PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. En el espacio se dan las rectas

$$r: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. *(3 puntos)*

Solución:
Previamente vamos a obtener los vectores directores de ambas rectas.

Como la ecuación de la recta r está dada en forma paramétrica, sabemos que $\vec{v}_r = (1,2,1)$
A partir de la ecuación de la recta s, dada como intersección de dos planos, obtengamos la forma paramétrica Para ello de la primera ecuación despejamos la x y de la segunda la z:

$$s: \begin{cases} x = 1-2y \\ z = 2+\alpha+3y \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} x = 1-2\mu \\ y = \mu \\ z = 2+\alpha+3\mu \end{cases} \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{v}_s = (-2,1,3)$$

a) Las rectas r y s estarán contenidas en un plano si son paralelas o se cortan en un punto.
Veamos si son paralelas, ¿son proporcionales sus vectores directores? ¿$\frac{1}{-2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$?

Como $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ entonces los vectores no son proporcionales, las rectas no son paralelas.
En consecuencia las rectas r y s deben cortarse.

Para que se corten el siguiente sistema debe tener solución, $\begin{cases} 3+\lambda = 1-2\mu \\ -1+2\lambda = \mu \\ 2+\lambda = 2+\alpha+3\mu \end{cases}$

Arreglamos el sistema considerando que las incógnitas son λ y μ, $\begin{cases} \lambda+2\mu = -2 \\ 2\lambda-\mu = 1 \\ \lambda-3\mu = \alpha \end{cases}$ *. Por ser un sistema de 2 incógnitas y 3 ecuaciones, para que tenga solución el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo, es decir:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\alpha+12+2-2+3-4\alpha = 0 \rightarrow -5\alpha+15 = 0 \rightarrow -5\alpha = -15 \rightarrow \alpha = \frac{-15}{-5} = 3$$

Por lo tanto, para $\alpha = 3$ las rectas r y s están contenidas en un plano.

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

b) $\alpha = 3$. *Busquemos el punto de corte entre r y s resolviendo el sistema del apartado anterior.*

$\begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 2\lambda - \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = \alpha \end{cases}$, *como* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2-4 = -5 \neq 0$ *y* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ *(obtenido en el apartado anterior), el sistema es compatible y determinado. Resolvemos el sistema usando las ecuaciones primera y segunda (las que aportan el menor de orden 2 no nulo):*

$\begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 2\lambda - \mu = 1 \end{cases}$, *resolvámoslo por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2:* $\begin{cases} \lambda + 2\mu = -2 \\ 4\lambda - 2\mu = 2 \end{cases}$ *sumando ambas ecuaciones:* $5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0$.

Sustituyendo este valor de λ en la recta r obtendremos, P, el punto de corte buscado, $\begin{cases} x = 3 + 0 = 3 \\ y = -1 + 2.0 = -1 \\ z = 2 + 0 = 2 \end{cases}$, *luego*

$P(3, -1, 2)$.

La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s viene determinada por el punto P y los vectores directores de r y s, $\vec{v}_r$ *y* $\vec{v}_s$. *La ecuación de este plano será:*

$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, *desarrollando por la primera fila:* $(x-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

calculando los menores: $(x-3)(6-1) - (y+1)(3+2) + (z-2)(1+4) = 0$

$5(x-3) - 5(y+1) + 5(z-2) = 0$, *simplificando entre 5,*

$(x-3) - (y+1) + (z-2) = 0$

$x - 3 - y - 1 + z - 2 = 0$

$x - y + z - 6 = 0$

Solución: la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para $\alpha = 3$ es $x - y + z - 6 = 0$

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto (1, 2 , 1). *(3 puntos)*

Buscamos un plano $\pi \;/\; \pi \perp r$ *y* $(1, 2, 1) \in \pi$

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$

La ecuación del plano π será: $x + 2y + z + D = 0$

Como debe contener al punto $(1, 2, 1)$, $1 + 2 . 2 + 1 + D = 0 \rightarrow 1 + 4 + 1 + D = 0 \rightarrow 6 + D = 0 \rightarrow D = -6$

Finalmente, el plano π será: $x + 2y + z - 6 = 0$

d) El punto de corte de las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado **a).** *(2 puntos)*

