TEMA 1: SISTEMA DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS.

Nombre………………………………………………………………………………… Curso………

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \\ 5x + 2y + 14z = -9 \end{cases}$$

a) Resuelve el sistema por el método de Gauss. (8 puntos)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 14 & -9 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2F2-3F1 \\ 2F3-5F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -13 & 13 \\ 0 & 4 & 13 & -13 \end{array}\right) \to F3+F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que el sistema es compatible indeterminado, puesto que eliminanos una ecuación, así pues tenemos más incognitas que ecuaciones. Y nos queda :

$$\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ -4y - 13z = 13 \end{cases} \to z = \lambda \begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ -4y = 13 + 13\lambda \end{cases}$$

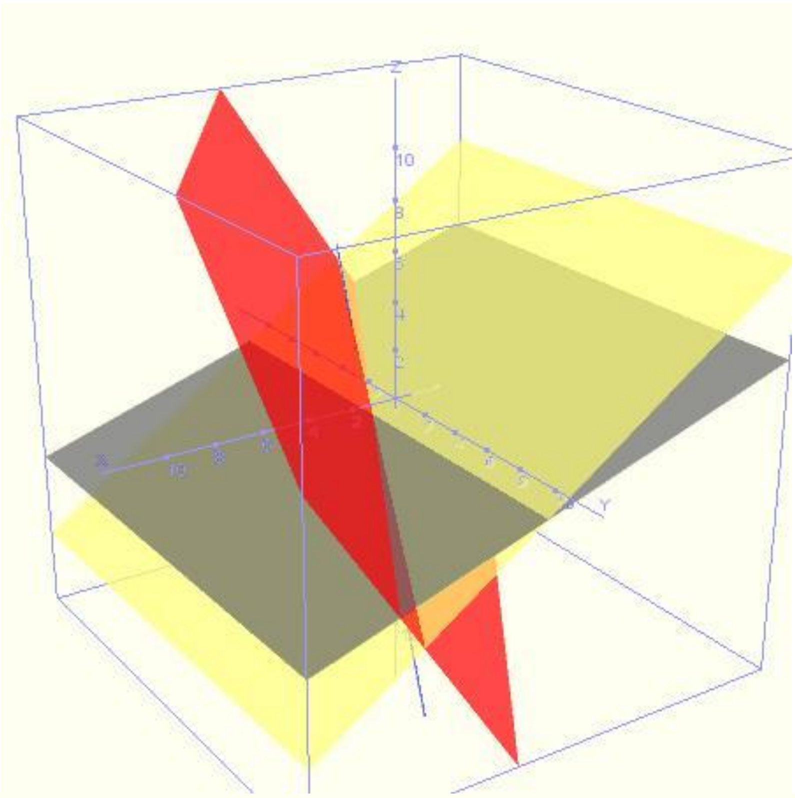
$$x = \frac{-1-3\lambda}{2}$$

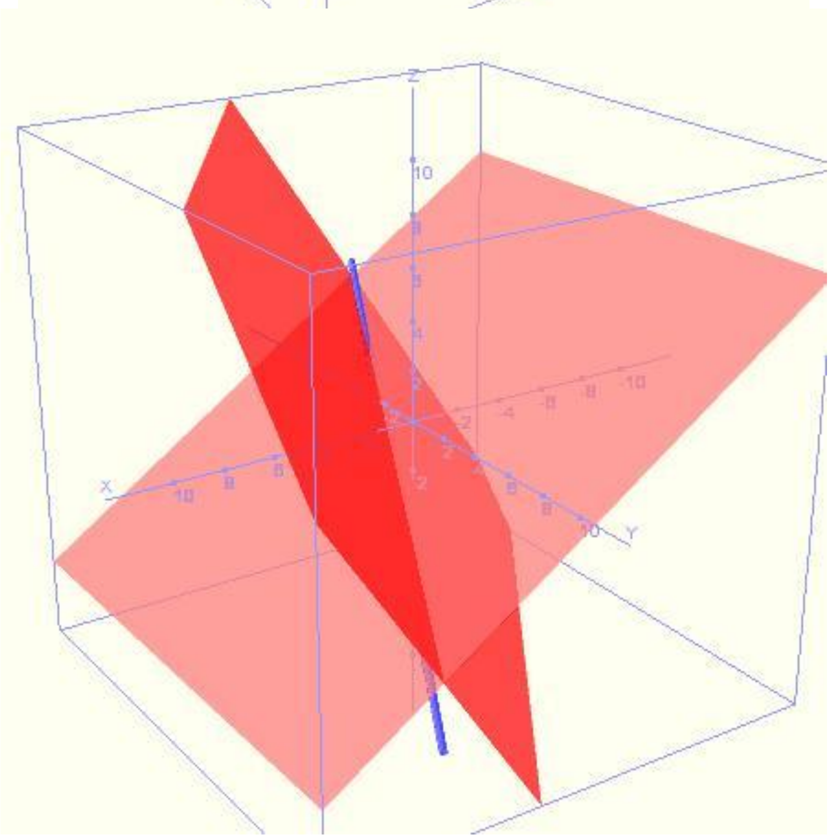
$$y = \frac{13+13\lambda}{-4} \to \left(\frac{-1-3\lambda}{2}, \frac{13+13\lambda}{-4}, \lambda\right), \lambda \in \Re$$

