EJERCICIOS PROPUESTOS EN LAS P.A.U. DE LA C. V.

BLOQUE 2: ANÁLISIS.

JUN00 P3A : El beneficio, y, en millones, de una sociedad en función de la inversión, x, en millones, viene dado por $y = x^2 + 2x + 7$.

Obtén la derivada del beneficio, y, respecto de la inversión, x, cuando la inversión es de 2 millones y cuando la inversión es de 3 millones. Utiliza las derivadas obtenidas para calcular, aproximadamente, el beneficio cuando la inversión es de 2,01 millones y cuando la inversión es de 3,02 millones.

Resolución:

$$y' = 2x + 2 \rightarrow \begin{cases} y'(2) = 6 \\ y'(3) = 8 \end{cases}$$

La derivada indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto.

Esta recta tangente, dado que tiene la misma inclinación que la gráfica en su punto de tangencia, resulta ser una aproximación de la función cuando x toma valores cercanos al punto de tangencia.

Así, si calculamos la recta tangente a la gráfica en $x = 2$:

$$y = ax + b \rightarrow (a = y'(2) = 6) \rightarrow y = 6x + b.$$

Y calculamos b utilizando que la recta pasa por el punto $(2, y(2)) = (2, 15)$. Así, en la ecuación de la recta, sustituimos $x = 2; y = 15$:

$$y = 6x + b \rightarrow 15 = 6 \cdot 2 + b \rightarrow b = 3$$

Con lo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = 2$ es $\mathbf{y = 6x + 3}$.

Tal como explicábamos al principio, esta recta es una buena aproximación a la función $y = x^2 + 2x + 7$, para valores de x muy cercanos a $x = 2$.

Por lo que para $x = 2.01$, el valor aproximado de la función es:

$$6 \cdot 2.01 + 3 = 15.06$$

Repitiendo el proceso para $x = 3$, obtenemos que la recta tangente a la gráfica es $y = 8x - 2$, con lo que el valor aproximado de la función es:

$$8 \cdot 3.02 - 2 = 22.16$$

JUN01 P3A : Se calcula que el valor de una acción t meses después de salir al mercado y durante el primer año viene dado por la función $v(t) = t^2 - 6t + 10$. Explicar razonadamente en qué mes conviene comprar las acciones para adquirirlas al precio más ventajoso.

Resolución:

Si queremos comprar al precio más ventajoso, buscamos que su valor sea mínimo.

Así, buscaremos un mínimo para la función $v(t)$.

Localizamos los puntos críticos, calculando la 1ª derivada e igualándola a 0:

$$v'(t) = 2t - 6 \rightarrow 2t - 6 = 0 \rightarrow t = 3$$

Así pues sólo tenemos un punto crítico. Para que sea un mínimo habrá de cumplir que la 2ª derivada en $t = 3$ habrá de dar >0:

$$v''(t) = 2 \rightarrow v''(3) = 2 > 0$$

Luego $t = 3$ es un mínimo de $v(t)$. Y por eso conviene comprar las acciones al tercer mes.

JUN02 P3A : La velocidad en (m/s) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dada en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión: $f(x) = -0,00055x(x-300)$. Deducir de forma razonada:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?

b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?

c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

Resolución:

a) Veamos primero cuándo alcanza su velocidad máxima. Para ello buscaremos un máximo a la función velocidad.

Puntos críticos:

$$f'(x) = -0.0011x + 0.165 \rightarrow -0.0011x + 0.165 = 0 \rightarrow x = \frac{-0.165}{-0.0011} = 150.$$

Para comprobar que $x = 150$ es un máximo, la 2ª derivada en ese punto habrá de ser <0:

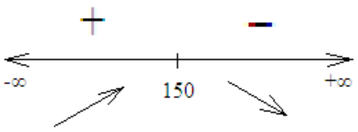
$$f''(x) = -0.0011 \rightarrow f''(150) = -0.0011 \rightarrow x = 150 \text{ es un máximo.}$$

Así, la velocidad máxima se alcanza cuando el atleta lleva 150 m recorridos.

$f(150)$ es la velocidad en ese instante: $f(150) = -0.00055 \cdot 150 \cdot (150-300) = 12.375\ m/s$

b) Necesitamos estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

Para ello estudiaremos el signo de $f'(x) = -0.0011x + 0.165$. Ya conocemos el único punto crítico $x = 150$:



$\Rightarrow f(x)$ es creciente en]0,150[y decreciente en]150,200[.

Así, su velocidad va aumentando desde la salida (0 m) hasta los 150 m de carrera y a partir de los 150 m la velocidad empieza a disminuir hasta llegar a meta (200 m).

c) Cuando $x = 200$, $f(200) = 11 m/s$

SEP02 P3A: La relación entre la temperatura del aire T (en ° F) y la altitud h (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \leq h \leq 20000$. Si la temperatura a nivel del mar es de 60° F y por cada 5000 m de altitud que se sube, la temperatura del aire baja 18° F, se pide:

a) Expresar T en función de h.

b) Calcular de forma razonada la temperatura del aire a una altitud de 15000 m.

c) Calcular de forma razonada la altitud a la que la temperatura es 0° F.

Resolución:

a) Dado que la temperatura del aire (T) depende de la altitud (h). T es la variable dependiente y h la independiente. Como la relación es lineal se tiene:

$$T(h) = ah + b \quad (0 < h < 20000).$$

Utilizando los datos que se aportan calculamos a y b:

Cuando $h = 0$ (nivel del mar) $\rightarrow T(0) = a \cdot 0 + b = 60 \Rightarrow b = 60$.

Cuando $h = 5000 \rightarrow T(5000) = a \cdot 5000 + 60 = 42$ (ha bajado 18º) $\Rightarrow a = \frac{-18}{5000} = \frac{-9}{2500}$

Por tanto $T(h) = \frac{-9}{2500}h + 60$.

b) $h = 15000 \rightarrow T(h) = \frac{-9}{2500} \cdot 15000 + 60 = 6^{\circ} F$

c) $T(h) = 0 \rightarrow \frac{-9}{2500}h + 60 = 0 \rightarrow h = \frac{60 \cdot 2500}{9} = \frac{50\,000}{3} = 16666'\widehat{6}\ m$

$\boxed{\text{SEP02 P3A}}$: Se calcula que entre las 2000 y 5000 revoluciones por minuto el consumo de gasolina de un motor viene dado por la función $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$, donde $f(x)$ indica los litros consumidos en una hora y x viene expresada en miles de revoluciones por minuto. Hallar de forma razonada:

a) Las revoluciones con las que el consumo del motor es mínimo.

b) Las revoluciones con las que el consumo del motor es máximo, y

c) Dichos consumos.

Resolución:

$D(f) = [2, 5]$, ya que x se mide en miles de revoluciones por minuto.

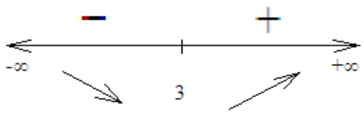
Habremos de buscar un mínimo para la función $f(x)$ en $[2, 5]$.

Buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 4x - 12 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Para saber si es máximo o mínimo, obtenemos la segunda derivada:

$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(3) = 4 > 0 \Rightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.