Problema A.2. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases}(2m+2)x & +my & +2z & =2m-2\\ 2x & +(2-m)y & & =0\\ (m+1)x & & +(m.+1)z & =m-1\end{cases}$

donde m es un parámetro real. **Obtener razonadamente:**

a) Estudia la compatibilidad del sistema en función de los distintos valores de m. *(5 puntos)*

Solución:
Se forman la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A:*

$$A=\begin{pmatrix}2m+2 & m & 2\\ 2 & 2-m & 0\\ m+1 & 0 & m+1\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}2m+2 & m & 2 & 2m-2\\ 2 & 2-m & 0 & 0\\ m+1 & 0 & m+1 & m-1\end{pmatrix}$$

*Para estudiar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones hay que aplicar el **Teorema de Rouche-Fröbenius** que nos dice:*

Si rg(A) = rg(A) = nº de incognitas → Sistema Compatible Determinado (SCD)*
Si rg(A) = rg(A) < nº de incognitas → Sistema Compatible Indeterminado (SCI)*
Si rg(A) ≠ rg(A) → Sistema Incompatible(SI)*

El máximo rango que pueden tener ambas matrices es 3, empezamos calculando el determinante de la matriz de coeficientes, y el resultado lo igualamos a 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}2m+2 & m & 2\\ 2 & 2-m & 0\\ m+1 & 0 & m+1\end{vmatrix}=2m.-2m^3=-2m\cdot(m+1)\cdot(m-1)=0$$

$$-2m\cdot(m+1)\cdot(m-1)=0\begin{cases}-2m=0\to m=0\\ m+1=0\to m=-1\\ m-1=0\to m=1\end{cases}$$

Entonces, sabemos que cuando $m=\{0,\pm1\}$, el determinante de la matriz de coeficientes es 0, y por tanto su rango es menor que 3.

Ahora discutimos la compatibilidad del sistema de ecuaciones:

<u>1 er Caso:</u> $m\neq\{0,\pm1\}$

Si $m\neq\{0,\pm1\}$ → rg(A)=rg(A)=nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado (SCD)*

2 º Caso: $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = ?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \to rg(A) = 2$$

$rg(A^*) = ?$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 - 2 \\ 2 & 2 & 0 \;\; 0 \\ 1 & 0 & 1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^*_1| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$|A^*_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$|A^*_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$|A^*_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \to rg(A^*) = 2$$

Si m = 0 → rg(A) = rg(A) < nº incógnitas → Sistema compatible indeterminado (SCI)*

3 er Caso: $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = ?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0 \to \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \to rg(A) = 2$$

rg(A) = ?*

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango máximo de la matriz ampliada es 3, y puesto que la columna de término independientes es 0, el rg((A) = rg(A).*

Si m = 1 → rg(A)=rg(A) < nº incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado (SCI)*

4º Caso: $m = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = ?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.\ \text{Porque tiene una fila de ceros.} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$rg(A^*) = ?$

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A^*_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

Si m ≠ -1 → rg(A) rg(A) < nº incógnitas → Sistema Incompatible (SI)*

SOLUCIÓN

Si $m \neq \{0, \pm 1\}$ *→ rg(A)=rg(A*)=nº incógnitas → Sistema Compatible Determinado (SCD)*

Si m = 0 → rg(A) = rg(A) < nº incógnitas → Sistema compatible indeterminado (SCI)*

Si m = 1 → rg(A)=rg(A) < nº incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado (SCI)*

Si m ≠ -1 → rg(A) rg(A) < nº incógnitas → Sistema Incompatible (SI)*

b) Resuélvelo, si es posible, para m=1. *(5 puntos)*

$$\begin{cases} 4x & +y & +2z = 0 \\ 2x & +y & = 0 \\ 2x & & +2z = 0 \end{cases}$$

Podemos observar que F3= F1-F2, por tanto la podemos eliminar y nos queda:

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow y = \lambda$$

$$2x + y = 0 \rightarrow 2x + \lambda = 0 \rightarrow x = \frac{-\lambda}{2}$$

$$4x + y + 2z = 0 \rightarrow 4\left(\frac{-\lambda}{2}\right) + \lambda + 2z = 0 \rightarrow -2\lambda + \lambda + 2z = 0 \rightarrow z = \frac{\lambda}{2}$$

SOLUCIÓN:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-\lambda}{2}, \lambda, \frac{\lambda}{2}\right), \lambda \in \Re$$

Problema A.3. Consideramos los puntos: A = (1, 0, 0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (2,1,2). Se pide

a) Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D (*5 puntos*).

