MAT II

Problema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m.

Para estudiar cuando tienen solución en función del parámetro real m, debemos de construir el sistema de ecuaciones y discutir mediante el Teorema de Rouché-Frobenius.

$$A^2X = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + (2m+2)y + 2z = m \\ (m^2+3)y + mz = 0 \\ 3my + 3z = 9 \end{cases}$$

Hallamos la matriz de coeficientes, y la ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2 & m \\ 0 & m^2+3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Y estudiamos su rango en función de m, así pues, tenemos que calcular el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Según el resultado anterior, sabemos que rg(A) = 3 = rg(A*) = 3=número de incógnitas y por tanto el sistema de ecuaciones es compatible determinado para $\forall m \in R$

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan.

Para hallar las soluciones resolvemos el sistema mediante el método de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} m & 2m+2 & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 9 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 27m - 54$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -9m$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2m+2 & m \\ 0 & m^2+3 & 0 \\ 0 & 3m & 9 \end{vmatrix} = 9m^2 + 27$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{24m - 54}{9} = 3m - 6$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-9m}{9} = -m$$

$$y = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{9m^2 + 27}{9} = m^2 + 3$$

Solución: $(x, y, z) = (3m - 6, -m, m^2 + 3)\ \forall m \in R$

Problema 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación.

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = D$$

$$(A \cdot B^T + I)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

c) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular el valor de C^{13}

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^4 \\ \alpha^5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^6 & 0 \\ 0 & \alpha^6 \end{pmatrix}$$

$$C^5 = C^4 \cdot C = \begin{pmatrix} \alpha^6 & 0 \\ 0 & \alpha^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^7 \\ -\alpha^8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^6 = C^5 \cdot C = \begin{pmatrix} \alpha^6 & 0 \\ 0 & \alpha^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^9 & 0 \\ 0 & -\alpha^9 \end{pmatrix}$$

$$C^7 = C^6 \cdot C = \begin{pmatrix} -\alpha^9 & 0 \\ 0 & -\alpha^9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{10} \\ \alpha^{11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{13} = C^{12} \cdot C = (C^2)^6 \cdot C = (-\alpha^3 \cdot I)^6 \cdot C = \alpha^{18} \cdot C = \alpha^{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, y los puntos

P= (0,0,3) y Q = (2,2, a), obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q.

En primer lugar, vamos a construir la recta que pasa por P y Q.

$$t: \begin{cases} P = (0,0,3) \\ \overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,2,a) - (0,0,3) = (2,2,a-3) \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 3 + (a-3)\lambda \end{cases}$$

Ahora pasamos a forma paramétrica la recta r, para ello le damos valor a $z = \lambda$, y hallamos el valor del resto de variables.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + \lambda = 0 \to x = -2y - \lambda \end{cases}$$

$$x - y = 1 \to -2y - \lambda - y = 1 \to -3y - \lambda = 1 \to -\lambda - 1 = 3y$$
$$\to \frac{-\lambda - 1}{3} = y$$

$$x = 1 + y = 1 + \frac{-\lambda - 1}{3} = \frac{3 - \lambda - 1}{3} = \frac{2 - \lambda}{3}$$

$$r: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{-1}{3} - \frac{\lambda}{3} \lambda, \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} P=\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},0\right) \\ \overrightarrow{d_r}=\left(\frac{-1}{3},\frac{-1}{3},1\right)\cdot(-6)=(2,2,-6) \end{cases}$$

Si las rectas r y t son paralelas, entonces:

$$\overrightarrow{d_s}\ y\ \overrightarrow{d_t}\, son\ proporcionales$$

$$\frac{2}{2}=\frac{2}{2}=\frac{a-3}{-6}\rightarrow\frac{a-3}{-6}=1\rightarrow a-3=-6\rightarrow a=-3$$

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P.

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{d_r}=\overrightarrow{n_\pi}=(2,2,-6) \\ P=(0,0,3) \end{cases}\rightarrow \pi: 2x+2y-6z+D=0$$

Ahora para hallar el valor de D, como sabemos que $P\in\pi$ debemos de sustituirlo en el plano:

$$2\cdot 0+2\cdot 0-6\cdot 3+D=0\rightarrow D=18$$

Y nos queda:

$$\pi: 2x+2y-6z+18=0\rightarrow x+y-3z+9=0$$

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$, y el punto

P= (0,5,2) se pide:

a) Comprobar que el punto Q = (2,6,0) pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q.

