y + z = 2\,000 - 2\,000 \cdot \frac{25}{100} = 1\,500$$

• Si A y B funcionan pero C sólo a tres cuartas partes de su rendimiento, la producción baja un 10 %:

$$x + y + \frac{3}{4}z = 2\,000 - 2\,000 \cdot \frac{10}{100} = 1\,800 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + 3z = 7\,200$$

Así, hemos de resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2\,000 \\ y + z &= 1\,500 \\ 4x + 4y + 3z &= 7\,200 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\,000 \\ 0 & 1 & 1 & 1\,500 \\ 4 & 4 & 3 & 7\,200 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4\,F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\,000 \\ 0 & 1 & 1 & 1\,500 \\ 0 & 0 & -1 & -800 \end{array}\right)$$

La solución de este sistema escalonado es:

z = 800
y = 1500 – 800 = 700
x = 2000 – 700 – 800 = 500

Así, la máquina A produce 500 unidades, la B 700 unidades y la C 800 unidades.

Actividad

Un constructor ha invertido 528125 € en la compra de tres parcelas. La primera la ha comprado a 200 € el metro cuadrado, la segunda a 220 €/m^2 y la tercera a 250 €/m^2.
Sabiendo que la superficie total de las tres parcelas es de 2362,5 m^2 y que por la tercera pagó las cinco octavas partes de lo que pagó por las otras dos juntas, calcula la superficie de cada parcela.

Solución

Consideraremos como incógnitas la superficie de las diferentes parcelas. Así, las incógnitas son:

x = superficie de la primera parcela.
y = superficie de la segunda parcela.
z = superficie de la tercera parcela.

De acuerdo con las condiciones del enunciado se ha de cumplir:
• La primera parcela la ha comprado a 200 € el metro cuadrado, la segunda a 220 € y la tercera a 250 €. En total ha invertido 528125 €:

$200x + 220y + 250z = 528125 \Leftrightarrow 40x + 44y + 50z = 105625$

• La superficie total de las tres parcelas es de 2362,5 m^2:

$x + y + z = 2362{,}5$

• Por la tercera pagó las cinco octavas partes de lo que pagó por las otras dos juntas:

$$250z = \frac{5}{8}(200x + 220y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1\,000x + 1\,100y - 2\,000z = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x + 11y - 20z = 0$$

Estas ecuaciones dan lugar al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 40x + 44y + 50z = 105\,625 \\ x + y + z = 2\,362{,}5 \\ 10x + 11y - 20z = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 44 & 50 & 105\,625 \\ 1 & 1 & 1 & 2\,362,5 \\ 10 & 11 & -20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\,362,5 \\ 40 & 44 & 50 & 105\,625 \\ 10 & 11 & -20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 10\,F_1]{F_2 \to F_2 - 40\,F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\,362,5 \\ 0 & 4 & 10 & 11\,125 \\ 0 & 1 & -30 & -23\,625 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\,362,5 \\ 0 & 1 & -30 & -23\,625 \\ 0 & 4 & 10 & 11\,125 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4\,F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\,362,5 \\ 0 & 1 & -30 & -23\,625 \\ 0 & 0 & 130 & 105\,625 \end{array}\right)$$

La solución de este sistema escalonado es:

$$z = \frac{105\,625}{130} = 812,5$$

$$y = 30\,z - 23\,625 = 750$$

$$x = 2\,362,5 - 750 - 812,5 = 800$$

Así, la superficie de la primera parcela es de 800 m^2, la de la segunda de 750 m^2 y la de la tercera es de 812,5 m^2.

Actividad

Una persona desea invertir 8000 € en tres productos financieros, *A*, *B* y *C*. Entre el producto *A* y el *B* quiere invertir siete veces más que en el producto *C*. El producto *A* ofrece una rentabilidad del 6 %, el *B* del 5% y el *C* del 2%.

— Calcula cuántos € tiene que dedicar a cada producto para obtener una rentabilidad global del 5%.