$$z = \lambda$$

b) Interpreta geométricamente la Solución. (2 puntos)

Puesto que se trata de un sistema compatible indeterminado, el sistema tienes infinitas soluciones y los tres planos tienen una recta en común.





Problema A.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + & 2y & +3z = 1 \\ x + & ay & +3z = 2 \\ 2x + & (2+a)y & +6z = 3 \end{cases}$$

a) Encuentra un valor de A para el cual el sistema sea incompatible. (4 puntos)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \to \begin{matrix} F2 - F1 \\ F3 - 2F1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F3 - F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Nos queda } (a - 2)y = 1$

$$\begin{cases} \text{Si a} = 2\text{. El sistema es incompatible.} \\ \text{Si a} \neq 2\text{. El sistema es compatible indeterminado.} \end{cases}$$

b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado. (2 puntos)

No hay ningún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado, puesto que nos quedamos con más incógnitas que ecuaciones.

c) Resuelve el sistema para a=0. (4 puntos)

Partiendo de $(a - 2)y = 1 \to -2y = 1 \to y = \frac{-1}{2}$, pero como se trata de un sistema compatible indeterminado, una de las incógnitas hay que ponerla en función de un parámetro. $z = \lambda$

Despejando: $x + 2y + 3z = 1 \to x = 1 - 2y - 3z \to x = 1 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 3\lambda \to x = -3\lambda + 2$

Solución: $\boxed{\left(-3\lambda + 2, \frac{-1}{2}, \lambda\right), \lambda \in \Re}$

Problema A.3. Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuánto tenia cada jugador al comenzar. (5 puntos)

	Inicial	Pierde 1º	Pierde 2º	Pierde 3º
1º jugador	x	x-y-z	2(x-y-z)	4(x-y-z)=24→x-y-z=6
2º jugador	y	2y	-x+3y-z	2(-x+3y-z)=24→-x+3y-z=12
3º jugador	z	2z	4z	-x-y+7z=24

donde:

x = Cantidad de euros que tiene el 1º jugador.
y = Cantidad de euros que tiene el 2º jugador.
Z = Cantidad de euros que tienen el 3º jugador.

$$\begin{cases} x & -y & -z & =6 \\ -x & +3y & -z & =12 \\ -x & -y & +7Z & =24 \end{cases}$$

b) ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar? (5 puntos)

Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \begin{matrix} F2+F1 \\ F3+F1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) F3+F2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 48 \end{array}\right)$$

4z=48→ z=12
2y-2z=18→ 2y-24=18→y=21
x-y-z=6→x-12-21=6→x=39

Solución: $(x, y, z) = (39,21,12)$.

El primer jugador tenía 39 Euros, el segundo jugador 21 Euros y el tercer jugador 12 Euros.

