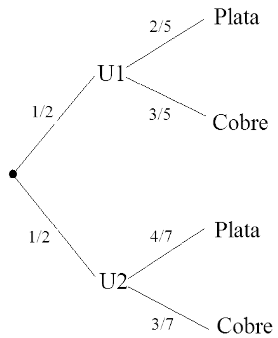
EJERCICIOS PROPUESTOS EN LAS P.A.U. DE LA C. V.

BLOQUE 3: **PROBABILIDAD**.

JUN00 P1A: Una urna contiene dos monedas de plata y tres de cobre. Otra urna contiene cuatro monedas de plata y tres de cobre. Si se elige una urna al azar y se extrae una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea de plata?

Resolución:

La situación se puede modelizar con un diagrama de árbol:



Llamamos Pl = {Extraer moneda de plata}. U1 = {Elegir urna 1} U2 = {Elegir urna 2}.

U1 y U2 forman un sistema completo de sucesos, ya que U1 $\cup$ U2 = Ω y que U1 $\cap$ U2 = ϕ.

Entonces $P(\text{ Pl }) = P(\text{ Pl} \cap \text{U1 }) + P(\text{ Pl} \cap \text{U2 }) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{17}{35} = 0.48571.$ Lo cual equivale a un 48´57 %.

JUN02 P4A: En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.

b) Si al poner la radio no escuchamos música, calcula de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada en la emisora B.

Resolución:

Si A, B y C son los sucesos sintonizar la emisora A, B o C, respectivamente, y M es el suceso escuchar música, se tiene:

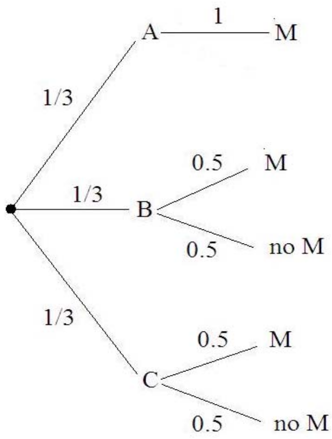
$$P(A) = 1/3\ ;\ \ P(B) = 1/3\ ;\ \ P(C) = 1/3\ .\quad P(M\,|\,A) = 1,\ P(M\,|\,B) = 0.5,\ P(M\,|\,C) = 0.5$$

Los sucesos A, B y C forman un sistema completo de sucesos, dado que A $\cup$ B $\cup$ C = Ω, y que los tres sucesos son disjuntos 2 a 2. Por ello:

a) P(M) = P(M $\cap$ A) + P(M $\cap$ B) + P(M $\cap$ C) =

= P(A) · P(M | A) + P(B) · P(M | B) + P(C) · P(M/C) = 2/3

Podría haber ayudado un diagrama de árbol como éste :



b) Contamos con el dato adicional de que al poner la radio no escuchamos música, luego sabemos que se cumple no M ($\overline{M}$). El resultado a calcular es $P(B \mid \overline{M})$.

Ahora bien cuando tenemos que calcular una probabilidad condicionada y la que conocemos es la opuesta $P(\overline{M} \mid B)$, (probabilidad a posteriori), hemos de aplicar el teorema de Bayes. Este se deduce de aplicar 2 veces la definición de probabilidad condicionada:

$$P(B \mid \overline{M}) = \frac{P(B \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(\overline{M} \mid B) \cdot P(B)}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{SEP02 P4A}}$: El 60 % de los alumnos de bachillerato de un Instituto son chicas y el 40 % chicos. La mitad de los chicos lee asiduamente la revista COMIC, mientras que sólo el 30 % de las chicas la lee.

a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que un alumno elegido al azar lea esta revista,

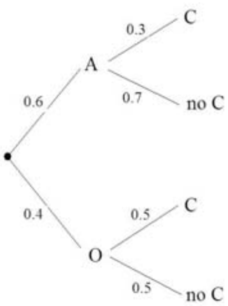
b) Si un alumno elegido al azar nos dice que no lee la revista, obtener de forma razonada probabilidad de que sea chica.

Resolución:

Sean A el suceso ser chica, O el suceso ser chico y C el suceso leer COMIC. Se tiene:

$P(A) = 0.6$; $P(O) = 0.4$; $P(C \mid A) = 0.3$; $P(C \mid O) = 0.5$

Organizando los datos en árbol:



a) Los sucesos A y O forman un sistema completo así que:

$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(A) \cdot P(C \mid A) + P(O) \cdot P(C \mid O) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.38.$

b) Sabemos que sucede $\overline{C}$ y nos piden la probabilidad de A. La respuesta es el valor de $P(A \mid \overline{C})$.