Para comprobar que Q pertenece a la recta r, debe de verificar las ecuaciones de la recta:

$$Q \in r \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 2 + 6 + 7 \cdot 0 = 16 \\ 9 \cdot 2 - 6 + 7 \cdot 0 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16 = 16 \\ 12 = 12 \end{cases}$$

Para construir la ecuación de la recta procedemos de la siguiente forma:

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{d_s} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,6,0) - (0,5,2) = (2,1,-2) \\ P = (0,5,2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 5 + \lambda \,, \qquad \lambda \in R \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s.

En primer lugar, necesitamos pasar la recta r a forma paramétrica:

$$z = \lambda$$

$$\begin{cases} 5x + y + 7\lambda = 16 \\ 9x - y + 7\lambda = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 16 - 5x - 7\lambda \\ y = 9x + 7\lambda - 12 \end{cases}$$

$$16 - 5x - 7\lambda = 9x + 7\lambda - 12$$

$$-7\lambda - 7\lambda = 9x + 5x - 28$$

$$-14\lambda + 28 = 14x \rightarrow x = \frac{-14\lambda + 28}{14} \rightarrow x = -\lambda + 2$$

$$y = 9 \cdot (-\lambda + 2) + 7\lambda - 12 = -9\lambda + 18 + 7\lambda - 12 = -2\lambda + 6$$

$$r:\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 6 - 2\lambda, \qquad \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

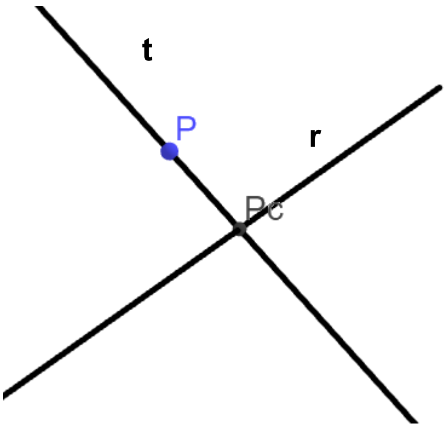
$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{d_s} \cdot \overrightarrow{d_r}|}{|\overrightarrow{d_s}| \cdot |\overrightarrow{d_r}|}$$

$$cos(\alpha) = \frac{|(2,1,-2) \cdot (-1,-2,1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-6|}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{3 \cdot \sqrt{6}}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{6}{3 \cdot \sqrt{6}}\right) = 35º15'8''$$

d) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r.

Primero vamos a mostrar de manera gráfica que es lo que nos piden.



La idea es hallar un plano perpendicular (π) a la recta r y que pasa por P, y posteriormente hallar el punto de corte entre r y el plano.

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (-1,-2,1) \\ Pr = (0,5,2) \end{cases}$$

$$\pi: -x - 2y + z + D = 0$$

$$Pr \in \pi \rightarrow -0 - 2 \cdot 5 + 2 + D = 0 \rightarrow D = 8$$

$$\pi: -x - 2y + z + 8 = 0$$

Y ahora vamos a hallar el punto de corte entre el plano π y la recta r. Así pues, sustituimos las coordenadas en el plao:

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 6 - 2\lambda, \qquad \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$-(2-\lambda) - 2 \cdot (6 - 2\lambda) + \lambda + 8 = 0 \to \lambda = 1$$

Y por tanto el punto de corte del plano con la recta r es:

$$\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 2 \cdot 1 \ = 4 \to Pc = (1,4,1) \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$$\begin{cases} valores\ que\ anulan\ el\ denominador \\ x+1>0 \rightarrow x>-1 \end{cases}$$

$$Domf(x) = (-1,0) \cup (0,+\infty)$$

<u>Asíntotas verticales</u>

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x} + ln(x+1)\right) = -1 + ln(-1+1) = -1 + \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + ln(x+1)\right) = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} + ln(x+1) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} + ln(x+1) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

Hay asíntotas verticales en x=0, y en x=-1

<u>Asíntotas horizontales</u>

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x} + ln(x+1)\right) = \frac{1}{\infty} + ln(\infty+1) = \infty$$

f(x) no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblícuas

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x} + ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{ln(x+1)}{x}\right) = 0$$

f(x) no tiene asíntota oblicua.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ puntos\ donde\ falla\ el\ dominio \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-1\cdot(x+1) + x^2}{x^2\cdot(x+1)} = \frac{-x-1+x^2}{x^2\cdot(x+1)} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{matrix}$$