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema A.1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x & -y & +z & =0 \\ 2x & -y & -z & =5 \\ x & +2y & +z & =-3 \\ 2x & -4y & -z & =8 \end{cases}$$

a) Resuelve el sistema por el método de Gauss. (8 puntos)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} F2-2F1 \\ F3-F1 \\ F4-2F1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} F3-3F2 \\ F4+2F2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right)$$

$$F4+F3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

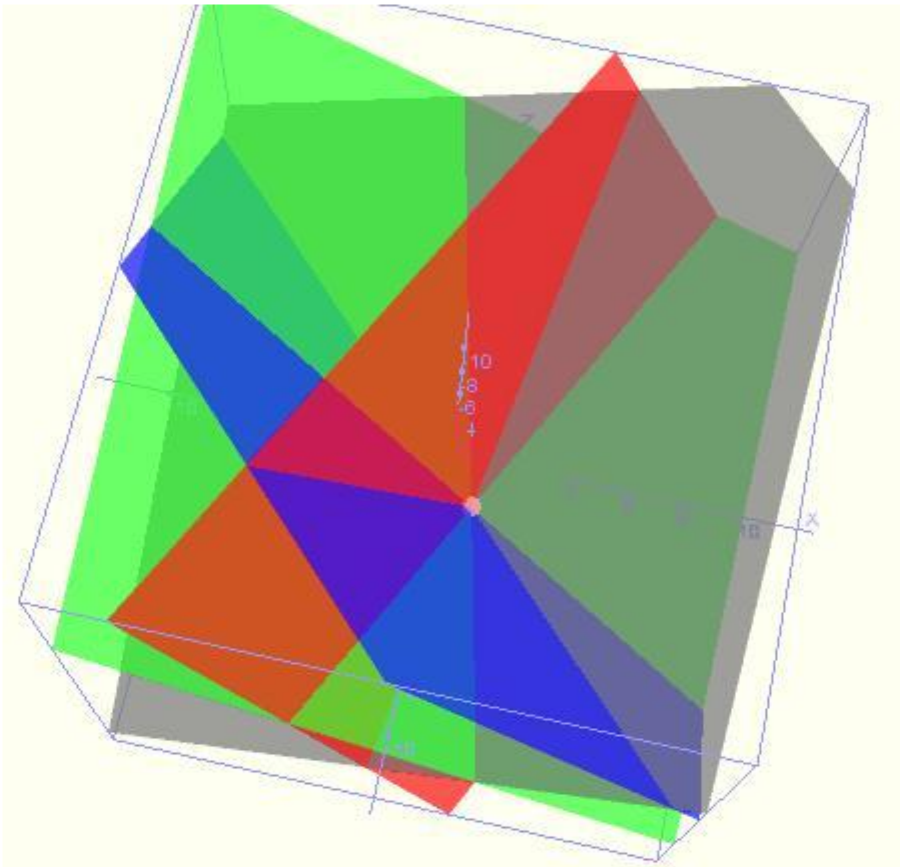
Y nos queda un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas, una de las ecuaciones estaba en función de las otras ecuaciones.

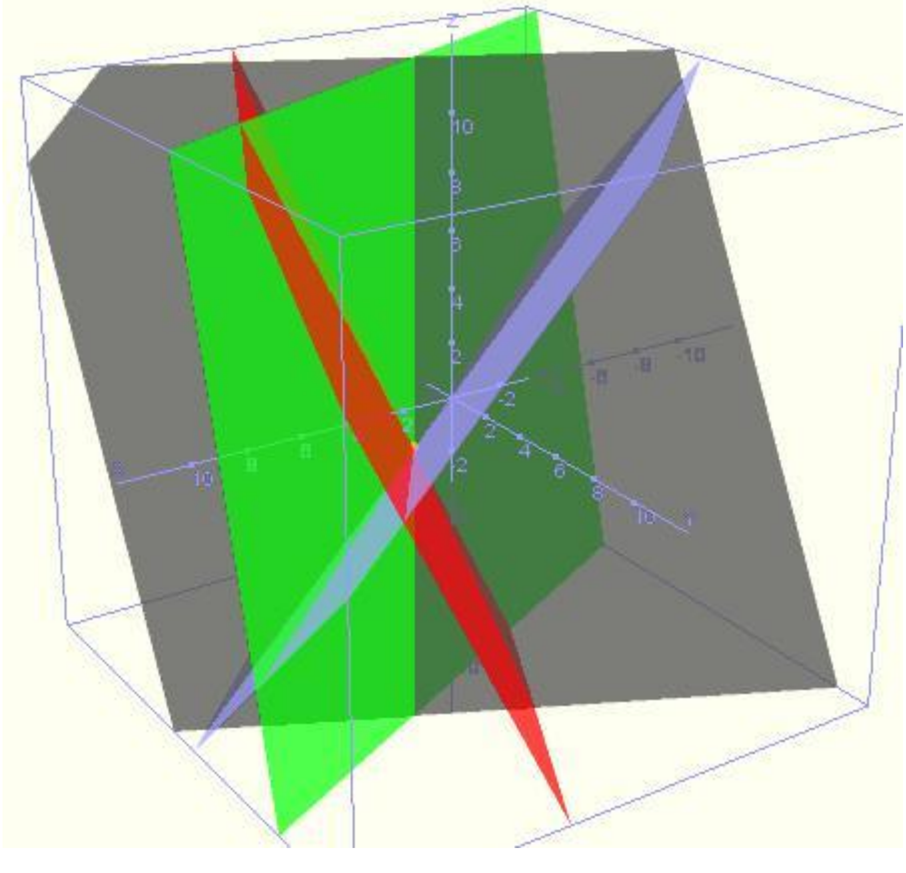
9z = – 18 → z = – 2
y – 3z = 5 → y = – 1
x – y + z = 0 → x= 1