Se trata de calcular una probabilidad a posteriori, ya que tenemos $P(\overline{C} \mid A)$ (está en el árbol y su valor es de 0.7). Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(A \mid \overline{C}) = \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C} \mid A) \cdot P(A)}{P(\overline{C})} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.62} = \mathbf{0.67742}$$

Hemos utilizado que

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.38 = 0.62$ y que $P(\overline{C} \mid A) = 1 - P(C \mid A) = 1 - 0.3 = 0.7$

Por tanto, en este caso será chica en un 67´74 % de los casos.

SEP02 P4B: En una bolsa de caramelos surtidos hay 10 caramelos con sabor a naranja, 5 con sabor a limón y 3 con sabor a fresa. Todos tienen el mismo tamaño y hasta extraerlos de la bolsa no se sabe de qué sabor son. Se extraen tres caramelos al azar.

a) Calcular de forma razonada la probabilidad de extraer primero uno con sabor a naranja, luego uno con sabor a fresa y, por último, uno con sabor a limón.

b) Calcular de forma razonada la probabilidad de que sean de tres sabores diferentes.

Resolución:

a) Llamaremos N1, L1 y F1 a los sucesos obtener en la 1ª extracción el sabor naranja, limón o fresa respectivamente.

Análogamente nombramos N2, L2 y F2 y también N3, L3 y F3. (La situación puede resumirse en un diagrama de árbol de 3 x 3 = 27 posibilidades).

$$P(N1 \cap F2 \cap L3) = P(N1) \cdot P(F2 \mid N1) \cdot P(L3 \mid (N1 \cap F2)) = \frac{10}{18} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{816} \approx 0.0306$$

Es fácil observar que cuando ya se ha extraído uno de naranja, quedan 3 de fresa sobre un total de 17. Análogamente, cuando ya se ha extraído uno de naranja y uno de fresa quedan 5 de limón sobre un total de 16.

b) Sea D = {obtener 3 caramelos diferentes}. El suceso D comprende los siguientes casos: (Naranja, limón, fresa) y todas sus permutaciones, que resultan ser $P_3 = 3! = 6$ casos diferentes:

$$D = \{(N,L,F);(N,F,L);(L,N,F);(L,F,N);(F,N,L);(F,L,N)\}$$

Sobreentendemos aquí que (N,L,F) significa extraer 1º uno de naranja, después uno de limón y por último uno de fresa, que en el apartado **a**) escribíamos $N1 \cap L2 \cap F3$

Como D es unión de 6 sucesos elementales $P(D)$ resultará ser la suma de las probabilidades de los 6 sucesos.

Ahora bien, si calculamos la probabilidad de cualquiera de estos sucesos siempre obtendremos $\frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{16}$, dado que los denominadores (casos posibles) siempre serán 18, 17 y 16 (ya que cada vez queda un caramelo menos). Por otro lado los numeradores siempre serán 10, 5 y 3 aunque aparezcan en otro orden.

$$P(D) = 6 \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{16} = \frac{25}{136} \approx \mathbf{0.18382}$$

JUN03 P4A: En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50 % de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70 %. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.

a) Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.

b) Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

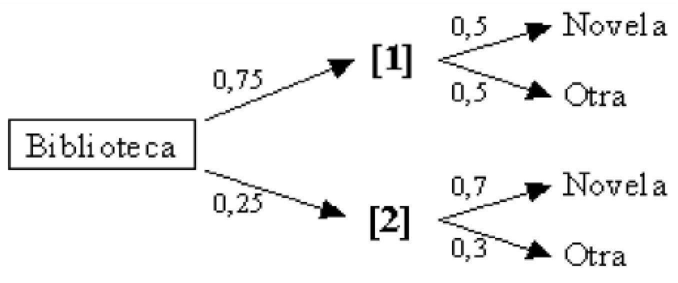
Resolución:

Necesitamos averiguar primero la probabilidad de elegir cada una de las bibliotecas. Designamos por B1 y B2 a la primera y segunda biblioteca.

Si p es la probabilidad de elegir la segunda biblioteca, P(B2) = p, la de elegir B1 será P(B1) =3p.