El estudio de la monotonía resulta: 

Así pues, la función es decreciente en $]2, 3[$ y creciente en $]3, 5[$

a) Por ello el mínimo se alcanzará cuando $x = 3$, es decir, el consumo mínimo se da a las 3000 revoluciones.

b) La función no tiene máximo relativo. Pero según el estudio de la monotonía el máximo se puede alcanzar en $x = 2$ o en $x = 5$. Comprobemos cuál es el máximo:

$f(2) = 7; f(5) = 13 \Rightarrow x = 5$ es el máximo, es decir, el consumo máximo se da a las 5000 revoluciones.

c) $f(3) = 5; f(5) = 13$. Por lo que a 3000 revoluciones (consumo mínimo) el consumo es de 5 litros por hora y a 5000 (consumo máximo) es de 13 litros por hora.

$\boxed{\text{JUN03 P3A}}$: Se cree que el número de unidades vendidas de un cierto producto en función de su precio en euros, x, viene dado por $y = 50 - x$, donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio $x - 10$, determinar de forma razonada el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

Resolución:

Tenemos los siguientes datos: $\begin{cases} \text{unidades vendidas} \to 50 - x \\ \text{precio por unidad} \to x \\ \text{beneficio por unidad} \to x - 10 \end{cases}$

Como el beneficio total = beneficio por unidad × número de unidades vendidas, se tendrá:

$$B(x) = (x-10)\cdot(50-x) = -x^2 + 60x - 500$$

Este beneficio es máximo cuando: $B'(x) = 0$ y $B''(x) < 0$.

$B'(x) = -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30$. es el único punto crítico.

$B''(x) = -2 \Rightarrow B''(30) = -2 < 0$, luego, x = 30 es el máximo.

Entonces 30 € es el precio que producirá mayor benficio. A ese precio se venderán 20 unidades (50 – 30 = 20), obteniéndose un beneficio unitario de 20 euros (30 – 10 = 20); por tanto, el beneficio total será de 20 · 20 = 400 euros.

JUN03 P4A : Descomponer de forma razonada el número 90 en dos sumandos tales que el resultado de sumar el cuadrado del primero y el doble del cuadrado del segundo sea mínimo.

Resolución:

Buscamos 2 números que sumen 90: (x, y tales que $x + y = 90$) que cumplan que $x^2 + 2y^2$ sea lo más pequeño posible.

Utilizamos el dato (que suman 90) para escribir una variable en función de la otra: $x + y = 90 \Rightarrow y = 90 - x$

Ahora sustituimos en la expresión a minimizar y así dependerá de una única variable:

$$x^2 + 2y^2 = x^2 + 2(90-x)^2 = x^2 + 2(8100 - 180x + x^2) = 3x^2 - 360x + 16200.$$

Busquemos un mínimo de $f(x) = 3x^2 - 360x + 16200$

$$f'(x) = 6x - 360 \Rightarrow 6x - 360 = 0 \Rightarrow x = 60 \text{ (único punto crítico)}$$

$$f''(x) = 6 \Rightarrow f''(60) = 6 > 0 \Rightarrow x = 60 \text{ es un mínimo.}$$

Entonces los 2 sumandos han de ser el 60 y el 30 (en ese orden).

SEP03 P3A: El precio del billete de una línea de autobús se obtiene sumando dos cantidades, una fija y otra proporcional a los kilómetros recorridos. Por un billete entre las poblaciones A y B se ha pagado 20 € y por un billete entre las poblaciones A y C se ha pagado 32 €. Si la distancia de A a C es doble el de la distancia de A a B, calcular de forma razonada cuánto se tendrá que pagar por un billete a una población que dista de A la mitad que B.

Resolución:

Tenemos que el precio del billete depende de los km recorridos. Así, llamaremos:

x : km recorridos. $p(x)$: precio del billete (€).

$p(x)$ se obtiene sumando una cantidad fija (b) y una proporcional al nº de km ($a \cdot x$) $\Rightarrow p(x) = ax + b$

Cuando x = "distancia de A a B" (sea $x = d$) $\Rightarrow p(d) = \mathbf{ad} + \mathbf{b} = \mathbf{20}$

Cuando x = "distancia de A a C" (sea $x = 2d$) $\Rightarrow p(2d) = \mathbf{2ad} + \mathbf{b} = \mathbf{32}$

Resolveremos el sistema formado por las dos últimas ecuaciones, para obtener el valor de **b** y el de

ad $(a \cdot d)$

$$\begin{cases} ad + b = 20 \\ 2ad + b = 32 \end{cases} \Rightarrow ad = 12;\ b = 8$$

$$\text{Así, } p(x) = ax + b \Rightarrow (a = \frac{12}{d}) \Rightarrow p(x) = \frac{12}{d}x + 8$$

Por lo que para un billete de un trayecto de distancia $\frac{d}{2}$:

$p(\frac{d}{2}) = \frac{12}{d} \cdot \frac{d}{2} + 8 = \frac{12}{2} + 8 = 14$ €

SEP03 P3B: La concentración C de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad durante los 20 primeros días de un determinado mes se puede aproximar por la función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$, donde x representa el tiempo transcurrido en días.

a) Estudiar de forma razonada el crecimiento y decrecimiento de la concentración de ozono en relación con los días transcurridos.

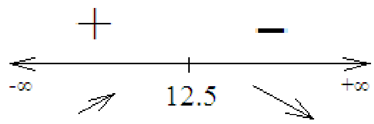
b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono alcanzada durante esos 20 días? Justificar la respuesta

Resolución:

a) Estudiemos la monotonía de la función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$ donde $x \in [0,20]$

Para ello analizaremos el signo de la 1ª derivada:

$f'(x) = 15 - 1'2x$.→Puntos críticos: $15 - 1.2x = 0 \Rightarrow x = 12.5$.



Luego la concentración de ozono es creciente durante los 12 primeros días de mes, exactamente hasta el mediodía del decimotercer día, y a partir de ese momento la concentracón de ozono decrece hasta el último día del estudio. (veinteavo día, en el cual la concentración sigue siendo decreciente).

b) A partir del estudio de la monotonía deducimos claramente que $x = 12.5$ es un máximo de la función $C(x)$. También se puede comprobar que el punto crítico $x = 12.5$ es un máximo calculando la 2ª derivada en ese punto:

$C''(x) = -1.2 \Rightarrow C''(12.5) = -1.2 < 0 \Rightarrow x = 12.5$ es un máximo.

Por ello, la concentración máxima de ozono se produce al mediodía del decimotercer día, y esta concentración es de $C(12.5) = 90 + 15 \cdot 12.5 - 0.6 \cdot 12.5^2 = 183.75$ microorganismos/m^3.

SEP03 P4A: El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por $C(x) = 1/2x^2 + 5x + 800$. Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Resolución:

Si $C(x)$ es el coste para x litros, el coste para un litro será $c(x)$ = (Coste total) : (número de litros), es decir:

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1/2x^2 + 5x + 800}{x} = \frac{1}{2}x + 5 + \frac{800}{x}$$

Como la producción es de x litros, tendremos que buscar el valor de x que minimiza $c(x)$.

$c'(x) = \frac{1}{2} - \frac{800}{x^2}$. Puntos críticos: $\frac{1}{2} - \frac{800}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1600 \Rightarrow x = 40$ (la solución $x = -40$ carece de sentido)

$c''(x) = \frac{1600}{x^3} \Rightarrow c''(40) = \frac{1}{40} > 0 \Rightarrow x = 40$ es un mínimo.

Así, cuando se produzcan 40 litros el coste por litro será $c(40) = \frac{1}{2}40 + 5 + \frac{800}{40} = 45$, que es el mínimo.