Solución:

a) Para calcular el área del triángulo de vértices B, C y D usamos la fórmula

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$$

Calculamos los vectores indicados,

$$\overrightarrow{BC}=(0,0,1)-(0,1,0)=(0,-1,1) \quad y \quad \overrightarrow{BD}=(2,1,2)-(0,1,2)=(2,0,2)$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\text{Luego} \quad A=\frac{1}{2}2\sqrt{3}=\sqrt{3} \ \ u.a.$$

b) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D (*5 puntos*).

El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D se obtiene como sigue

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(C_1-C_2)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{6}(-1-1-2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

El volumen del tetraedro es $\frac{2}{3}$ $u.v.$

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: **Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.**
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema B.1. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. ***(3 puntos)***

Solución:

a) Calculemos las ecuaciones paramétricas de las rectas resolviendo los sistemas que las definen,

$$r:\begin{cases} x \qquad +z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, *resolvemos usando* x *e* y *como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} x \qquad = 2-z \\ 2x-y=-z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:*

$2(2-z)-y=-z; \quad 4-2z-y=-z; \quad -y=-4+2z-z; \quad -y=-4+z; \quad y=4-z$

luego $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$ *y un punto y un vector director de la recta* r *serán:* $P_r=(2,4,0)$, $\vec{v}_r=(-1,-1,1)$

$$s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *resolvemos usando* z *e* y *como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} -y \qquad =3-2x \\ -y-z=2-x \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y=-3+2x$

Sustituyendo el valor de y *en la 2ª ecuación:*

$-(-3+2x)-z=2-x; \quad 3-2x-z=2-x; \quad -z=2-x-3+2x; \quad -z=-1+x; \quad z=1-x$

luego $r:\begin{cases} x=\mu \\ y=-3+2\mu \\ z=1-\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$ *y un punto y un vector director de la recta* s *serán:* $P_s=(0,-3,1)$, $\vec{v}_s=(1,2,-1)$

b) La posición relativa de las rectas *r* y *s*. *(4 puntos)*

Construimos las matrices compuestos de los vectores directores de r y s y del vector formado por los puntos de las rectas.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos su rango:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0 \rightarrow rg(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow rg(M^*) = 3$$

Y puesto que rg(M) ≠ rg(M*) → Las rectas se cruzan.

c) Determinar la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*. *(3 puntos)*

c) Buscamos un plano $\pi \;/\; r \subset \pi \quad y \quad \pi \,//\, s$*, por lo tanto del plano* π *conocemos* $\begin{cases} P_r \in \pi \\ \vec{v}_r \text{ es director de } \pi \\ \vec{v}_s \text{ es director de } \pi \end{cases}$

Por lo tanto, las ecuaciones del plano π *serán:*

Ecuación paramétrica: $\pi : \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 4 - \lambda + 2\mu \\ z = \quad \lambda - \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \Re$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\,(-1) - (y-4)\,0 + z\,(-1) = 0$$

$$-x + 2 - z = 0; \quad x + z = 2$$

$$\pi: \; x + z = 2$$

Problema B.2. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x & +ay & +2z & = & 2 \\ x & -y & -az & = & 1 \\ 3x & -ay & & = & 5 \\ & 2ay & +3z & =2 & \end{cases}$

donde a es un parámetro real. **Obtener razonadamente:**

a) **Estudia la compatibilidad del sistema en función de los distintos valores de a.** ***(5 puntos)***

Solución:

Se forman la matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & -a & 0 \\ 0 & 2a & 3 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -a & 1 \\ 3 & -a & 0 & 5 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para estudiar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones hay que aplicar el ***Teorema de Rouche-Fröbenius*** *que nos dice:*

Si rg(A) = rg(A) = nº de incognitas → Sistema Compatible Determinado (SCD)*
Si rg(A) = rg(A) < nº de incognitas → Sistema Compatible Indeterminado (SCI)*
Si rg(A) ≠ rg(A) → Sistema Incompatible(SI)*