Como P(B1) + P(B2) = 1 ⇒ 3p + p = 1 ⇒ p = 0,25

Y ahora podemos representar la situación con un diagrama de árbol.:



a) $P(\text{Novela}) = P(Novela \cap B1) + P(Novela \cap B2) = P(B1) \cdot P(Novela \mid B1) + P(B2) \cdot P(Novela \mid B2)$ $= 0.75 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.7 = \mathbf{0.55}$

b) Hemos de calcular $P(B1 \mid Novela)$ (probabilidad a posteriori). Para ello utilizaremos el teorema de Bayes:

$$P(B1 \mid Novela) = \frac{P(B1 \cap Novela)}{P(Novela)} = \frac{P(B1) \cdot P(Novela \mid B1)}{P(Novela)} = \frac{0.75 \cdot 0.5}{0.55} = \frac{37.5}{55} = \mathbf{0.6\,\widehat{81}}$$

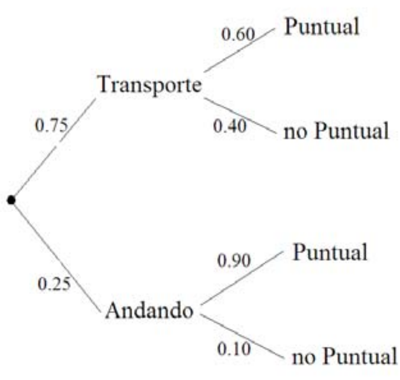
JUN03 P1: El 75 % de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60 % de los que utilizan el transporte y el 90 % de los que acude andando. Calcular de forma razonada:

a) si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya acudido andando, y

b) si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que no haya llegado puntual.

Resolución:

Se trata de un experimento compuesto modelizable por un diagrama de árbol:



a) Se trata de calcular $P(Andando \mid Puntual)$, que es una probabilidad a posteriori. Utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(Andando \mid Puntual) = \frac{P(Andando \cap Puntual)}{P(Puntual)} =$$

$$= \frac{P(Andando) \cdot P(Puntual \mid Andando)}{P(Puntual)} = \frac{0.25 \cdot 0.90}{P(Puntual)}.$$

Necesitamos calcular $P(Puntual)$. Para ello utilizamos la ley de la probabilidad total, utilizando que los sucesos "Transporte" y "Andando" forman un sistema completo de sucesos, ya que "Transporte" $\cup$ "Andando" = Ω y que "Transporte" $\cap$ "Andando" = ϕ :

$$P(Puntual) = P(Puntual \cap Transporte) + P(Puntual \cap Andando) =$$

$$= P(Transporte) \cdot P(Puntual \mid Transporte) + P(Andando) \cdot P(Puntual \mid Andando) =$$

$$= 0.75 \cdot 0.60 + 0.25 \cdot 0.90 = 0.675$$

Así, $P(Andando \mid Puntual) = \dfrac{0.25 \cdot 0.90}{0.675} = \mathbf{0.\overset{\frown}{3}}$

b) Se trata de calcular $P(no\ Puntual)$. Ahora bien, como en el apartado anterior hemos calculado $P(Puntual)$, será muy fácil:

$P(no\ Puntual) = 1 - P(Puntual) = 1 - 0.675 = \mathbf{0.325}$

SEP03 P4A: Un ordenador personal tiene cargados dos programas antivirus A1 y A2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A1 lo detecta con una probabilidad de 0,9 y el programa A2 lo detecta con una probabilidad de 0,8. Calcular de forma razonada:

a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado.

b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A1 y no por A2.

Resolución:

Llamemos D1 al suceso "el virus ha sido detectado por el programa A1" y D2 al correspondiente por el programa A2.

Como los programas A1 y A2 actúan independientemente, los sucesos D1 y D2 son independientes (y sus contrarios también).

a) Puede ser detectado por A1 o por A2. El suceso en cuestión es D1 $\cup$ D2.

$$P(D1 \cup D2) = P(D1) + P(D2) - P(D1 \cap D2) = 0.9 + 0.8 - P(D1) \cdot P(D2) =$$

Hemos utilizado que $P(D1 \cap D2) = P(D1) \cdot P(D2)$, por la independencia de D1 y D2.

$$= 0.9 + 0.8 - 0.9 \cdot 0.8 = \mathbf{0.98}$$

b) El suceso cuya probabilidad nos piden es $D1 \cap \overline{D2}$:

$$P(D1 \cap \overline{D2}) = P(D1) \cdot P(\overline{D2}) = 0.9 \cdot 0.2 = \mathbf{0.18}$$