Solución

Consideramos como incógnitas los euros invertidos en los productos A, B y C:

x = € invertidos en A
y = € invertidos en B
z = € invertidos en C

Considerando las condiciones del enunciado se cumple:
• El inversor dispone de 8000 €:

x + y + z = 8000

• Entre el producto A y el B quiere invertir siete veces más que en el producto C:

x + y = 7z

• La rentabilidad total ha de ser del 5%:

$$\frac{6}{100}x + \frac{5}{100}y + \frac{2}{100}z = \frac{5}{100} \cdot 8\,000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x + 5y + 2z = 40\,000$$

Con estas ecuaciones obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 8\,000 \\ x + y = 7z \\ 6x + 5y + 2z = 40\,000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 7z + z = 8z = 8\,000 \\ x + y = 7z \\ 6x + 5y + 2z = 40\,000 \end{array}\right\}$$

Hemos obtenido un sistema equivalente al de partida y escalonado con lo que podemos resolverlo por el método de sustitución regresiva:

$$\left.\begin{array}{r} z = 1\,000 \\ x + y = 7\,000 \\ 6x + 5y = 40\,000 - 2\,000 = 38\,000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} z = 1\,000 \\ x = 7\,000 - y \\ 6\ (7\,000 - y) + 5y = 38\,000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} z = 1\,000 \\ x = 7\,000 - y \\ 42\,000 - 6y + 5y = 38\,000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} z = 1\,000 \\ x = 7\,000 - y \\ y = 4\,000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} z = 1\,000 \\ x = 7\,000 - 4\,000 = 3\,000 \\ y = 4\,000 \end{array}\right\}$$

Ha de invertir 3000 € en A, 4000 € en B y 1000 € en C.

Actividad

Un inversor dispone de 200000 € para invertir en productos financieros. Su banco le propone tres tipos de inversión, a corto (*A*), medio (*B*) y largo plazo (*C*), cuya rentabilidad media es, respectivamente, del 6 %, del 10 % y del 12 %. Si el inversor desea que un 30 % de su capital se invierta a largo plazo y, además, que la rentabilidad final de su dinero sea del 9 %, calcula cuánto ha de invertir en cada tipo de imposición.

Solución

Las incógnitas serán:

x = € que ha de invertir en la inversión de tipo A
y = € que ha de invertir en la inversión de tipo B
z = € que ha de invertir en la inversión de tipo C

Se ha de cumplir:

• El dinero que dispone para la inversión es de 200000 €:

x + y + z = 20 000

• Un 30 % del capital se ha de invertir a largo plazo:

$$z = \frac{30}{100}\ 200\,000 = 60\,000$$

• La rentabilidad final de su dinero ha de ser del 9%:

$$\frac{6}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{12}{100}z = \frac{9}{100}\ 200\,000$$

Con las ecuaciones anteriores obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 200\,000 \\ 6x + 10y + 12z &= 900\,000 \\ z &= 60\,000 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 200\,000 \\ 3x + 5y + 6z &= 900\,000 \\ z &= 60\,000 \end{aligned}\right\}$$

Utilizamos la notación matricial y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200\,000 \\ 3 & 5 & 6 & 900\,000 \\ 0 & 0 & 1 & 60\,000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200\,000 \\ 0 & 2 & 3 & 300\,000 \\ 0 & 0 & 1 & 60\,000 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido un sistema escalonado cuya solución es:

$$z = 60\,000$$

$$y = \frac{300\,000 - 3 \cdot 60\,000}{2} = \frac{300\,000 - 180\,000}{2} =$$

$$= 60\,000$$

$$x = 200\,000 - 60\,000 - 60\,000 = 80\,000$$

Así, la respuesta es que ha de invertir 80000 € en A, 60000 € en B y 60000 € en C.
Actividad

Un grupo inversor dispone de 10 millones de € para adquirir tres productos financieros, *A*, *B* y *C*. De éstos se sabe que rentan, respectivamente, un 5 %, un 4% y un 3%.

— Calcula cuántos millones de € tiene que invertir en cada producto para obtener una rentabilidad global del 4,3 % si, por otra parte, el grupo desea invertir en el producto *A* tanto como en los otros dos juntos.

Solución

Las incógnitas son:

x = millones de euros invertidos en A
y = millones de euros invertidos en B
z = millones de euros invertidos en C

Se ha de cumplir:
• Se dispone de 10 millones de euros:

x + y + z = 10

• Se desea una rentabilidad global del 4,3 %:

$$\frac{5}{100}x + \frac{4}{100}y + \frac{3}{100}z = \frac{4,3}{100}10$$

• Se desea gastar en A tanto como en B y C:

x = y + z ⇔ x – y – z = 0

Así podemos considerar el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 5x + 4y + 3z &= 43 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Para resolverlo utilizamos la notación matricial y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 43 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to -(F_3 - F_1)]{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido un sistema escalonado cuya solución es:

$$z = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = 7 - 2 \cdot 2 = 3$$

$$x = 10 - 3 - 2 = 5$$

Por lo que ha de invertir 5 millones en A, 3 en B y 2 en C.