JUN04 P2A: La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión: $F(t) = 40t - 10t^2$, con $0 \le t \le 4$

a) (1,5 puntos) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) (1,5 puntos) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

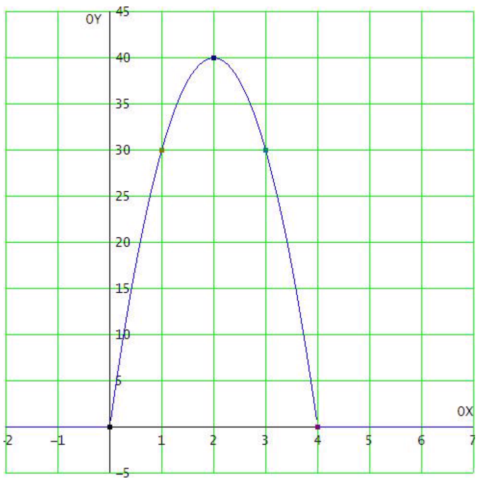
Resolución:

a) Como se trata de una función cuadrática, su representación será una parábola cuyo vértice estará en $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-20} = 2$.

Completando una tabla de valores obtenemos: $\Longrightarrow$

(Observa que no prolongamos la gráfica a la izquierda de $x = 0$ ni a la derecha de $x = 4$).

La temperatura máxima será de 40º C, que se alcanza a las 2 horas. ($T(2) = 40$)



b) Al cabo de 1 hora la temperatura es de $T(1) = 30º\ C$. Sí, en la tabla de valores y en la gráfica se observa que $x = 3$ cumple $T(3) = 30$. Luego al cabo de 3 horas la temperatura volverá a ser de 30º. En ningún otro momento volverá a repetirse esa temperatura.

Nota: Si no tuviéramos la gráfica, para responder a la última cuestión habríamos de resolver $T(x) = 30$, es decir $40x - 10x^2 = 30$. Las soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ (y ninguna más). Por ello además del instante $x = 1$, la temperatura de 30º C se alcanza en el instante $x = 3$.

JUN04 P2B: Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

a) La función que define el beneficio anual en euros.

b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.

c) El beneficio máximo.

Resolución:

a) El beneficio es el resultado de restar los ingresos y gastos. Esto es,

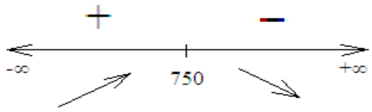
$$B(x) = I(x) - G(x) = 28x^2 + 36000x - (44x^2 + 12000x + 700000) = -16x^2 + 24000x - 700000$$

b) El beneficio es máximo cuando B'(x) = 0 y B"(x) < 0.

$B'(x) = -32x + 24000 \Rightarrow$Ptos críticos: $-32x + 24000 = 0 \Rightarrow x = 750$

$B''(x) = -32 \Rightarrow B''(750) = -32 < 0 \Rightarrow x = 750$ es un máximo.

Por eso, el beneficio será máximo cuando se vendan 750 unidades, ya que es el único máximo y el único punto crítico que tiene la función. Se podría justificar con el estudio de la

monotonía: 

, con lo que se observa que además de máximo relativo es el máximo absoluto de la función.

c) El beneficio máximo es: $B(750) = 8.300.000$ €.

$\boxed{\text{SEP04 P3A}}$: Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el restaurante. Se pide:

a) Determinar el número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.

b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

Resolución:

a) Habremos de encontrar el máximo absoluto a la función $C(t) = 60t - 10t^2$:

$C'(t) = 60 - 20t \Rightarrow$Ptos críticos: $60 - 20t = 0 \Rightarrow t = 3$

$C''(t) = -20 \Rightarrow C''(3) = -20 < 0 \Rightarrow x = 3$ es un máximo.

Se puede comprobar mediante un estudio del signo de $C'(t)$ que la función es creciente para $t < 3$ y decreciente para $t > 3$, por lo que $t = 3$ es el máximo absoluto. Así pues el máximo nº de clientes se produce a las 3 horas de abrir el restaurante (a las 11 de la noche) y el nº de clientes en ese momento (que es el máximo) es de $C(3) = 60 \cdot 3 - 10 \cdot 3^2 = 90$ clientes.

b) Tenemos que estudiar para qué valores de t se cumple que $50 < C(t) < 80$

Sabemos que $C(0) = 0$ (0 clientes en el momento de apertura) y que $C(t)$ es creciente hasta $t = 3$ donde $C(3) = 90.$ Por lo que encontraremos solución antes de las 11 de la noche. Después de $t = 3$ es decreciente por lo que los valores de $C(t)$ podrían volver a pasar entre 80 y 50.

Resolvamos $C(t) = 50$ y $C(t) = 80$:

$60t - 10t^2 = 50, \Rightarrow$ Soluciones : $t = 1$ y $t = 5$ (A las 9 y a la 1 de la madrugada hay 50 clientes)

$60t - 10t^2 = 80, \Rightarrow$ Soluciones : $t = 2$ y $t = 4$ (A las 10 y a las 12 de la noche hay 80 clientes)

Por el estudio de la monotonía explicado anteriormente encontramos 2 soluciones:

Entre las 9 y las 10 de la noche o entre las 12 y la 1 de la madrugada.

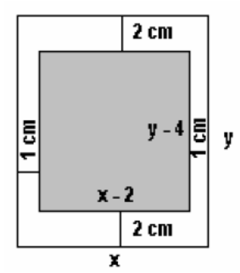
$\boxed{\text{SEP04 P3B}}$: Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

Resolución:

Si llamamos x e y a las dimensiones del cartel, la situación es la que se indica en la figura adjunta, donde la parte impresa es la sombreada.

Debe cumplirse que: $(x-2)\cdot(y-4) = 18$.

Se desea que la superficie del cartel, $S = x\cdot y$, sea mínima.



Para conseguir que la superficie dependa de una única incógnita, utilizaremos la ecuación $(x-2)\cdot(y-4) = 18$ para despejar y, y después sustituirla en la fórmula de la superficie.

$$y-4 = \frac{18}{x-2} \Rightarrow y = \frac{18}{x-2} + 4 = \frac{4x+10}{x-2}$$

Así, la función a minimizar es $S(x) = x \cdot \frac{4x+10}{x-2} = \frac{4x^2+10x}{x-2}$. Donde $x \in \,]2,+\infty[$. Busquemos los puntos críticos:

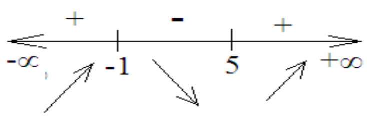
$$S'(x) = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2-16x-20 = 0 \Rightarrow x = 5 \; ; \; x = -1 \text{ (no válida)}$$

Veamos si $x = 5$ es un mínimo:

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \Rightarrow S''(5) = \frac{72}{27} > 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es un mínimo.}$$

Para garantizar que se trata del mínimo absoluto cuando $x \in \,]2,+\infty[$, podemos estudiar la monotonía:

Signo de $S'(x)$:



. Así, $S(x)$ es decreciente en $]2,5[$ y creciente en $]5,+\infty[$, por lo que $x = 5$ ha de ser el mínimo absoluto.

$$x = 5 \Rightarrow y = \frac{4 \cdot 5 + 10}{5-2} = 10 \Rightarrow \text{Las dimensiones buscadas son 5 cm de largo por 10 de alto.}$$

JUN05 P3A: Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0.1x^2 + 2.5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular éste. Justificar que es máximo.

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

Resolución:

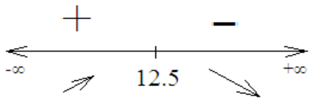
a) Hemos de buscar el valor de x que hace que $f(x)$ sea máximo.