Ya que $D1$ y $\overline{D2}$ son independientes y que $P(\overline{D2}) = 1 - P(D2) = 1 - 0.8 = 0.2$

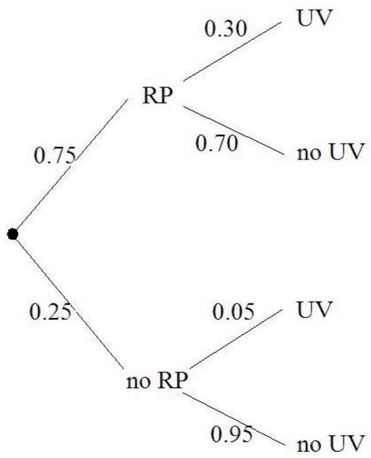
SEP03 P4B: El 75 % de los jóvenes que tienen vídeoconsola ha recibido propaganda de un determinado vídeojuego y el 25 % restante no. El 30 % de los que recibieron la propaganda ha utilizado después dicho vídeojuego y también lo ha hecho el 5 % de los que no la recibieron. Calcular de forma razonada:

a) La probabilidad de que un joven con vídeoconsola seleccionado al azar haya utilizado este vídeojuego.

b) La probabilidad de que un joven con vídeoconsola seleccionado al azar haya recibido propaganda y no haya utilizado el vídeojuego

Resolución:

La información se puede resumir en un diagrama árbol: (RP: Recibe propaganda. UV: Utiliza el videojuego)



Hemos de averiguar $P(UV)$. Como RP y $\overline{RP}$ forman un sistema completo de sucesos, podemos aplicar el teorema de la probabilidad total:

$P(UV) = P(UV \cap RP) + P(UV \cap \overline{RP}) = P(RP) \cdot P(UV \mid RP) + P(\overline{RP}) \cdot P(UV \mid \overline{RP}) = 0.75 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot$

b) Nos piden $P(RP \cap \overline{UV}) = P(RP) \cdot P(\overline{UV} \mid RP) = 0.75 \cdot 0.70 = \mathbf{0.525}$

JUN04 P4A: El 60 % de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españoles. De estos, el 40 % eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30 %. Calcular:

a) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.

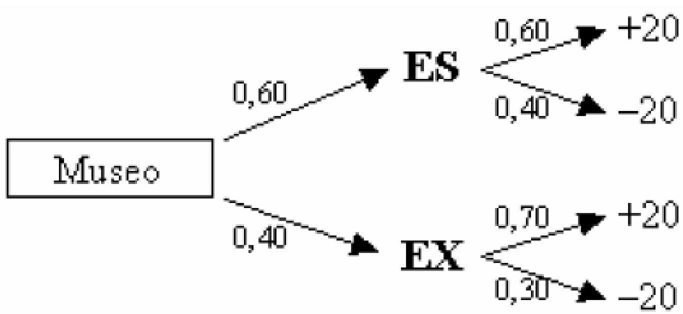
b) Si se escoge un visitante al azar, la probabilidad de que no sea español y tenga 20 años o más.

Resolución:

Designamos por "ES" el suceso ser español; por "EX", no ser español; por "–20" tener menos de 20 años y por "+20" tener 20 o más años. Los datos son:

$P(ES) = 0.6 \rightarrow P(EX) = 0.4.\ \ P(-20 \mid ES) = 0.4 \rightarrow P(+20 \mid ES) = 0.6\ \ P(-20 \mid EX) = 0.3 \rightarrow P(+20$

Puede formarse el siguiente diagrama de árbol.



a) Por la ley de la probabilidad total:

$P(-20) = P(ES) \cdot P(-20 \mid ES) + P(EX) \cdot P(-20 \mid EX) = 0.60 \cdot 0.40 + 0.40 \cdot 0.30 = \mathbf{0.36}$

b) $P(EX \cap +20) = P(EX) \cdot P(+20 \mid EX) = 0.40 \cdot 0.70 = \mathbf{0.28}$

JUN04 P4B: Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1 % y del 10 %, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:

a) La probabilidad de que sea una pieza no defectuosa fabricada en la máquina B.

