COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2023	CONVOCATORIA: JUNIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament que feu

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudieu quan té solució l'equació matricial $A^2 X = B$ en funció del paràmetre real m. (4 punts)
b) Trobeu totes les solucions de l'equació anterior quan aquestes existisquen. (6 punts)

Solució:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & 3+m^2 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A^2) = 9$ i per tant l'equació sempre té solució única.

b) $A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{-6+2m}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{m}{9} \\ 0 & -\frac{m}{3} & \frac{3+m^2}{9} \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ 3+m^2 \end{pmatrix}$.

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obteniu la matriu $(AB^T + I)^{-1}$, on I és la matriu identitat de les dimensions adequades per fer l'operació.
(6 punts)
b) Comproveu que $C^2 = -\alpha^3 I$, on I és la matriu identitat, i calculeu C^{13}. (4 punts)

Solució:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$.

b) $C^{13} = C^{12}C = (C^2)^6 C = (-\alpha^3 I)^6 C = \alpha^{18} C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3. Donada la recta r: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ i els punts $P = (0,0,3)$ i $Q = (2,2\,a)$, obtingueu:

a) Els valors del paràmetre real a si existeixen, per als quals són paral·leles la recta r i la recta que passa pels punts P i Q. (6 punts)
b) L'equació del pla perpendicular a r que passa per P. (4 punts)

Solució:

a) Dos vectors directors de les rectes són $(-1,\ -1,3)$ i $(2,2,a-3)$. Les rectes són paral·leles si $a=-3$.
b) $\pi\colon -x-y+3z-9=0$.

Problema 4. Donada la recta $r\colon \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases}$ i el punt $P=(0,5,2)$, es demana:

a) Comproveu que el punt $Q=(2,6,0)$ pertany a la recta r i trobeu la recta s que passa pels punts P i Q.
b) Obteniu l'angle que formen la recta r i la recta s. (3 punts)
c) Obteniu la projecció ortogonal del punt P en la recta r. (5 punts)

Solució:

a) $(x,y,z)=(0,5,2)+\lambda(2,1,-2)$.
b) $\text{acos}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=35.264º$.
c) $(1,4,1)$.

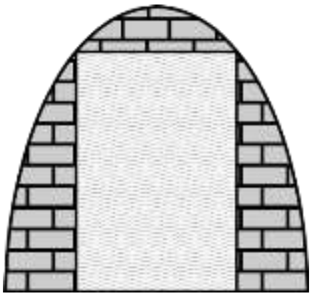
Problema 5. Considereu la funció $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obteniu:

a) El domini i les asímptotes de $f(x)$. (2 punts)
b) Els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i els seus màxims i mínims. (4 punts)
c) L'àrea compresa entre la corba $y=f(x)$ i les rectes $y=0, x=1$ i $x=2$. (4 punts)

Solució:

a) Domini $(-1,0)\cup(0,+\infty)$. AV $x=-1, x=0$.
b) f creix en $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ i decreix en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
El mínim relatiu és $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)-\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\approx\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-4.1985\right)$.
El màxim relatiu és $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\right)\approx\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2.1985\right)$.
c) Àrea $=\int_1^2 f(x)\ dx=\ln\left(\frac{27}{2}\right)-1=1.603$.

Problema 6. El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació $y=-x^2+12$, en la qual x i y es mesuren en metres i $y=0$ representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra. Calculeu:



a) Les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible. (6 punts)
b) Obtingueu l'àrea de la part frontal de la porta de l'apartat anterior i l'àrea de la part frontal de l'entrada recoberta de pedra. (4 punts)

Solució:

a) La funció que proporciona l'àrea és $A(x)=-2x^3+24x$, per a x entre 0 i $\sqrt{12}$. El valor màxim d'aquesta funció és 32, al qual s'arriba en $x=2$. La porta amb major superfície possible té una amplària de 4 m i una altura de 8 m.
b) L'àrea de la porta és de 32 m^2.

L'àrea de la part frontal recoberta per pedra és $\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}(-x^2+12)dx\ -\ 32 = 32\sqrt{3} - 32 \approx$ $23{,}4256\ m^2$.