	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
f(x)	**crece**	**decrece**	**decrece**	**crece**
f'(x)	**+**	**-**	**-**	**+**
	Máx	∄	Mín	

$$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) 0; f'(-1) > 0$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) 2; f'(-0.5) < 0$$

$$\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) 2; f'(1) < 0$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) 3; f'(2) > 0$$

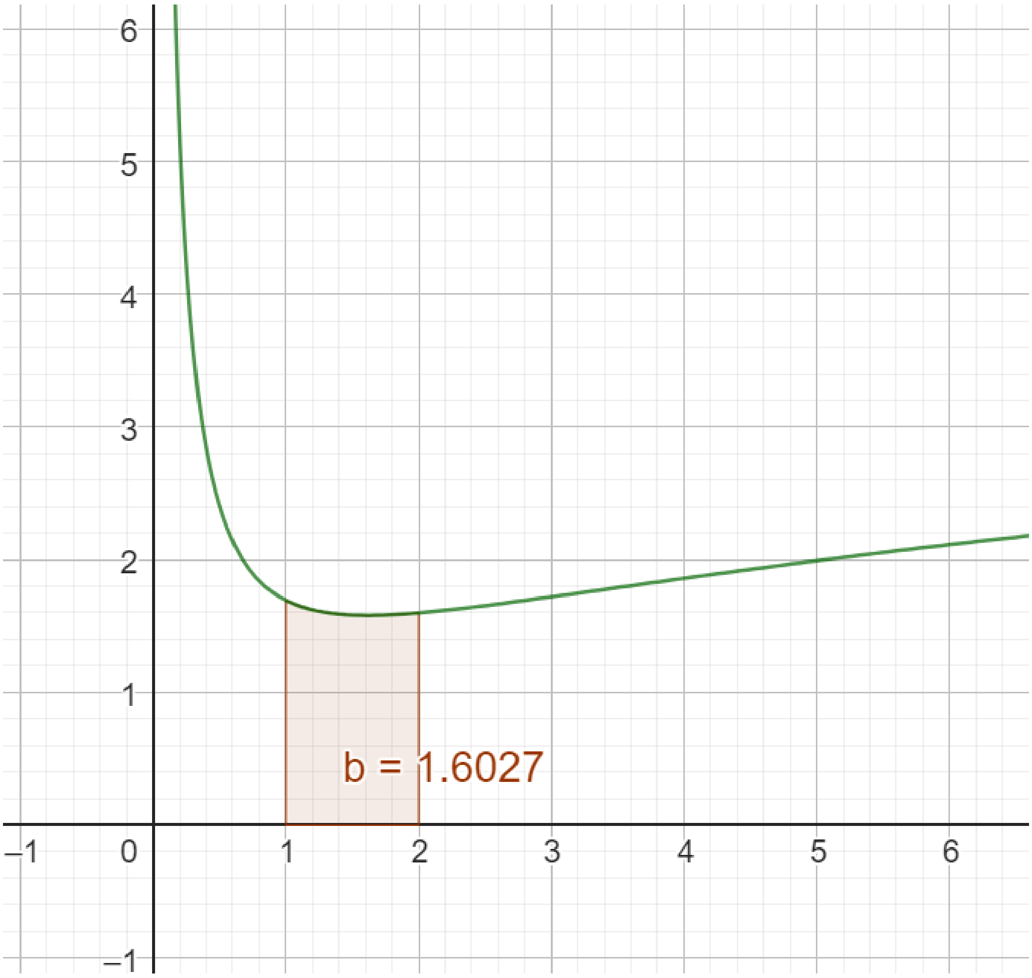
Intervalos de crecimiento = $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

Intervalos de decrecimiento = $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Máximo = $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -2.5805\right)$

Mínimo = $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1.5805\right)$

c) El área comprendida entre la curva y = $f(x)$ y las rectas y = 0, x = 1 y x = 2.