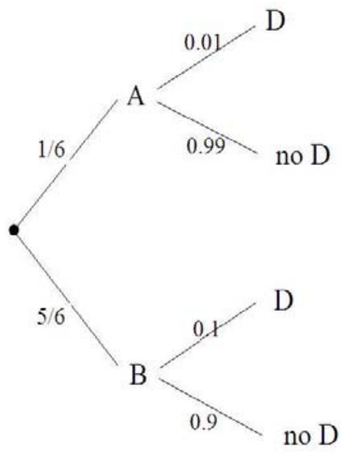
b) La probabilidad de que esté fabricada en la máquina A, si sabemos que es defectuosa.

Resolución:

Sean A y B los sucesos ser fabricados por la máquina A y por B, respectivamente. Sea D el suceso ser defectuosa. Elegir una pieza al azar puede ser considerado como un experimento compuesto donde primero puede ser fabricada por A o por B y después puede ser defectuosa o no:

$$P(A) = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \ ; \ P(B) = \frac{250}{300} = \frac{5}{6} \ ; \ P(D \mid A) = 0.01 \ (\rightarrow P(\overline{D} \mid A) = 0.99) \ ;$$

$$P(D \mid B) = 0.1 \ (\rightarrow P(\overline{D} \mid B) = 0.9)$$



a) $P(\overline{D} \cap B) = P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) = \frac{5}{6} \cdot 0.9 = \mathbf{0.75}$

b) Hemos de calcular $P(A \mid D)$, que es una probabilidad "a posteriori". Por ello aplicaremos el Teorema de Bayes:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{1/6 \cdot 0.01}{P(D)}$$

Pero como como el suceso D = {Ser defectuosa} depende de si ha sido fabricada por la máquina A o por la máquina B, para calcular P(D) utilizaremos la ley de la probabilidad total. (Ya que A y B forman un sistema completo de sucesos: $A \cup B = \Omega \ \ y \ \ A \cap B = \phi$).

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) = \frac{1}{6} \cdot 0.01 + \frac{5}{6} \cdot 0.1 = 0.085$$

$$\Rightarrow P(A \mid D) = \frac{1/6 \cdot 0.01}{0.085} \approx \mathbf{0.0196}$$

SEP04 P4A: Se ha realizado una encuesta a un grupo de estudiantes de informática. Entre sus conclusiones está que un 40 % ha recibido algún curso de LINUX. Además, el 20 % de aquellos que recibieron algún curso de LINUX tiene ordenador en su casa. Si un 10 % de estudiantes de informática tiene ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, calcular:

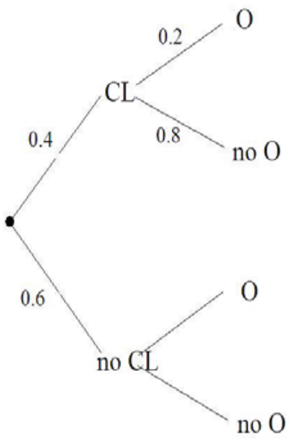
a) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa y haya recibido un curso de LINUX.

b) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa.

c) Si un estudiante de informática tiene ordenador en casa, la probabilidad de que haya recibido un curso de LINUX.

Resolución:

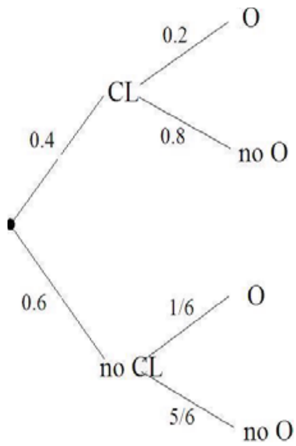
Sea CL el suceso "haber recibido algún curso de Linux" y O el suceso "tener ordenador en casa":



Sin embargo, entre los datos iniciales nos falta $P(O \mid \overline{CL})$. Por eso el árbol no está completo. Sin embargo sí nos dicen que $P(O \cap \overline{CL}) = 0.1$. Con lo cual:

$$P(O \mid \overline{CL}) = \frac{P(O \cap \overline{CL})}{P(\overline{CL})} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$$

Y podemos completar el árbol: $\Rightarrow\Rightarrow$



a) Nos piden $P(O \cap CL) = P(CL) \cdot P(O \mid CL) = 0.4 \cdot 0.2 = \mathbf{0.08}$

b) Nos piden $P(O) = P(O \cap CL) + P(O \cap \overline{CL}) = 0.08 + 0.1 = \mathbf{0.18}$ (Esto es así gracias a que CL y $\overline{CL}$ forman un sistema completo de sucesos)

c) Nos piden $P(CL \mid O)$ (probabilidad a posteriori, aplicaremos Teorema de Bayes):

$$P(CL \mid O) = \frac{P(CL \cap O)}{P(O)} = \frac{0.08}{0.18} = \mathbf{0.\widehat{4}}$$