Actividad

Una persona utiliza la mitad de sus ahorros en comprar bonos del Estado, y la otra mitad en comprar acciones. En conjunto, la rentabilidad de su inversión es del 10 %. Pasado un tiempo se da cuenta de que si hubiese invertido un 40 % en acciones y el resto en bonos, su rentabilidad hubiese sido del 11 %. Determina la rentabilidad media de los bonos y las acciones por separado.

Solución

Consideramos las siguientes incógnitas:

x = rentabilidad media de bonos en tanto por cien
y = rentabilidad media de las acciones en tanto por cien

Se han de cumplir las condiciones del enunciado:
• Utiliza la mitad de sus ahorros en comprar bonos y la otra en comprar acciones y la rentabilidad obtenida es del 10 %:

$$\frac{x}{50}\,\frac{50}{100}+\frac{y}{100}\,\frac{50}{100}=\frac{10}{100}\Leftrightarrow = 5x+5y=100$$

• Si hubiese invertido un 40 % en acciones y el resto en bonos hubiese obtenido una rentabilidad del 11 %:

$$\frac{60}{100}\,\frac{x}{100}+\frac{40}{100}\,\frac{y}{100}=\frac{11}{100}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40x+60y=1\,100$$

Así, obtenemos el sistema lineal:

5x + 5y = 100
60 x + 40 y = 1100

Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 100 \\ 60 & 40 & 1\,100 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - 12F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 100 \\ 0 & -20 & -100 \end{array}\right)$$

Así, la solución es:

$$y=\frac{-100}{-20}=5$$

$$x=\frac{100-5\cdot 5}{5}=\frac{100-25}{5}=\frac{75}{5}=15$$

Por tanto, la rentabilidad media de los bonos será el 15 % y la de las acciones será el 5%.

Actividad

Una empresa del sector de la alimentación produce tres tipos de bombones *A*, *B* y *C*, que vende a 0,3, 0,4 y 0,5 € por unidad, respectivamente. Si la empresa quiere lanzar al mercado una nueva caja de bombones variados que contenga diez unidades y cueste 4,5 €, ¿cuántos bombones de cada clase debe colocar en la caja?

Solución

Las incógnitas del problema son:

x = número de bombones del tipo A
y = número de bombones del tipo B
z = número de bombones del tipo C

Consideramos las condiciones dadas en el enunciado:
• La caja de bombones ha de contener 10 unidades:

$x + y + z = 10$

• La caja ha de valer 4,5 €:

$0{,}3\ x + 0{,}4\ y + 0{,}5\ z = 4{,}5 \Leftrightarrow 3x + 4y + 5z = 45$

Así, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 3x + 4y + 5z &= 45 \end{aligned}\right\}$$

Lo resolveremos mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

El sistema tiene las siguientes soluciones:

$z = \lambda$
$y = 15 – 2\ \lambda$
$x = 10 – (15 – 2\ \lambda) – \lambda = 10 – 15 + 2\lambda – \lambda = –5 + \lambda$

Además se ha de cumplir que:
• $\lambda \geq 5$ para que x sea positiva.

$$\bullet\ \lambda \leq \frac{15}{2}$$

para que y sea positiva.

Así, $\lambda \in \{5, 6, 7\}$

Calculamos los posibles valores de las incógnitas:

• Si $\lambda = 5 \Rightarrow x = 0\ ,\ y = 5\ ,\ z = 5$
• Si $\lambda = 6 \Rightarrow x = 1\ ,\ y = 3\ ,\ z = 6$
• Si $\lambda = 7 \Rightarrow x = 2\ ,\ y = 1\ ,\ z = 7$

Por lo que las posibles soluciones son: 5 bombones del tipo B y 5 del tipo C; o bien, 1 del tipo A, 3 del tipo B y 6 del C; o bien 2 del tipo A, 1 del tipo B y 7 del C.

Actividad

En un colegio los alumnos venden boletos con la finalidad de financiarse el viaje de fin de curso, que les cuesta 500 € a cada uno. Para llegar a esta cantidad, a Juan le falta el doble del dinero que han recaudado entre Pedro y Luis. Si Pedro le diera 25 € a Juan, los dos tendrían la misma cantidad de dinero. Si entre los tres han vendido boletos por valor de 300 €, ¿cuánto dinero ha conseguido cada uno?