Ptos críticos: $f'(x) = -0.2x + 2.5 \Rightarrow -0.2x + 2.5 = 0 \rightarrow x = 12.5$. Veamos si es o no un máximo:

$$f''(x) = -0.2 \rightarrow f''(12.5) = -0.2 < 0 \Rightarrow x = 12.5 \text{ es un máximo.}$$

$f(12.5) = -0.1 \cdot 12.5^2 + 2.5 \cdot 12.5 - 10 = 5.625$

Queda así justificado, por el criterio de la 2ª derivada, que cuando se venden 12.5 toneladas de producto se producirá el máximo beneficio, que será de 5625 €.

b) Cuando no se vende nada ($x = 0$), hay unas pérdidas de 10 mil euros ($f(0) = -10$). Si estudiamos la monotonía de la función: 

Observamos que la función es creciente entre 0 y 12.5.

Como $f(0) = -10$ y $f(12.5) = 5.625$ existirá un punto de corte en algún valor intermedio de x. Este punto de corte (punto en el cual y = 0) simboliza las toneladas de producto para las cuales no hay ni beneficios ni pérdidas. Busquemos ese punto de corte:

$-0.1x^2 + 2.5x - 10 = 0, \Rightarrow x = 5 \; y \; x = 20.$

Así, a partir de 5 toneladas vendidas se dejarán de tener pérdidas. (Los beneficios a partir de esa cantidad serán crecientes hasta que se venden 12.5 toneladas, a partir de la cual los beneficios decrecen. Cuando se llega a un veinte toneladas ya no hay beneficios (ni pérdidas, porque es punto de corte con el eje de abcisas) y a partir de 20 toneladas se vuelve a tener pérdidas).

c) El beneficio por tonalada vendida es $\dfrac{\text{beneficio total}}{\text{nº de toneladas}} = \dfrac{f(x)}{x}$. (en miles de euros)

Definamos entonces la nueva función $g(x) = \dfrac{-0.1x^2 + 2.5x - 10}{x} = -0.1x + 2.5 - \dfrac{10}{x}$, que representa el beneficio por tonelada y busquémosle un máximo.

Ptos críticos: $g'(x) = -0.1 + \dfrac{10}{x^2} \Rightarrow -0.1 + \dfrac{10}{x^2} = 0 \rightarrow x = -10 \; y \; x = 10.$

Despreciamos la solución $x = -10$ porque carece de sentido vender una cantidad negativa. Veamos si $x = 10$ es realmente un máximo:

$$g''(x) = -\frac{20}{x^3} \rightarrow g''(10) = -0.02 < 0 \Rightarrow x = 10 \text{ es un máximo.}$$

El beneficio por tonelada en ese caso es ($g(10) = -0.1 \cdot 10 + 2.5 - \dfrac{10}{10} = 0.5$) de 500 €. Los resultados están justificados por el criterio de la 2ª derivada.

JUN05 P3B: Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 contratos. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:

a) Expresar el ingreso total previsto como una función de una variable. Explicar el significado de la variable utilizada.

b) ¿Cuál debería ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo? ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se conseguiría? Justificar que el ingreso obtenido realmente es máximo.

Resolución:

a) Ingreso Total = (tarifa) • (nº de contratos)

El enunciado explica cómo aumentan los contratos por cada euro que se baja la tarifa. Entonces llamaremos x a los euros de descuento sobre la tarifa de 36 €. En este caso:

$I(x) = (36 - x) \cdot (4800 + 150x) = -150x^2 + 600x + 172\,800$

b) Tenemos que buscar el valor de x que hace máximo $I(x)$:

Ptos críticos: $I'(x) = -300x + 600 \Rightarrow -300x + 600 = 0 \rightarrow x = 2.$ Veamos si es un máximo:

$I''(x) = -300 \rightarrow I''(2) = -300 < 0 \Rightarrow x = 2$ es un máximo de $I(x)$. (Justificado por el criterio de la 2ª derivada).

Como x indica los euros de descuento sobre el precio inicial de 36 €, la tarifa que garantiza el ingreso máximo es $36 - 2 = 34$ €. El número de abonados será $4800 + 150 \cdot 2 = 5100$. Y el ingreso máximo será de $34 \cdot 5100 = 173\,400$ €

SEP05 P3A : En unos almacenes se tienen 2000 Kg. de alimentos perecederos que se pueden vender a 3 € el Kg., pero si se venden más tarde, el precio aumenta en 0,1 € el Kg. cada día. Calcular cuándo interesa vender estos alimentos para tener los máximos ingresos si cada día que pasa se estropean 50 Kg. de ellos. ¿Cuáles son estos ingresos máximos? ¿Cuántos los kilos que se venden y a qué precio? Justificar que es máximo.

Resolución:

Dado que se trata de maximizar ingresos, buscaremos previamente la fórmula de los ingresos:

Ingresos = (kg de alimentos) $\cdot$ (precio por kg)

Por el enunciado observamos que tanto la cantidad de alimentos como el precio por kg depende del número de días transcurridos. Por eso, para obtener la fórmula necesitamos llamar x al nº de días transcurridos.

$$I(x) = (2000 - 50x) \cdot (3 + 0.1x) = -5x^2 + 50x + 6000.$$ Busquemos un máximo de $I(x)$:

Ptos críticos: $I'(x) = -10x + 50 \Rightarrow -10x + 50 = 0 \rightarrow x = 5.$ Veamos si es un máximo:

$$I''(x) = -10 \rightarrow I''(5) = -10 < 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es un máximo.}$$

Por ello los máximos ingresos se tendrán si se vende en el **5º día**, en cuyo caso los ingresos serán de $I(5) = -5 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5 + 6000 = \mathbf{6125}$ **€**

El nº de kilos es $2000 - 50 \cdot 5 = \mathbf{1750}$ **kg** y el precio es de $3 + 0.1 \cdot 5 = \mathbf{3.5}$ €. El máximo está justificado por el criterio de la 2ª derivada.

JUN06 P3A : Los beneficios anuales $B(x)$, en miles de €, previstos por una empresa para los próximos años vienen dados por la siguiente función, donde x representa el número de años a partir del actual:

$$B(x) = \frac{25x}{x^2 + 16}$$

a) ¿Cuántos años han de transcurrir para que la empresa obtenga el máximo beneficio y cuál es el valor de dicho beneficio? Justificar que es máximo.

b) ¿Puede esta empresa tener pérdidas algún año? ¿Por qué?

Resolución:

a) Para encontrar el máximo, buscaremos primero los puntos críticos:

$$B'(x) = \frac{25 \cdot (x^2 + 16) - 50x^2}{(x^2 + 16)^2} = \frac{-25x^2 + 400}{(x^2 + 16)^2}$$

$$B'(x) = 0 \quad \rightarrow -25x^2 + 400 = 0 \quad \rightarrow x^2 = \frac{-400}{-25} = 16 \quad \rightarrow x = \pm 4$$

(Despreciamos la solución $x = -4$, dado que sólo nos interesa los años que tienen que pasar (futuro) y no los años que hace (pasado))

Comprobemos si $x = 4$ es o no un máximo. Criterio de la 2ª derivada:

$$B''(x) = \frac{-50x \cdot (x^2 + 16)^2 - 2 \cdot (x^2 + 16) \cdot 2x \cdot (-25x^2 + 400)}{(x^2 + 16)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+16)\cdot[-50x\cdot(x^2+16)-2\cdot 2x\cdot(-25x^2+400)]}{(x^2+16)^4} =$$

$$= \frac{-50x\cdot(x^2+16)-4x\cdot(-25x^2+400)}{(x^2+16)^3} = \frac{-50x^3-800x+100x^2-1600x}{(x^2+16)^3} =$$

$$= \frac{-50x^3+100x^2-2400x}{(x^2+16)^3}. \quad \Rightarrow\ B''(4) = \frac{-50\cdot 64+100\cdot 16-2400\cdot 4}{(16+16)^3} = \frac{-11200}{32^3} < 0$$

Con lo que queda demostrado, por el criterio de la 2ª derivada que $x = 4$ es un máximo (vale como justificación).