$\boxed{\text{SEP04 P4B}}$: En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25 % de las mujeres son rubias y el 10 % de los hombres también son rubios. Calcular:

a) Si se elige al azar una persona y resulta ser rubia, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

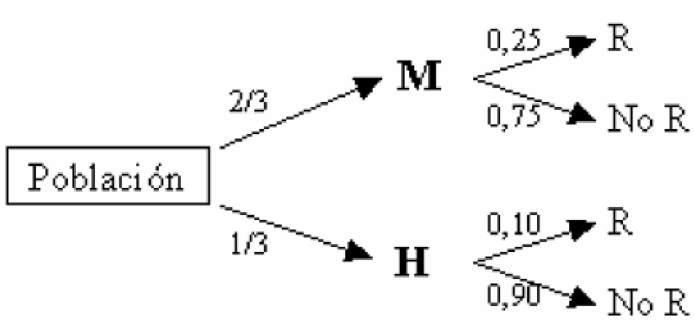
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubio?

Resolución:

Sea M = {Ser mujer}, H = {Ser hombre} y R = {Tener pelo rubio}

Llamamos $P(H) = p$. Entonces $P(M) = 2p$ con lo que $p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$ y así:

$P(H) = \frac{1}{3}$ y $P(M) = \frac{2}{3}$. Podemos formar el siguiente diagrama de árbol:



a) Necesitamos $P(M \mid R) = \dfrac{P(M \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(M) \cdot P(R \mid M)}{P(R)} = \dfrac{2/3 \cdot 0.25}{P(R)}$.

Para calcular $P(R)$ utilizamos la ley de la probabilidad total:

$P(R) = P(M) \cdot P(R \mid M) + P(H) \cdot P(R \mid H) = \frac{2}{3} \cdot 0.25 + \frac{1}{3} \cdot 0.10 = 0.2$. Con lo cual:

$P(M|R) = \dfrac{2/3 \cdot 0.25}{0.2} = \mathbf{0.8\widehat{3}}$

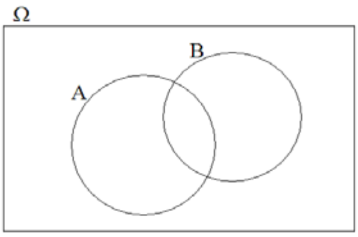
b) $P(H \cap \overline{R}) = P(H) \cdot P(\overline{R}|H) = (1/3) \cdot 0,90 = \mathbf{0.3}$

$\boxed{\text{JUN05 P4A}}$: Sean A y B dos sucesos con P(A) = 0,5; P(B)=0,3 y P(A∩B)=0,1. Calcular las probabilidades siguientes:

P(A∪B), P(A|B), P(A| A∩B) y P(A| A∪B).

Resolución:

El siguiente dibujo ayuda a recordar las propiedades de la probabilidad para la unión e intersección de 2 conjuntos:



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = \mathbf{0.7}$

Por definición de Probabilidad condicionada $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.3} = \mathbf{0.\widehat{3}}$

Análogamente $P(A \mid A \cap B) = \dfrac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \mathbf{1}$.

Hemos utilizado que $A \cap A = A \Rightarrow A \cap A \cap B = A \cap B$. (Resulta evidente que si sabemos que sucede $A \cap B$, (suceden ambos) la probabilidad de que suceda A con esa condición es 1, dado que es suceso seguro.)

$P(A \mid A \cup B) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.5}{0.7} = \dfrac{5}{7} \approx \mathbf{0.7143}$

Hemos utilizado que $A \cap (A \cup B) = A$, dado que A está contenido dentro de $A \cup B$.

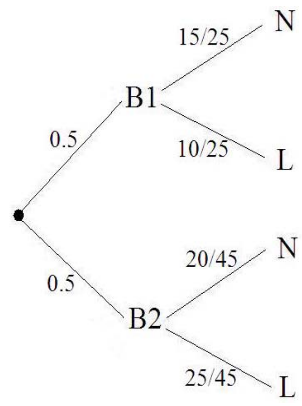
$\boxed{\text{JUN05 P4B}}$: Tenemos dos bolsas de caramelos, la primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón y la segunda 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo. Calcular:

a) La probabilidad de que el caramelo sea de naranja.

b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayamos extraído de la segunda bolsa?