El máximo rango que puede tener ambas la matriz de coeficientes es 3, mientras que la matriz ampliada puede ser de rango 4. Por ello, empezamos hallando los valores que $|A^*|=0$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -a & 1 \\ 3 & -a & 0 & 5 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ F2-F1 \\ F3-3F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 2 \\ 0 & -1-a & -a-2 & -1 \\ 0 & -4a & -6 & -1 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-a & -a-2 & -1 \\ -4a & -6 & -1 \\ 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1-a & -a-2 & -1 \\ -4a & -6 & -1 \\ 2a & 3 & 2 \end{vmatrix} = \left(12+12a+12a+2a^2+4a\right)-\left(12a+3+3a+8a^2+16a\right)=-6a^2-3a+9=0$$

a =-3/2
a = 1

<u>1 ^{er} Caso:</u> $a \neq \left\{1, \frac{-3}{2}\right\}$

Si $a \neq \left\{1, \frac{-3}{2}\right\}$ → *rg(A) ≠ rg(A*)=nº incógnitas* → *Sistema Incompatible (SI)*

<u>2 ^{o} Caso:</u> $a = 1$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A^*| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = ?$

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \rightarrow rg(A) = 2$$

Si $a = 1$ → *rg(A) ≠rg(A*)* → *Sistema Incompatible. (SI)*

<u>3 ^{er} Caso:</u> $a = -3/2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3/2 & 1 \\ 3 & 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A^*| = 0$$

$rg(A^*) = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3/2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 2 \\ 1 & -1 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = ?$

Puesto que todos los menores de orden 3 son 0, el rg(A) $\leq$ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3/2 = 1/2 \rightarrow rg(A) = 2$$

Si $a = -3/2$ → *rg(A) ≠ rg(A*)* → *Sistema Incompatible (SI)*

SOLUCIÓN

Si $a \neq \left\{1, \frac{-3}{2}\right\}$ → *rg(A) ≠ rg(A*)=nº incógnitas* → *Sistema Incompatible (SI)*

Si $a = 1$ → *rg(A) ≠rg(A*)* → *Sistema Incompatible(SI)*

Si $a = -3/2$ → *rg(A) ≠ rg(A*)* → *Sistema Incompatible (SI)*

b) **Resuélvelo, en los casos de compatibilidad.** ***(5 puntos)***

No hay ningún caso que podamos resolver.

Problema B.3. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación x + 4 y – 2 z – 4 = 0 con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:

a) El área del triángulo ABC. ***(5 puntos)***

Solución:
Calculemos los puntos A, B y C.
A – punto de corte entre el plano y el eje OX

La ecuación del eje OX la podemos dar como intersección de dos planos: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

El sistema a resolver para encontrar el punto A es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de y, z en la primera ecuación obtenemos x – 4 = 0, luego x = 4. El punto A tiene de coordenadas (4 , 0 , 0)

Similarmente obtenemos los restantes puntos.
B – punto de corte entre el plano y el eje OY

El sistema a resolver para encontrar el punto B es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, z en la primera ecuación obtenemos 4 y – 4 = 0, luego y = 1. El punto B tiene de coordenadas (0 , 1 , 0)

C – punto de corte entre el plano y el eje OZ

El sistema a resolver para encontrar el punto C es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y en la primera ecuación obtenemos – 2 z – 4 = 0, luego z = – 2. El punto C tiene de coordenadas (0 , 0 , – 2)

a) Área del triángulo ABC.

Para calcular esta área utilizamos la siguiente fórmula $S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$

$$\vec{AB} = (0,1,0) - (4,0,0) = (-4,1,0)$$

$$\vec{AC} = (0,0,-2) - (4,0,0) = (-4,0,-2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} = (-2,-8,4)$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \left|(-2,-8,4)\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 64 + 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

$$\textit{Finalmente} \quad S = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} = \sqrt{21}\ u^2$$

b) El perímetro del triángulo ABC. ***(5 puntos)*.**

b) Perímetro del triángulo ABC.

P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) =

$$= \sqrt{(0-4)^2+(1-0)^2+(0-0)^2} + \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2+(-2-0)^2} + \sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0+2)^2} = \sqrt{16+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{16+4} =$$

$$= \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \approx 10'83\,u$$