Hay que comprobar que la función toma valores positivos en el intervalo solicitado.

$$\int_1^2 f(x)dx = ln|x| + x \cdot ln(x+1) - x + ln|x+1|]_1^2 = 1.6027$$

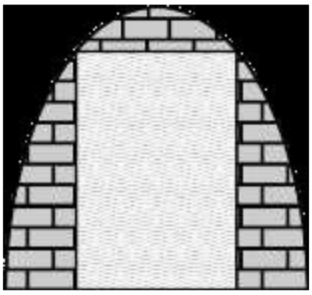
Twitter:@pina_agost
José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x} + ln(x+1)dx = \int \frac{1}{x}dx + \int ln(x+1)dx =$$

$$= ln|x| + x \cdot ln(x+1) - x + ln|x+1| + c, c \in R$$

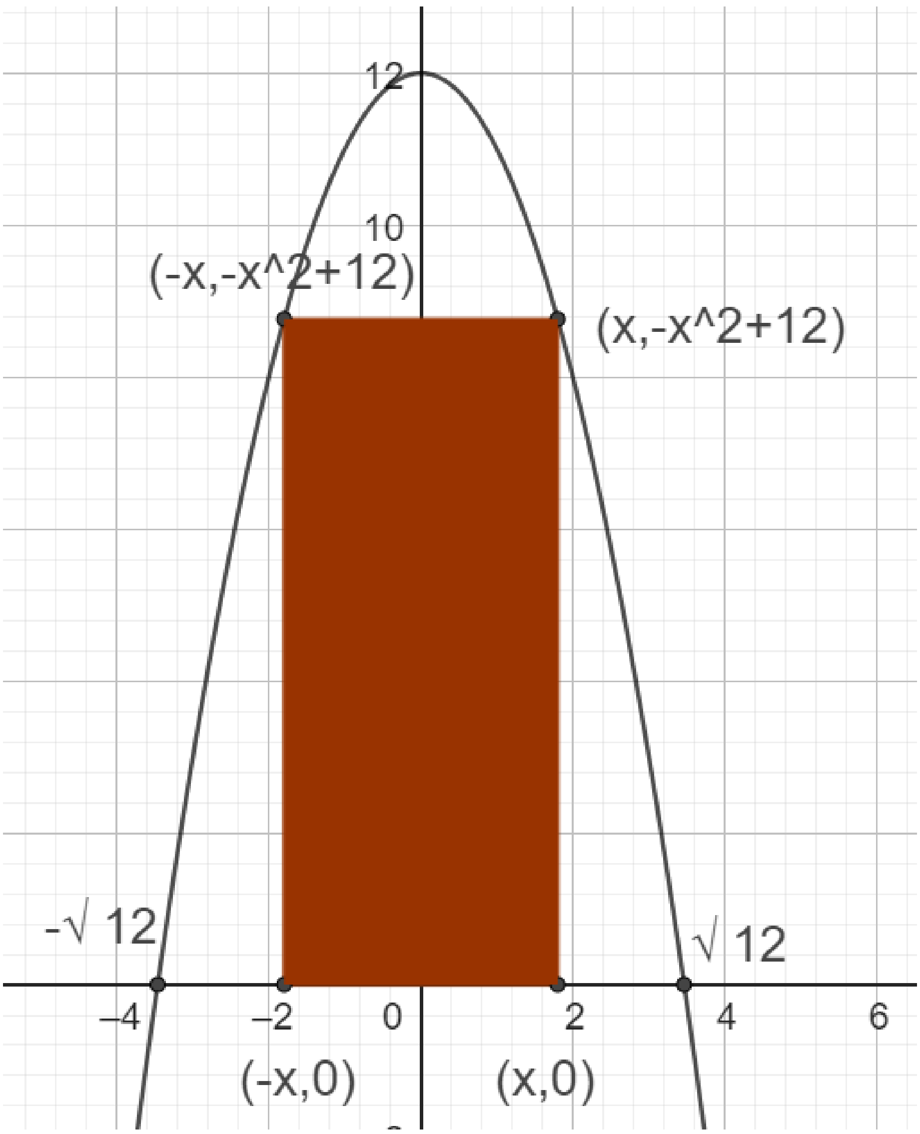
$$\int ln(x+1)dx = x \cdot \ln(x+1) - x + ln|x+1| + c, c \in R$$

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible.

En primer lugar, debemos de representar la función cuadrática, e indicar los puntos de corte.