Resolución:

Se trata de un problema de probabilidad compuesta donde podemos representar la situación mediante diagrama de árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(N) = P(B1) \cdot P(N \mid B1) + P(B2) \cdot P(N \mid B2) =$$
$$= 0.5 \cdot \frac{15}{25} + 0.5 \cdot \frac{20}{45} = \mathbf{0.5\widehat{2}}$$

b) Se trata de calcular $P(B2 \mid L)$, (probabilidad "a posteriori").

Por el teorema de Bayes: $P(B2 \mid L) = \dfrac{P(B2 \cap L)}{P(L)} =$

$$= \frac{P(B2) \cdot P(L \mid B2)}{P(L)} = \frac{0.5 \cdot 25/45}{1 - P(N)} = \frac{0.2\widehat{7}}{0.4\widehat{7}} \approx \mathbf{0.5319}$$

$\boxed{\text{SEP05 P4A}}$: En un grupo de 2º de bachillerato el 15% estudia Matemáticas, el 30% estudia Economía y el 10% ambas materias. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos Estudiar Matemáticas y Estudiar Economía?

b) Si se escoge un estudiante del grupo al azar, calcular la probabilidad de que no estudie ni Matemáticas ni Economía.

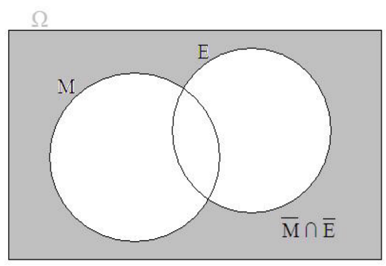
Resolución:

En el experimento de escoger un alumno al azar, definimos los sucesos M = {estudia matemáticas} y $E = \{\text{Estudia economía}\}$. Entonces tenemos que $P(M) = 0.15; P(E) = 0.30; P(M \cap E) = 0.10$.

a) Para ser independientes se ha de cumplir que $P(M \cap E) = P(M) \cdot P(E)$.

$P(M \cap E) = 0.10$; $P(M) \cdot P(E) = 0.15 \cdot 0.30 = 0.045$ Por lo tanto **no** son independientes.

b) Tenemos que calcular $P(\overline{M} \cap \overline{E})$. Recordemos, con ayuda del siguiente gráfico la propiedades de la probabilidad de la unión y la intersección:



Utilizaremos que $\overline{M} \cap \overline{E} = \Omega - (M \cup E)$:

$P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - P(M \cup E)$. Calculamos $P(M \cup E)$:

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) =$$
$$= 0.15 + 0.3 - 0.1 = 0.35.$$

Con o que $P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - 0.35 = \mathbf{0.65}$

$\boxed{\text{SEP05 P4B}}$: En un centro escolar, 22 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos llevan gafas. Si el número de chicas es tres veces superior al de chicos, hallar la probabilidad de que un estudiante elegido al azar:

a) No lleve gafas

b) Sea chica y lleve gafas

c) Sea chica, sabiendo que lleva gafas.

Resolución:

Llamemos A y O a los sucesos ser chica y ser chico, respectivamente. Llamaremos G al suceso llevar gafas.

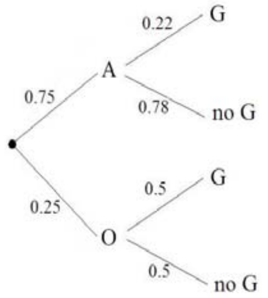
Observemos que los datos referidos a las personas que llevan gafas está diferenciado según si se trata de chicas o de chicos. Es decir los datos debemos interpretarlos como probabilidades condicionadas:

$$P(G \mid A) = \frac{22}{100} = 0.22 \;\; ; \;\; P(G \mid O) = \frac{5}{10} = 0.5.$$

Para averiguar $P(A)$ y $P(O)$, tomamos $P(O) = p$. Entonces $P(A) = 3p$. Como los sucesos A y O son contrarios:

$P(A)+P(O)=1 \Rightarrow 3p+p=1 \Rightarrow p=0.25.$ Así, $P(A)=0.75$ y $P(O)=0.25.$

Ahora podríamos formar el árbol que resume toda la información:



a) Hay que calcular $P(\overline{G}).$ Utilizaremos el teorema de la prob. total:

$P(\overline{G}) = P(A)\cdot P(\overline{G}\mid A)+P(O)\cdot P(\overline{G}\mid O) =$