Solución

Las incógnitas son:

x = dinero conseguido por Juan
y = dinero conseguido por Pedro
z = dinero conseguido por Luís

Imponiendo las condiciones del enunciado se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 500 - x &= 2\,(y+z) \\ y - 25 &= x + 25 \\ x + y + z &= 300 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 500 \\ x - y &= -50 \\ x + y + z &= 300 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos por Gauss:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 500 \\ 1 & -1 & 0 & -50 \\ 1 & 1 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 - F_3]{F_1 \to F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -2 & -1 & -350 \\ 1 & 1 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right)$$

Luego, la solución del sistema es:

y = 150
z = 50
x = 100

Así pues, Juan ha conseguido 100 €, Pedro ha conseguido 150 € y Luis 50 €.
Actividad
Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax - y + z &= 2x \\ x + 2ay - az &= y \\ x + ay - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) ¿Para qué valores de *a* dicho sistema tiene solución no nula?
b) Determina las soluciones del sistema para dichos valores de *a*.

Solución

Pasando las incógnitas al primer miembro y simplificando nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} (a-2)x - y + z = 0 \\ x + (2a-1)y - az = 0 \\ x + ay - z = 0 \end{array}\right\}$$

Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 + aF_1} \begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ 1+a(a-2) & (2a-1)-a & 0 \\ 1+(a-2) & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando, obtenemos la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ (a-1)^2 & a-1 & 0 \\ a-1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, no es necesario seguir escalonando el sistema para deducir que:
Para a = 1 se anulan las dos últimas filas, por lo que queda una única ecuación con tres incógnitas. Tenemos por tanto una indeterminación.
Si a ≠ 1, el sistema se puede simplificar dividiendo por (a – 1):

$$\begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ a-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_3} \begin{pmatrix} a-2 & -1 & 1 \\ a-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si a = 2 nos queda un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo tanto compatible indeterminado.
Si a ≠ 1 y a ≠ 2 quedan tres ecuaciones independientes, y por lo tanto, el sistema sólo tiene la solución trivial x = 0, y = 0, z = 0.

Actividad

Un proveedor suministra tres tipos de productos: *A*, *B* y *C*. Sus clientes le han hecho los siguientes pedidos:

— 100 unidades de *A*, 100 de *B* y 40 de *C* por un importe total de 20 280 €.
— 50 unidades de *A*, 120 de *B* y 50 de *C* por un importe total de 14 070 €.
— 75 unidades de *A*, 150 de *B* y 100 de *C* por un importe total de 22 525 €.

— 50 unidades de *A* y 20 de *C* por un importe total de 9 090 €.

¿Cuál es el precio de cada uno de los productos?

Solución

Las incógnitas son:

x = precio del producto A
y = precio del producto B
z = precio del producto C

Imponiendo las cuatro condiciones del enunciado se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 100x + 100y + 40z &= 20\,280 \\ 50x + 120y + 50z &= 14\,070 \\ 75x + 150y + 100z &= 22\,525 \\ 50x + 20z &= 9\,090 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 5x + 5y + 2z &= 1\,014 \\ 5x + 12y + 5z &= 1407 \\ 3x + 6y + 4z &= 901 \\ 5x + 2z &= 909 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\xrightarrow[F_4 \to F_1 - F_4]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & 1014 \\ 0 & 7 & 3 & 393 \\ 3 & 6 & 4 & 901 \\ 0 & -5 & 0 & -105 \end{array}\right)$$

Así la solución es:

$$y = \frac{-105}{-5} = 21$$

$$z = \frac{393 - 7 \cdot 21}{3} = 82$$

$$x = \frac{1014 - 5 \cdot 21 - 2 \cdot 82}{5} = 149$$

Comprobamos que la solución obtenida, (149, 21, 82), cumple la tercera condición del sistema escalonado:

$3 \cdot 149 + 6 \cdot 21 + 4 \cdot 82 = 901$

Así, el precio del producto A es de 149 €, el precio del producto B es de 21 € y el precio del producto B es de 82 €.