Así pues, el área del rectángulo queda dada por:

$$A(x) = 2x \cdot (-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x, 0 < x < \sqrt{12}$$

Y para hallar las dimensiones de la puerta con mayor superficie debemos derivar e igualar a cero.

$$f'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

2

f(x)	**crece**	**decrece**
f'(x)	**+**	**-**

Máx

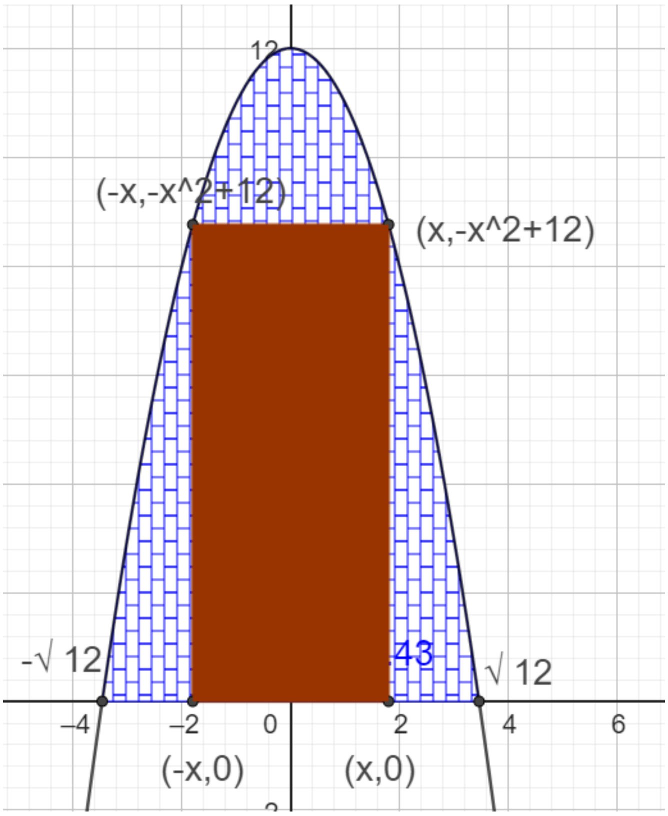
$$(0{,}2)0; f'(1) > 0$$
$$(2, \sqrt{12})2; f'(3) < 0$$

El área del rectángulo es máxima cuando x=2, cuya base mide 4 unidades y la altura 8 unidades.

Cuya área vale:

$$A(x) = -2 \cdot (2)^3 + 24 \cdot 2 = -16 + 48 = 32\ u^2$$

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra.



En este caso, nos solicitan que hallemos el área total, es decir el área de la puesta más el área de la zona recubierta de piedra.

Así pues, lo que nos solicitan es hallar una integral definida:

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} 12 - x^2\, dx = 12x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} = 55.43\, u^2$$

$$\acute{A}rea\ puerta = 32\, u^2$$

$$\acute{A}rea\ zona\ recubierta\ piedra = 55.43 - 32 = 23.43\, u^2$$

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras.

Definimos los sucesos:

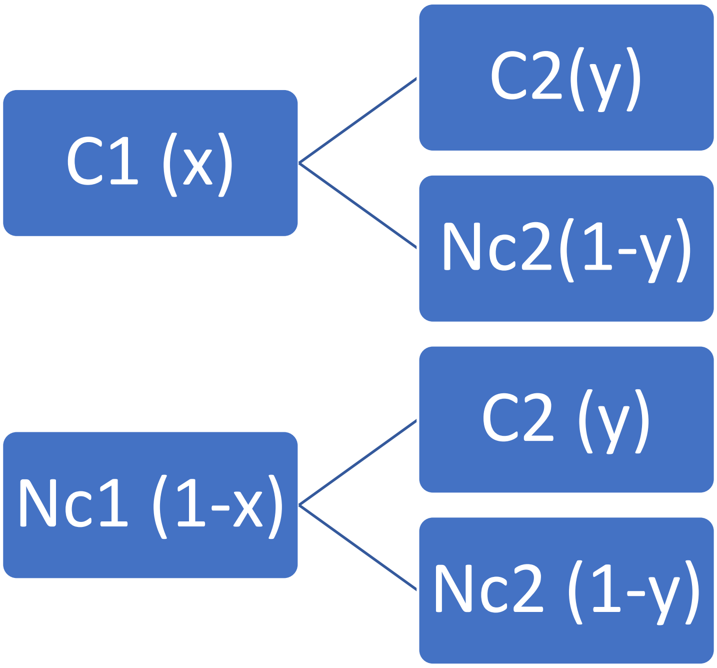
C1= Salga cara en la moneda M_1

Nc1= Salga cruz en la moneda M_1

C2= Salga cara en la moneda M_2

Nc2= Salga cruz en la moneda M_2

Resolvemos mediante un diagrama de árbol:



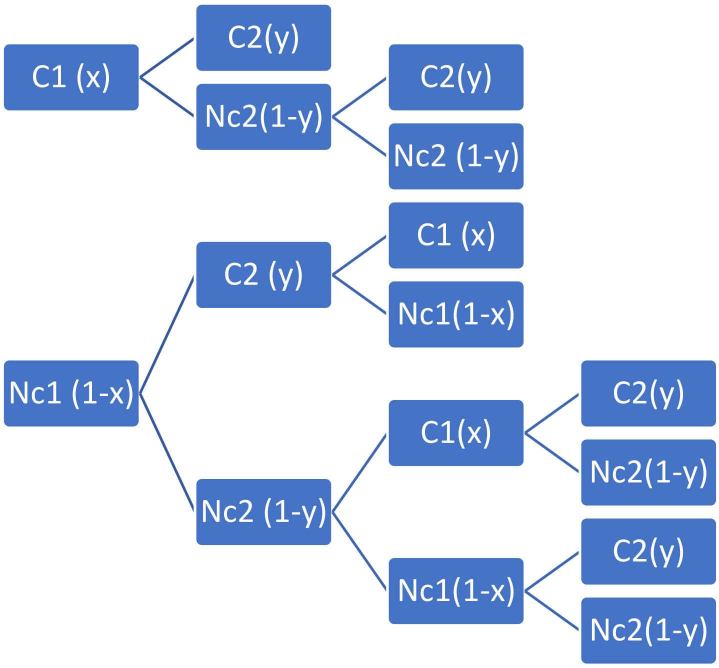
$$P(ninguna\ cara) = (1 - x)(1 - y)$$

$$P(sólo\ 1\ cara) = x \cdot (1 - y) + (1 - x) \cdot y$$

$$P(dos\ caras) = x \cdot y$$

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenida cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras.

Resolvemos mediante un diagrama de árbol, tomando de partida el árbol del apartado anterior.



$$P(ninguna\ cara) = (1-x)(1-y)\cdot(1-x)(1-y) = \\ = (1-x)^2(1-y)^2$$

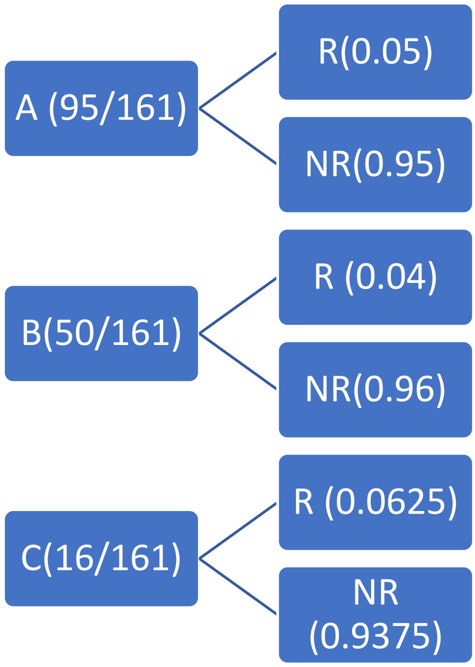
$$P(sólo\ 1\ cara) = \\ = x\cdot(1-y)^2 + (1-x)^2\cdot y + x\cdot(1-x)\cdot(1-y)^2 \\ + (1-x)^2\cdot y\cdot(1-y)$$

$$P(dos\ caras) \\ = x\cdot y + x\cdot y\cdot(1-y) + x\cdot y\cdot(1-x) + x\cdot y\cdot(1-x) \\ \cdot(1-y)$$

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea.

Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase.



$$P(Retrase) = \frac{95}{161} \cdot 0.05 + \frac{50}{161} \cdot 0.04 + \frac{16}{161} \cdot 0.0625$$

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de
la Unión Europea.

$$P(B/Retrase) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot 0.04}{\frac{95}{161} \cdot 0.05 + \frac{50}{161} \cdot 0.04 + \frac{16}{161} \cdot 0.0625}$$