Por tanto habrán de pasar 4 años para maximizar beneficios y el valor de dicho beneficio será:

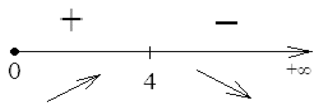
$$B(4) = \frac{25\cdot 4}{4^2+16} = \frac{100}{32} = 3.125 \text{ miles de €.} = 3125€$$

b) La función representa los beneficios previstos para los próximos años, por lo que está definida para valores positivos de x. Ahora bien, cuando x es positivo, $B(x) = \frac{25x}{x^2+16}$ también es positivo porque tendría numerador y denominador positivos, por lo que no puede ser que existan pérdidas ningún año.

En muchas ocasiones no es tan simple intuir el signo que tomará la función y habrá de razonarse de la siguiente manera:

Analicemos la monotonía de $B(x)$ (para $x \in [0,+\infty[$) :

$$B'(x) = \frac{-25x^2+400}{(x^2+16)^2} \Rightarrow$$



Tenemos que $B(0) = 0$ y que $B(x)$ es creciente en]0,4[y decreciente en]4,+∞[. La cuestión es: ¿llegará en algún momento la función a estar bajo cero?. Veamos que sucede cuando x aumenta indefinidamente:

$\lim_{x\to+\infty} B(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{25x}{x^2+16} = 0$, ya que el grado del denominador es mayor.

Así pues, $B(x)$ es monótona decreciente a partir de $x = 4$, pero dado que su límite cuando $x \to +\infty$ es 0, nunca tomará valores negativos y eso se traduce en:

En el momento inicial no hay beneficios ni pérdidas ($B(0) = 0$) y los beneficios van en aumento hasta el 4º año. A partir del cuarto año los beneficios son cada vez menores y se van acercando a 0 ($\lim_{x\to+\infty} B(x) = 0$), pero nunca llega a tener pérdidas.

$\boxed{\text{JUN06 P2A}}$: Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3,$ se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Máximos y mínimos locales.
d) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Resolución:

a) Dominio = $\mathbb{R}$, ya que se trata de una función polinómica.

Punto de corte con eje OY: $(x = 0) \to y = 0+0-0+3 = 3 \to (\mathbf{0},\mathbf{3})$

Punto de corte con eje OX: $(y = 0) \to 0 = x^3 + x^2 - 5x + 3.$

Intentaremos resolver la ecuación utilizando Ruffini:

	1	1	-5	3
1		1	2	-3
	1	2	-3	0
1		1	3	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

Por lo que $x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3)$ y la ecuación queda $(x-1)^2(x+3) = 0$ que tendrá por soluciones $x = 1$ (sol. doble) y $x = -3$

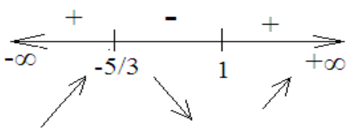
Así, los puntos de corte con el eje OX son: $(\mathbf{-3,0})$ y $(\mathbf{1,0})$.

Observación: Dado que al final del ejercicio hay que trazar la gráfica, conviene señalar ya en los ejes de coordenadas los puntos de corte obtenidos.

b) La monotonía se deduce del estudio del signo de la 1ª derivada.

$y' = 3x^2 + 2x - 5.$

$y' = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 2x - 5 = 0 \;\rightarrow\;$, Solucion : $x = -\frac{5}{3}; x = 1$:



Por lo que f es creciente en $]-\infty, -5/3[\cup]1, +\infty[$ y decreciente en $]-5/3, 1[$

(Ahora se deben marcar estos puntos en el eje OX, para tener en cuenta la monotonía en el trazado de la gráfica.)

c) Como no existen puntos de discontinuidad, los extremos se pueden deducir del apartado anterior.

Así, $x = -\frac{5}{3}$ es un máximo relativo o local, ya que la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha.

Y $x = 1$ será un mínimo relativo o local, por ser la función decreciente a su izquierda y creciente a su derecha.

Sin embargo, siempre resulta conveniente utilizar el criterio de la 2ª derivada (de paso se podría estudiar la curvatura, que ayudará a la representación gráfica)

Ptos críticos: $x = -\frac{5}{3}; x = 1$:

$y'' = 6x + 2 \;\rightarrow\;$ $y''(-\frac{5}{3}) = -10 + 2 = -8 < 0 \;\rightarrow x = -\frac{5}{3}$ es un máximo local.
$y''(1) = 6 + 2 = 8 > 0 \;\rightarrow x = 1$ es un mínimo local.

Para la representación gráfica, calculamos la coordenada "y" de ambos puntos:

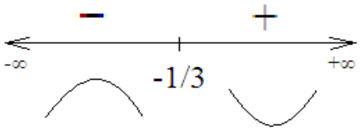
$x = -\frac{5}{3} \;\rightarrow y = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{25}{3} + 3 = \frac{256}{27} = 9.\widehat{481} \;\rightarrow (\mathbf{-0.6, 9.\widehat{481}})$ Máx.

$x = 1 \;\rightarrow y = 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0 \;\rightarrow (\mathbf{1,0})$ Mín, (y además punto de corte con eje OX)

Representamos estos puntos en los ejes de coordenadas.

d) Para la representación gráfica, analizaremos además la curvatura (estudio del signo de la 2ª derivada):

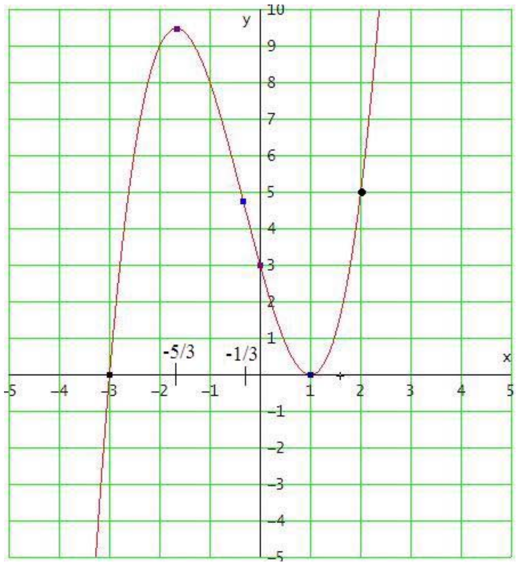
$y'' = 0 \rightarrow 6x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \rightarrow$



Señalamos $x = -\frac{1}{3}$ en el eje OX, para tener en cuenta la curvatura en el trazado. También calculamos su coordenada "y":

$$x = -\frac{1}{3} \quad \rightarrow y = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{5}{3} + 3 = \frac{128}{27} = 4.\widehat{740}$$

Ya podemos completar el trazado de la gráfica:



Para un buen trazado de la gráfica, es conveniente añadir algún punto por la zona en la que resulte más conveniente. Así, como no tenemos ningún punto a la derecha de $x = 1$, calculamos la imagen de $x = 2 \rightarrow y = 5 \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{5})$

$\boxed{\text{JUN06 P3B}}$: a) Estudia la continuidad en el intervalo [-3,3] de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 10 & -3 \leq x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x < 1 \\ (x+3)/2 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

b) Halla la integral entre 2 y 3 de la función $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$

Resolución:

Los puntos en los cuales se ha de estudiar la continuidad son: $x = -3; x = -2; x = 1; x = 3$

$\boxed{x = -3}$:

Dado que no está definida la función f para valores inferiores a -3, $\nexists \lim_{x \to -3^-} f(x)$, por lo que $\nexists \lim_{x \to -3} f(x)$ y por ello en $x = -3$ encontramos una discontinuidad esencial.