Actividad

Una empresa se dedica a la fabricación de electrodomésticos. Los costes totales de dicha empresa han ascendido a 468 €, habiendo fabricado en total 12 exprimidores, 3 aspiradores y 6 tostadoras. Si el coste de fabricar una tostadora es el triple que el de fabricar un exprimidor, y cuesta tanto fabricar un aspirador como fabricar 4 exprimidores y 4 tostadoras, ¿cuál es el coste de fabricación de cada electrodoméstico?

Solución

Las incógnitas son:

x = coste de fabricación de cada aspiradora
y = coste de fabricación de cada exprimidor
z = coste de fabricación de cada tostadora

Imponiendo las condiciones del enunciado se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 12y + 6z = 468 \\ z = 3y \\ x = 4y + 4z \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 4y + 2z = 156 \\ 3y - z = 0 \\ x - 4y - 4z = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos por Gauss:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 156 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 156 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & -156 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 156 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -26 & 0 & -156 \end{array}\right)$$

Así la solución es:

$$y = \frac{-156}{-26} = 6$$

$$z = 3 \cdot 6 = 18$$

$$x = 156 - 4 \cdot 6 - 2 \cdot 18 = 96$$

Así pues, cada aspiradora tiene un coste de 96 €, cada exprimidor un coste de 6 € y cada tostadora tiene un coste de 18 €.

Actividad

Un filatélico tiene clasificados sus sellos en tres álbumes distintos: nacionales, resto de Europa y resto del mundo. Se sabe que el 60 % de los sellos del resto del mundo más la mitad de los del resto de Europa representan el 30 % del total de la colección, y que el 20 % de los sellos del resto del mundo más el 60 % del conjunto de los nacionales más el resto de Europa representan el 50 % del total de sellos de la colección. Si tiene 1 000 sellos más del resto de Europa que del resto del mundo, ¿cuántos sellos tiene el filatélico en cada álbum?

Solución

Las incógnitas son:

x = número de sellos de España
y = número de sellos del resto de Europa
z = número de sellos del resto del mundo

Imponiendo las condiciones del enunciado se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0,6\,z + 0,5\,y = 0,3(x + y + z) \\ 0,2z + 0,6(x + y) = 0,5(x + y + z) \\ z + 1000 = y \end{array}\right\}$$

Intercambiando la primera y la segunda ecuación y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \\ y - z = 1000 \end{array}\right\}$$

Resolvemos por Gauss:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to 5F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5000 \end{array}\right)$$

Así la solución es:

$$z = 5000$$
$$y = \frac{6 \cdot 5000}{5} = 6000$$
$$x = -6000 + 3 \cdot 5000 = 9000$$

Así pues, el filatélico tiene 9000 sellos españoles, 6000 del resto de Europa y 5000 del resto del mundo.

Actividad

Discute, en función del parámetro *k*, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + kz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$$

En caso de que sea posible, determina tambien la solución.

Solución

Reduciendo por Gauss la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & 1 \end{array}\right)$$

resultan los casos siguientes:

k = –1 sistema incompatible.
k ≠ –1 compatible indeterminado dependiente de un parámetro. La solución es:

$$z = -\frac{1}{1+k}$$
$$y = \lambda$$
$$x = 1 + \frac{k}{1+k} - \lambda = \frac{1+2k}{1+k} - \lambda$$

Actividad

Un laboratorio farmacéutico fabrica tres tipos de medicamentos (I, II, y III) para los que utiliza tres componentes (A, B y C) con los porcentajes de composición que aparecen en la tabla siguiente:

	I	II	III
A	6 %	8 %	12 %
B	6 %	12 %	8 %
C	8 %	4 %	12 %

El laboratorio investiga para la obtención de un nuevo medicamento a partir de la mezcla de los tres anteriores, de manera que tenga un 8 % de cada uno de los tres componentes. ¿Qué cantidad de cada medicamento hay que incorporar a la mezcla para obtener 100 gramos del nuevo producto?