Problema 7. Tenim dues monedes M_1 i M_2. La probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_1 és x i la probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_2 és y.

a) Si llancem les dues monedes al mateix temps, calculeu les probabilitats de no obtenir cap cara, d'obtenir-ne només una i d'obtenir-ne dues. (3 punts)

b) Després de llançar les dues monedes, tornem a llançar solament les monedes en les quals no hem obtingut cara. Calculeu les probabilitats que el resultat final siga cap cara, només una cara i dues cares. (7 punts)

Solució:

a) $P(M_1 = creu\ i\ M_2 = creu) = (1-x)(1-y)$.
$P(una\ cara) = x(1-y) + y(1-x)$.
$P(M_1 = cara\ i\ M_2 = cara) = xy$.

b) $P(cap\ cara) = (1-x)^2\ (1-y)^2$.
$P(una\ cara) = x(1-y)^2 + y(1-x)^2 +\ x(1-x)\ (1-y)^2 + y(1-y)\ (1-x)^2$.
$P(dues\ cares) = xy + (1-x)xy + x(1-y)y + (1-x)x(1-y)y$.

Problema 8. Cada cap de setmana arriben a l'aeroport d'Alacant 161 vols. D'aquests vols, 95 procedeixen del territori nacional, 50 de la Unió Europea i 16 de països de fora de la Unió Europea. Sabent que es retarden el 5% dels vols de procedència nacional, el 4% dels de procedència de la Unió Europea i el 6,25% de la resta:

a) Calculeu la probabilitat que durant el cap de setmana es retarde un vol. (5 punts)
b) Calculeu la probabilitat que un vol que s'ha retardat procedisca de la Unió Europea. (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Solució:

a) $P(retard) = \frac{31}{644} \approx 0{,}04814$.
b) $P(Unió\ Europea\ |\ retard) =\ \frac{8}{31} \approx 0{,}2581$.

<u>En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado</u>.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & 3+m^2 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A^2) = 9$ y por tanto la ecuación siempre tiene solución única.

b) $A^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{-6+2m}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{m}{9} \\ 0 & -\frac{m}{3} & \frac{3+m^2}{9} \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ 3+m^2 \end{pmatrix}$.

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$.

b) $C^{13} = C^{12}C = (C^2)^6 C = (-\alpha^3 I)^6 C = \alpha^{18} C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,a)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Solución:

a) Dos vectores directores de las rectas son $(-1,-1,3)$ y $(2,2,a-3)$. Las rectas son paralelas si $a = -3$.

b) $\pi: -x - y + 3z - 9 = 0$.

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)
b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)
c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Solución:

a) $(x, y, z) = (0,5,2) + \lambda(2,1,-2)$.

b) acos $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 35.264º$.

c) $(1,4,1)$.

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x + 1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Solución:

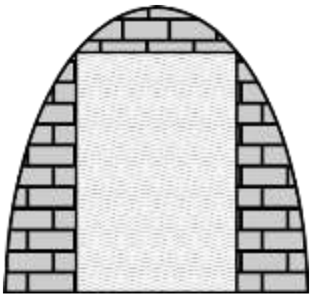
a) Dominio $(-1,0) \cup (0,+\infty)$. AV $x = -1, x = 0$.

b) f crece en $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

El mínimo relativo es $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(1 + \sqrt{5}\right)\right) \approx \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -4.1985\right)$.

El máximo relativo es $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\sqrt{5} - 1\right)\right) \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2.1985\right)$.

c) Área $= \int_1^2 f(x)\ dx = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1 = 1.603$.



Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Solución:

a) La función que proporciona el área es $A(x) = -2x^3 + 24x$ para x entre 0 y $\sqrt{12}$. El valor máximo de esta función es 32 que se alcanza en $x = 2$. La puerta con mayor superfície posible tiene una anchura de 4 m y una altura de 8 m.

b) El área de la puerta es 32 m^2.

El área de la parte frontal recubierta por piedra es $\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}(-x^2+12)dx - 32 = 32\sqrt{3} - 32 \approx 23.4256\ m^2$.

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Solución:

a) $P(M_1 = cruz\ y\ M_2 = cruz) = (1-x)(1-y)$.
$P(una\ cara) = x(1-y) + y(1-x)$.
$P(M_1 = cara\ y\ M_2 = cara) = xy$.

b) $P(ninguna\ cara) = (1-x)^2(1-y)^2$.
$P(una\ cara) = x(1-y)^2 + y(1-x)^2 + x(1-x)(1-y)^2 + y(1-y)(1-x)^2$.
$P(dos\ caras) = xy + (1-x)xy + x(1-y)y + (1-x)x(1-y)y$.

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

a) $P(retraso) = \frac{31}{644} \approx 0.04814$.

b) $P(Unión\ Europea \mid retraso) = \frac{8}{31} \approx 0.2581$.