$\boxed{x = -2}$:

(C1) $\exists f(-2) = (-2)^2 = 4.$ Se cumple.

(C2) $\exists \lim_{x \to -2} f(x)$? Calculemos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} [3x+10] = -6+10 = 4 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} x^2 = (-2)^2 = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to-2} f(x) = 4$$

(C3) $f(-2) = \lim\limits_{x\to-2} f(x)$. Se cumple (ambos valen 4). Así, f es continua en $x = -2$.

$\boxed{x = 1}$:

(C1) $\exists f(1) = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Se cumple.

(C2) $\exists \lim\limits_{x\to1} f(x)$? Calculemos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to-2} f(x).$$

Luego f tiene una discontinuidad de salto finito (salto de 1 unidad) en $x = 1$.

$\boxed{x = 3}$:

Al igual que sucede en $x = -3$, en $x = 3$ hay una discontinuidad esencial, ya que no está definido $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ por no existir $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3-2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\cdot(-2)\right) = 0-4-4 = -8$

Observación: Únicamente se nos pedía el cálculo de la integral. Si se pidiera el área comprendida, entonces habríamos de calcular primero los puntos de corte con el eje OX, y después calcular el área a trozos

$\boxed{\text{SEP06 P2B}}$: Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, se pide:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos relativos.

e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Resolución:

a) Dominio: Como se trata de una función racional, su dominio serán todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador.

$x^2+1 = 0 \quad \to x^2 = -1 \quad \to x = \pm\sqrt{-1}$ →No tiene solución.

Luego $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY : $(x = 0) \to f(0) = \dfrac{2\cdot 0}{0^2+1} = 0 \to (0,0)$

Con el eje OX : $(y = 0) \to 0 = \dfrac{2x}{x^2+1} \to 2x = 0 \to x = 0 \to (0,0)$

Así, el único punto de corte con los ejes es $(0,0)$

b) Asíntotas verticales: En las funciones racionales se encuentran en los puntos que anulan el denominador. Como ningún valor de x anula el denominador, no existen asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: Hay que calcular los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

En ambos casos porque el grado del denominador es mayor que el del numerador.

Así, hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

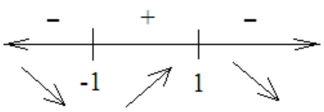
c) Para analizar la monotonía, estudiaremos el signo de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

El denominador es siempre positivo, por lo que bastará con analizar el signo del numerador:

$$-2x^2+2 = 0 \qquad \to -2x^2 = -2$$

$$\to x^2 = 1 \qquad \to x = \pm\sqrt{1} \qquad \to x = \pm 1$$



Tras el estudio correspondiente del signo, concluimos que la función es decreciente en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y creciente en $]-1,1[$

d) Máximos y mínimos relativos: Hay que buscarlos entre los puntos críticos (puntos que anulan la primera derivada). Tal y como hemos visto en el apartado anterior, éstos son $x = -1$ y $x = 1$. Observando el estudio de la monotonía, podemos concluir que $x = -1$ es un mínimo (ya que la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha) y que $x = 1$ es un máximo (creciente a su izquierda y decreciente a su derecha).

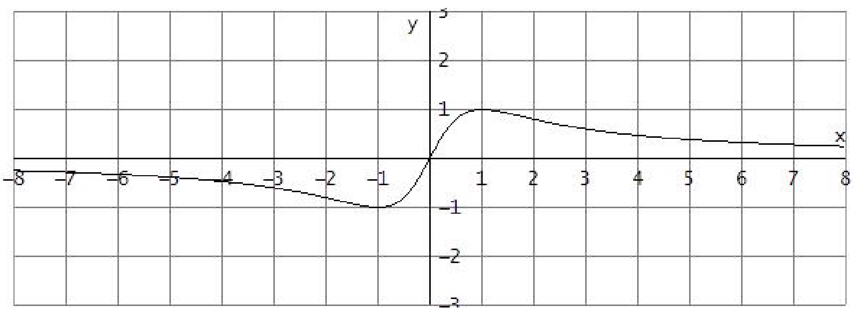
Otra manera de comprobar que son mínimo y máximo sería sustituirlos en la segunda derivada (se cumpliría que $f''(-1) > 0$ y que $f''(1) < 0$)

e) Representación gráfica.

Nos apoyaremos en todas las características ya deducidas y en una pequeña tabla de valores.

Sabemos: Dominio = $\mathbb{R}$; Único punto de corte $(0,0)$; Asíntota horizontal en $y = 0$ (tanto cuando $x \to -\infty$ como cuando $x \to +\infty$); Monotonía y extremos.

x	-5	-1	0	1	5
y	-0.38	-1	0	1	0.38



$\boxed{\text{SEP06 P3B}}$. El dinero en efectivo, en euros, de una oficina bancaria durante las seis horas que permanece la caja abierta al público viene dado por la expresión $C(t) = 2000 - 234t + 27t^2$, siendo t el tiempo en horas transcurrido desde la apertura. Determina:

a) ¿En qué momento hay más dinero en efectivo y cuánto?

b) ¿En qué momento hay menos dinero en efectivo y cuánto?

Justifica que son máximo y mínimo, respectivamente.

Resolución:

a) Hemos de encontrar el valor máximo de la función en el intervalo $[0, 6]$.

Dado que se trata de una parábola de puntas hacia arriba no tendrá ningún máximo relativo, por lo que el máximo se alcanzará en alguno de los extremos del intervalo:

$C(0) = 2000 \qquad C(6) = 1568$

Por lo que el máximo se encuentra en $x = 0$. Por eso, concluimos que el momento donde hay más dinero en caja es en el momento de la apertura, habiendo 2000 €.

NOTA: Un estudio de la monotonía nos hubiera desvelado que la función es decreciente hasta el vértice ($x_v = -b/2a = 234/54 = 4.\widehat{3}$) y creciente de aquí en adelante, por lo que tenemos mínimo relativo (y absoluto) pero no máximo.

b) El mínimo coincidirá con el vértice, por lo comentado en a). Así, el momento en que hay menos dinero es pasadas $4.\widehat{3}$ horas desde la apertura de la caja, es decir, después de 4 horas y 20 minutos. En ese momento hay en caja $C(4.\widehat{3}) = 1493$ €

$\boxed{\text{JUN07 P3A}}$: **a**) Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[-4, 2]$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Calcula el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abcisas.

Resolución:

Estudiemos la continuidad en los puntos donde hay "cambio de trozo".

$x = -3$:

(C1) $\exists f(-3) = 2$

(C2) ¿$\exists \lim_{x \to -3} f(x)$? Veamos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} x^2 = 9 \end{cases}$$

Como no coinciden los límites laterales, $\nexists \lim_{x \to -3} f(x)$, y por lo tanto la función no es continua. Encontramos una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -3$.