Solución: $\boxed{(x, y, z) = (1, -1, -2)}$

b) Interpreta geométricamente la Solución. (2 puntos)

Los planos se cortan en un punto.





Problema A.2. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m-1 \\ x + 3y + (m.-2)z = m-1 \end{cases}$

donde m **es un parámetro real. Obtener razonadamente:**

a) **Todas las soluciones del sistema** S **cuando** m **= 2.** ***(4 puntos)***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) F3+F2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Nos queda: 0 z = -2 → Implica que el sistema es incompatible.

b) Todos los valores de m **para los que el sistema** S **tiene una solución única.** ***(2 puntos)***

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{array}\right) \begin{matrix} F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m-3 & -1 \end{array}\right) F3+F2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m-2 & -2 \end{array}\right)$$

Nos queda que: $(m-2)z = -2$

Si $\mathrm{m} = 2 \rightarrow 0\mathrm{z} = -2 \rightarrow$ Sistema Incompatible.

Si $\mathrm{m} \neq 2 \rightarrow$ Sistema es compatible determinado.

c) **El valor de** m **para el que el sistema** S **admite la solución (x,y,z) =** $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ ***(4 puntos)***

$$x + y` + z = m \rightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 = m \rightarrow m = 1$$

Pero hay que comprobar que se cumple en todas las ecuaciones.

$2\mathrm{x} + 3\mathrm{z} = 2\mathrm{m} - 1 \rightarrow 3 = 2\mathrm{m} - 1 \rightarrow 4 = 2\mathrm{m} \rightarrow \mathrm{m} = 2$

Por lo que llegamos a una contradición, y por tanto no hay ningún valor de m para el que que el

sistem admita como solución $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

Problema 3. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne pescado y verdura:

- Alimento *Migato*: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento *Catomeal*: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento *Comecat*: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada. (5 puntos)

	Carne	Pescado	Verdura
Migato	600	300	100
Catomeal	300	400	300
Comecat	200	600	200
OFRECER	470	370	160

donde:

x = Porcentaje del compuesto Migato
y = Porcentaje del compuesto Catomeal
z = Porcentaje del compuesto Comecat

$$\begin{cases} 600x & +300y & +200z = 470 \\ 300x & +400y & +600z = 370 \\ 100x & +300y & +200z = 160 \end{cases}$$

b) ¿Qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada? (5 puntos)

Por gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 4{,}7 \\ 3 & 4 & 6 & 3{,}7 \\ 1 & 3 & 2 & 1{,}6 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2F2-F1 \\ 6F3-F1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 4{,}7 \\ 0 & 5 & 10 & 2{,}7 \\ 0 & 15 & 10 & 4{,}9 \end{array}\right) F3-3F2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 4{,}7 \\ 0 & 5 & 10 & 2{,}7 \\ 0 & 0 & -20 & -3{,}2 \end{array}\right)$$

Y nos queda:

-20 z = - 3,2 → z = 0,16

5y +10z = 2,7 → 5y + 1,6 = 2,7 → 5y = 1,1 → y = 0,22

6x + 3y + 2z = 4,7 → 6x + 0,66+ 0,32 = 4,7 → 6x = 3,72 → x = 0,62

Solución:

El porcentaje de Migato es del 62%, de Catomeal el 22% y de Comecat del 16%.