DETERMINANTES.
MATRIZ INVERSA.
RANGO DE UNA MATRIZ.

1. Calcula los determinantes:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución: $|A|=295, |B|=(x+1)^4$

2. Calcula el valor del determinante

$$A=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+1 & x & x \\ x & x & x+1 & x \\ x & x & x & x+1 \end{vmatrix}$$

Solución: $|A|=4x+1$

3. Resuelve la ecuación $\det(A-xI)=0$ **, siendo** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$**, I la matriz unidad de dimensión 2 y x (** $x\in\Re$ **) la incógnita.**

Solución: $x_1=1; x_1=0; x_1=4$

4. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^3=I$ **.**

a) ¿Cuánto vale el $\det(A)$?

b) Si $A^n=I$. **¿Cuánto vale el** $\det(A)$?

Solución:

$a)\ \det(A)=1$

$$\text{b) } \det(A)=\begin{cases} 1, & \text{si n es impar} \\ \pm 1 & \text{si n es par} \end{cases}$$

5. Calcular

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución: $|A|=0$

6. Calcular

$$A=\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

Solución: $|A|=2a^2b^4c^2$

7. Obtener, en función de a, b y c, el valor del determinante:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

Solución: $|A|=-abc$

8. Calcula el valor del determinante:

$$A=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$$

Solución: $|A|=105(b-a)(c-a)(c-b)$

9. Calcula el valor del determinante:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$$

Nota: log simboliza el logaritmo decimal.

Solución: $|A| = 2$

10. Determinar que:

$$A = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

11. Dada la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Se pide: Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes hablar dos soluciones de la ecuación dada sin desarrollar el determinante del primer miembro.

12. Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante de A es igual a cero

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

13. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

14. Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

15. La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ se utiliza para codificar mensajes de la siguiente manera: Se ordenan las letras del alfabeto del 1 al 27 (no se consideran la CH ni la Ll?

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**Ñ**	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**X**	**W**	**Y**	**Z**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**

Los mensajes se traducen entonces a una cadena de números. Estos números se van agrupando de tres en tres, colocando los tríos uno debajo de otro, en una matriz de tres columnas.
Si la última fila queda incompleta, se rellena con ceros. Y, por ultimo, la matriz resultante se multiplica por la matriz A.

Se pide:

a) **Codificar la palabra MATEMATICAS.**

b) **Descodificar el mensaje dado por la matriz** $B=\begin{pmatrix}25 & 2 & -17\\ 24 & 2 & -16\end{pmatrix}$

16. Obtener el valor de k para que el rango de la matriz A sea igual a 2:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 4 & k & -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

Nota: Se puede resolver por Gauss o por determinantes.

Solución: $k=1$

17. Resolver la ecuación matricial $XA=B+C$, donde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$

18. Estudiar para qué valores de k la matriz, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 2 & 1 & k+1\\ 3 & -2 & k-4\end{pmatrix}$ **tiene inversa. Calcula** A^{-1} **en función de k.**

19. Si $A \in M_{m\,x\,n}$, $B \in M_{n\,x\,p}$ y $C \in M_{q\,x\,r}$, ¿qué condiciones deben cumplir p, q y r para qué las operaciones que se indican a continuación puedan ser efectuadas y cuál es el orden de la matriz resultante?
    - **a)** ACB;
    - **b)** A(B+C)
    - **c)** Siendo $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot B$, con A y B dos matrices cuadradas de orden 2, ¿deben de ser necesariamente A= B?

20. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
- **a)** Comprobar que $(A+I)^2 = 0$
- **b)** Justifica que A es invertible y obtén su matriz inversa.
- **c)** Expresa A^2 y A^{-1} como combinación lineal de A y de la matriz identidad I.

21. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- **a)** Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = 0$
- **b)** Justifica que A es invertible y obtén su matriz inversa.
- **c)** Calcula razonadamente A^{10}.

22. Para una matriz cuadrada A, se pide:
- **a)** Explica qué significa que A es invertible.
- **b)** Si A es invertible, demuestra que su determinante es no nulo.
- **c)** Si A es invertible, con det(A) = 5, ¿Cuánto vale det(A^{-1})?