$x = 1$:

(C1) $\exists f(1) = 1$

(C2) ¿$\exists \lim_{x \to 1} f(x)$? Veamos los límites laterales:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

(C3) $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

Por lo tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

En el resto de puntos, la función es continua, dado que los tres trozos son expresiones polinómicas.

b) Como los valores de "y" son siempre positivos, no será necesario calcular los puntos de corte con el eje OX. El área vendrá determinada por la integral:

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \int_{-3}^{1} x^2 dx + \int_{1}^{2} 1dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} + [x]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{(-3)^3}{3} + 2 - 1 = \frac{28}{3} + 1 = \frac{31}{3}.$$

$\boxed{\text{JUN07 P3B}}$: La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

• Su dominio es la recta real salvo los puntos -1 y 1. Es continua en todo su dominio y corta al eje OX en el punto (2,0) .

• Tiene una asíntota horizontal en y = 0 , con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

• Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, con $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

• Tiene una asíntota vertical en $x = -1$, con $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

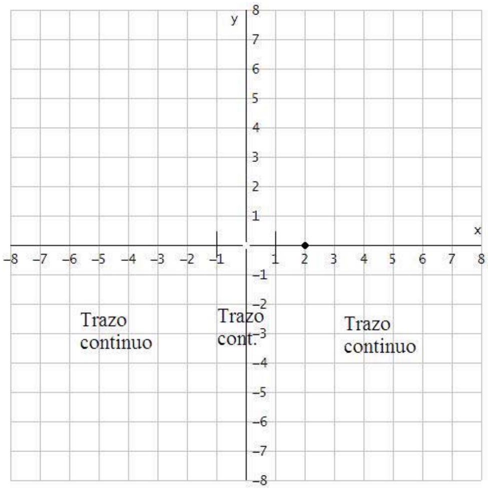
• Tiene un mínimo en (4, -2) y otro en (0,3) . No tiene máximos.

a) Representa gráficamente dicha función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Resolución:

(1) Señalamos en el eje OX, los puntos $x = -1$ y $x = 1$. (no pintar esos puntos pues son precisamente los que **no** están en el dominio). Estos puntos dividen la función en tres trozos. Sabemos (porque la función es continua en todo su dominio) que en cada uno de los tres trozos la función es un único trazo (se pinta sin separar el lápiz del papel). Pintamos el punto (2,0).

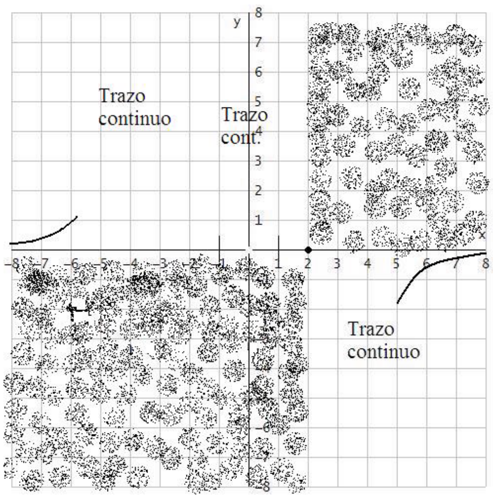


(2) La recta horizontal $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota, con lo que la gráfica de la función se aproxima indefinidamente al eje OX en alguno de los extremos (o en ambos) del propio eje OX

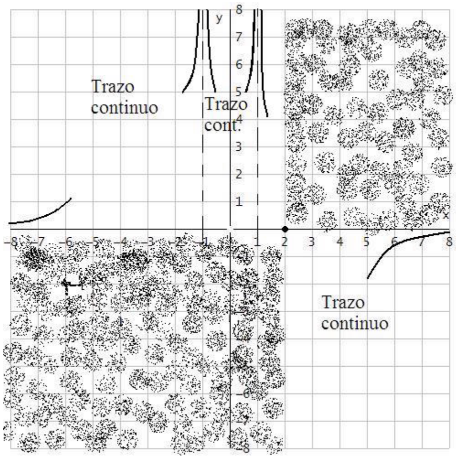
(extremo izquierda: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

extremo derecha: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$)

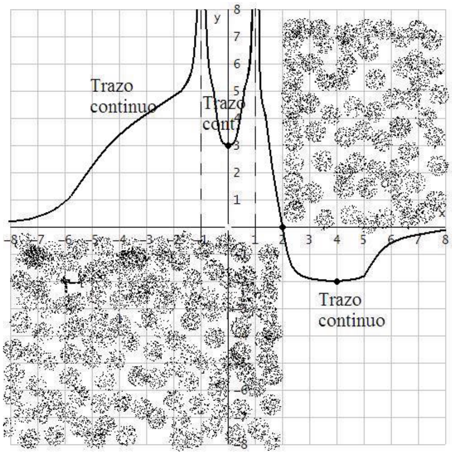
A la izquierda de $x = 2$, la gráfica queda por encima del eje OX, a la derecha de $x = 2$, queda por debajo.



(3) y (4) Pintamos una recta vertical con trazo discontinuo en $x = -1$ y en $x = 1$. En ambos casos, la función se aproxima a esta recta, tanto por la izquierda como por la derecha (sin llegar a tocarla) por arriba ($\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \ldots$).



(5) Pintamos el punto de coordenadas (4,-2) y el (0,3). En ambos casos la función es decreciente a la izquierda de este punto y creciente a su derecha. En ninguna parte de la gráfica podemos representar un máximo.



$\boxed{\text{SEP07 P3A}}$: Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \le x < 2 \\ x^2 - 6x + 12 & 2 \le x \le 4 \\ -2x + a & 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en el intervalo [0,8].

b) Halla los máximos y mínimos absolutos de $y = f(x)$ en el intervalo [0,4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.

c) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ y la gráfica de $y = f(x)$.

Resolución:

a) La continuidad hay que estudiarla en los puntos donde hay un cambio de trozo, es decir, en $x = 2$ y en $x = 4$.

$x = 2$:

(C1) $\exists f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 12 = 4$

(C2) $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 6x + 12 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 12 = 4$$

Como los límites laterales coinciden, entonces $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

(C3) $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 4.$

Luego la función es continua en $x = 2$.

$x = 4$:

(C1) $\exists f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 = 4$

(C2) $\exists \lim_{x\to 4} f(x)$. Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2 - 6x + 12 = 4$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -2x + a = -2 \cdot 4 + a = -8 + a$

Para que los límites laterales coincidan habrá de cumplirse que $4 = -8 + a$, ecuación que, resuelta, nos da $a = 12$. Así pues, en el caso $a = 12$, se cumple que $\exists \lim_{x\to 4} f(x) = 4$. Y si $a \neq 12$, entonces los límites laterales son distintos, con lo que tendríamos una discontinuidad inevitable de salto finito.

(C3) $f(2) = \lim_{x\to 4} f(x) = 4$. (en el caso $a = 12$).

Cuando $a = 12$, la función es continua en todo punto de su dominio $[0, 8]$.

Cuando $a \neq 12$, la función es continua en todo punto de su dominio excepto $x = 4$, donde presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) Busquemos primero los extremos (máximos y mínimos relativos). En el intervalo $[0, 2]$:

$f'(x) = [x + 2]' = 1$. Nunca da 0. No tiene extremos relativos en ese intervalo.

En el intervalo $[2, 4]$:

$f'(x) = [x^2 - 6x + 12]' = 2x - 6 = 0. \Rightarrow x = 3.$

$f''(x) = [2x - 6]' = 2 \to f''(3) = 2 > 0$. Entonces $x = 3$ es un mínimo relativo.