Solución

Sea x, y, z la cantidad expresada en gramos de los medicamentos I, II y III respectivamente, de forma que podemos expresar una primera ecuación de la siguiente manera:

$x + y + z = 100$

Las proporciones de los componentes A, B y C respecto al total nos da las siguientes ecuaciones:

$0{,}06x + 0{,}08y + 0{,}12z = 8$
$0{,}06x + 0{,}12y + 0{,}08z = 8$
$0{,}08x + 0{,}04y + 0{,}12z = 8$

Resolvemos el sistema formado por estas cuatro ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método de Gauss. Para suprimir decimales, multiplicamos por 100 los coeficientes de las tres últimas ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 6 & 8 & 12 & 800 \\ 6 & 12 & 8 & 800 \\ 8 & 4 & 12 & 800 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 8F_1]{\substack{F_2 \to F_2 - 6F_1 \\ F_3 \to F_3 - 6F_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 6 & 200 \\ 0 & 6 & 2 & 200 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + 2F_2]{F_3 \to F_3 - 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 2 & 6 & 200 \\ 0 & 0 & -16 & -400 \\ 0 & 0 & 16 & 400 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_3]{\substack{F_2 \to F_2 : 2 \\ F_3 \to F_3 : (-16)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda el siguiente sistema, que resolvemos por sustitución regresiva:

$$\begin{cases} z = 25 \\ y = 100 - 3 \cdot 25 = 25 \\ x = 100 - 25 - 25 = 50 \end{cases}$$

Por tanto deben usarse 50 gramos del medicamento I, 25 gramos del medicamento II y otros 25 del medicamento III.

Actividad

Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 5z &= -1 \\ -3x + y - 2z &= 7 \\ 2x - 3y + z &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 + 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right)$$

De donde resulta:

z = 1; y = (10 + 11 · 1) / 7 = 3;
x = –1 + 5 · 1 – 2 · 3 = –2

Actividad

Una compañía aérea de bajo coste realiza vuelos desde París hacia tres ciudades, *A*, *B* y *C*. Calcula el precio de los billetes a cada ciudad a partir de la siguiente información:
Si vende 10 billetes para ir a la ciudad *A*, 15 para ir a la *B* y ninguno para ir a la *C*, ingresa 925 €; si vende 12 billetes para *A*, 8 para *B* y ninguno para *C*, ingresa 760 €; si vende 6 billetes para *A*, 5 para *B* y 8 para *C*, ingresa 855 €.

Solución

Las incógnitas son:

x = precio del billete para la ciudad A
y = precio del billete para la ciudad B
z = precio del billete para la ciudad C

Imponiendo las condiciones del enunciado se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 15y = 925 \\ 12x + 8y = 760 \\ 6x + 5y + 8z = 855 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 185 \\ 3x + 2y = 190 \\ 6x + 5y + 8z = 855 \end{array}\right\}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 185 \\ 3 & 2 & 0 & 190 \\ 6 & 5 & 8 & 855 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - \frac{3}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 185 \\ 0 & -2,5 & 0 & -87,5 \\ 0 & -4 & 8 & 300 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{8}{5}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 185 \\ 0 & -2,5 & 0 & -87,5 \\ 0 & 0 & 8 & 440 \end{array}\right)$$

La solución es:

$$z = \frac{440}{8} = 55$$
$$y = \frac{-87,5}{-2,5} = 35$$
$$x = \frac{185 - 3 \cdot 35}{2} = 40$$

Así pues, un billete para la ciudad A cuesta 40 €, un billete para ir a la ciudad B cuesta 35 € y un billete para ir a la ciudad C cuesta 55 €.

Actividad

Discute, en función del parámetro *k*, el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Solución

Para k = 1 el sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

que es compatible e indeterminado, dependiente de un parámetro.
Para k = –5 el sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

que es incompatible.
Para k ≠ 1 y k ≠ –5 el sistema es compatible determinado.

Actividad

Resuelve y clasifica el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{array}\right\}$$

Solución

La matriz ampliada del sistema es la siguiente:

$$A'=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 1 & 3 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\xrightarrow{F_2\to F_2-F_1} \xrightarrow{F_3\to F_3-F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 12 & -6 & -42 \\ 0 & 8 & -4 & -28 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\to \frac{1}{6}F_2} \xrightarrow{F_3\to \frac{1}{4}F_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3-F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la observación de la tercera fila de la matriz ampliada deducimos que se trata de un sistema compatible indeterminado, con más incógnitas que ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-9y+5z=33 \\ 2y-z=-7 \end{array}\right\}$$

En este caso está formado por 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Luego, el sistema tendrá infinitas soluciones dependientes de 3 – 2 = 1 parámetro. Considerando que z = λ, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x-9y=33-5\lambda \\ 2y=-7+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

Resolvemos por sustitución regresiva:

$$z = \lambda$$

$$y = \frac{\lambda - 7}{2}$$

$$x = 33 - 5\lambda + 9y = \frac{3 - \lambda}{2}$$