Para encontrar los mínimos y máximos absolutos, compararemos los valores de los extremos relativos con los de los extremos de los intervalos.

$x = 0 \to f(0) = 0 + 2 = 2$

$x = 2 \to f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 12 = 4$

$x = 3 \to f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12 = 3$

$x = 4 \to f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 = 4$

Así pues, el mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$ y encontramos dos máximos absolutos: $x = 2$ y $x = 4$.

c) Entre $x = 0$ y $x = 3$ la función sólo alcanza valores positivos (dado que el valor mínimo se alcanza en $x = 0$ y vale 2), por lo que no será necesario calcular puntos de corte con el eje OX. Así el resultado que se pide es la siguiente integral:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx =$$

$$= \int_0^2 (x + 2)dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 12)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 12x \right]_2^3 =$$

$$= \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \left(\frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0\right) + \frac{3^3}{3} - 6\frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3 - \left(\frac{2^3}{3} - 6\frac{2^2}{2} + 12 \cdot 2\right) = 2 + 4 + 9 - 27 + 36 - \frac{8}{3} + 12 - \frac{28}{3}$$

$\boxed{\text{SEP07 P2B}}$: Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x - 3}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos locales.

e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Resolución:

a) Como es una función racional, su dominio está formado por todos aquellos valores de x que no anulan el denominador. Calculémoslo:

$2x-3=0 \to x=3/2.$ Entonces $Dom(f)=\mathbb{R}-\{3/2\}.$

Puntos de corte con los ejes.

Con el eje OY:

$x=0 \to y=\dfrac{0+4}{0-3}=-\dfrac{4}{3} \to$ Punto $(0,-\dfrac{4}{3})$

Con el eje OX:

$y=0 \to 0=\dfrac{x^2+4}{2x-3} \to x^2+4=0\cdot(2x-3) \to x^2+4=0 \to x=\pm\sqrt{-4}$ (No tiene solución). Por lo que no hay puntos de corte con el eje OX.

b) Las asíntotas verticales se encuentran en aquellos puntos que anulan el denominador. ($x=3/2$). Calculamos los límites laterales en este punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3/2^-} \dfrac{x^2+4}{2x-3} = \left(\dfrac{6.25}{0^-}\right) = -\infty. \\ \lim\limits_{x\to 3/2^+} \dfrac{x^2+4}{2x-3} = \left(\dfrac{6.25}{0^+}\right) = +\infty. \end{cases}$$

Así, tenemos una asíntota vertical en $x=3/2$.

Las asíntotas horizontales se buscan calculando los límites cuando $x\to\pm\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+4}{2x-3} = \left(\dfrac{+}{-}\right) = -\infty. \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+4}{2x-3} = \left(\dfrac{+}{+}\right) = +\infty. \end{cases}$$

En ambos casos porque el grado del numerador es mayor que el del denominador. No hay asíntota horizontal (el resultado de alguno de los límites habría de haber dado cierto valor de "y" .

c) Para analizar la monotonia, tenemos que calcular la derivada y estudiar su signo.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2x-3)-(x^2+4)\cdot 2}{(2x-3)^2}$$

$$=\frac{4x^2-6x-2x^2-8}{(2x-3)^2}=\frac{2x^2-6x-8}{(2x-3)^2}.$$

Nos interesa estudiar cuándo es + y cuando es -. Observemos que el denominador siempre es positivo, por lo que sólo será necesario estudiar el signo del numerador. Para ello, resolvemos primero $2x^2-6x-8=0$:

Obtenemos $x=-1,\ x=4.$ Estudio del signo:

Por lo tanto la función es creciente en $]-\infty,-1[\cup]4,+\infty[$ y decreciente en $]-1,4[$.

d) Tenemos que estudiar los puntos críticos (puntos que anulan la 1ª derivada). Como hemos visto en el apartado anterior, los puntos críticos son $x=-1$ y $x=4$. Y como consecuencia del estudio de la monotonía, tenemos que $x=-1$ es un máximo local y $x=4$ es un mínimo local.

e) Para dibujar:

- Señalamos el valor $x=3/2$ y observamos que no está en el dominio y por lo tanto parte el trazado de la grágica en dos trozos. Pintamos el punto $(0,-4/3)$ y observamos que no hay punto de corte con el eje OX.

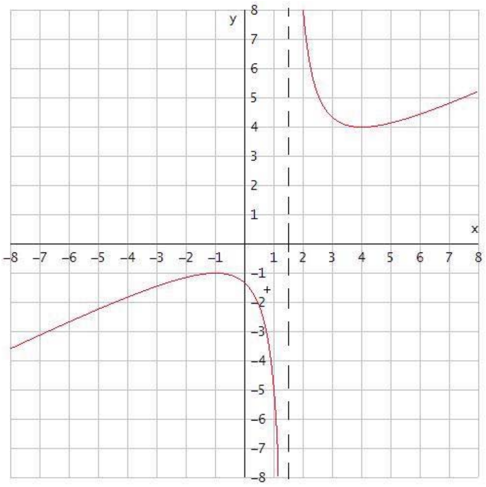
- Pintamos una recta vertical con línea discontinua en $x=3/2$. A su izquierda pintamos la gráfica con $y\to-\infty$ y a su derecha con $y\to+\infty$. En el extremo izquierdo (cuando $x\to-\infty$) se pinta con $y\to-\infty$ y en el extremo derecho (cuando $x\to+\infty$) se pinta $y\to+\infty$.

- Obtenemos las coordenadas de algunos puntos para completar el dibujo:

Los extremos $f(-1) = \dfrac{(-1)^2+4}{2(-1)-3} = -1 \to (-1,-1)$ (máximo local)

$f(4) = \dfrac{4^2+4}{2\cdot 4-3} = 4 \to (4,4)$ (mínimo local)

Teniendo en cuenta que es creciente a la izquierda de $(-1,-1)$, decreciente entre $(-1,-1)$ y $(4,4)$, y creciente a la derecha de $(4,4)$, podemos calcular puntos intermedios que nos ayude a pintar la gráfica. (Recomiendo $x = -5, x = 1, x = 2, x = 8$)



$\boxed{\text{SEP07 P3B}}$: Dada la función $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$:

a) Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.

b) Halla el área de la región del plano determinada por la gráfica de $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$

Resolución:

a) Debemos encontrar los puntos críticos (puntos que anulan la primera derivada).

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0, \to x = 2, x = 4.$ Para justificar qué tipo de extremo es cada punto podemos aplicar el criterio de la segunda derivada o hacer un estudio de la monotonía. Optamos esta vez por lo primero y calculamos la segunda derivada:

$f''(x) = 6x - 18.$ $f''(2) = -6 < 0 \to x = 2$ es un máximo.

$f''(4) = 6 > 0 \to x = 4$ es un mínimo.

b) Para calcular dicha región, debemos buscar primero si existe algún punto de corte con el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$:

$x^3 - 9x^2 + 24x + 3 = 0.$ No encontramos ninguna solución a esta ecuación por el método estudiado (Ruffini).

El área pedida resulta ser la integral:

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (x^3 - 9x^2 + 24x + 3)dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 9\frac{x^3}{3} + 24\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{x=0}^{x=5} =$$

$$\left[\frac{5^4}{4} - 9\frac{5^3}{3} + 24\frac{5^2}{2} + 3\cdot 5\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 9\frac{0^3}{3} + 24\frac{0^2}{2} + 3\cdot 0\right] = \frac{385}{4}$$