$= 0.75\cdot 0.78+0.25\cdot 0.5 = \mathbf{0.71}$

b) Necesitamos $P(A\cap G) = P(A)\cdot P(G\mid A) =$

$= 0.75\cdot 0.22 = \mathbf{0.165}$

c) Nos piden $P(A\mid G)$ (probabilidad a posteriori). Por el teorema de Bayes:

$$P(A\mid G) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{0.165}{1-P(\overline{G})} = \frac{0.165}{0.29} = \mathbf{0.56897}.$$

$\boxed{\text{JUN06 P4A}}$: Sean A y B dos sucesos tales que $P(A\cup B)=0,9;$ $P(\overline{A})=0,4,$ donde $\overline{A}$ denota el suceso contrario o complementario del suceso $A,$ y $P(A\cap B)=0,2.$ Calcula las probabilidades siguientes: $P(B),$ $P(A\mid B),$ $P(A\cap\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B}).$

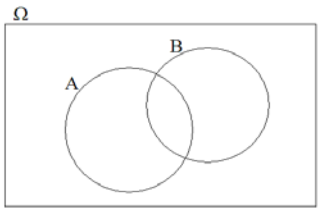
Resolución:

$P(\overline{A}) = 0.4 \Rightarrow P(A)=0.6$ (ya que $P(A)+P(\overline{A})=1$)

Sabemos que $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Sustituyendo: $0.9 = 0.6+P(B)-0.2$

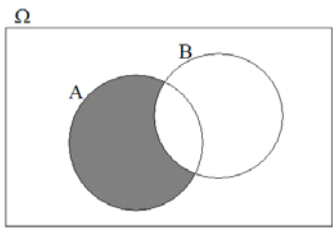
$\Rightarrow \mathbf{P(B) = 0.5}$



$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.5} = \mathbf{0.4}$$

$P(A\cap\overline{B}) =$ (Ver dibujo) $= P(A)-P(A\cap B) =$

$= 0.6-0.2 = \mathbf{0.4}$



$$P(\overline{A}\cup\overline{B}) = \left(\begin{array}{l}\text{Con ayuda de un dibujo se puede}\\ \text{apreciar que } \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}\end{array}\right) = P(\overline{A\cap B}) = 1-P(A\cap B) = 1-0.2 = \mathbf{0.8}$$

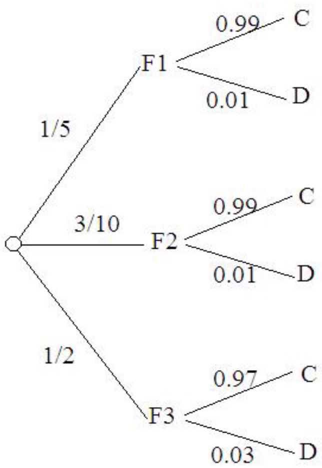
$\boxed{\text{JUN06 P4B}}$: El volumen de producción diario en tres fábricas diferentes de una misma empresa es de 1000 unidades en la primera fábrica, 1500 unidades en la segunda y 2500 en la tercera. Por ciertos desajustes, algunas unidades salen defectuosas. En concreto, lo son el 1% de las unidades producidas en las dos primeras fábricas y el 3% de las producidas en la tercera.

1. a) ¿Qué proporción de unidades fabricadas son correctas?

b) Si se tiene una unidad defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la tercera fábrica?

Resolución:

Construyamos el árbol correspondiente, ya que se trata de un experimento compuesto.



Experimento: Escoger una pieza al azar

F1: La pieza escogida es de la primera fábrica

(análogamente con F2 y F3)

C: La pieza resulta ser correcta

D: La pieza resulta ser defectuosa.

$P(F1) = \frac{1000}{5000} = \frac{1}{5}; P(F2) = \frac{1500}{5000} = \frac{3}{10}$

$P(F3) = \frac{2500}{5000} = \frac{1}{2}$

a) $P(C) =$ (Teorema de la probabilidad total)

$$= P(F1 \cap C) + P(F2 \cap C) + P(F3 \cap C) =$$

$$= P(F1) \cdot P(C \mid F1) + P(F2) \cdot P(C \mid F2) + P(F3) \cdot P(C \mid F3) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 0.99 + \frac{3}{10} \cdot 0.99 + \frac{1}{2} \cdot 0.97 = \mathbf{0.98}$$

Por lo que la proporción de unidades correctas es de un 98%

b) ¿ $P(F3 \mid D)$?

Esta es una probabilidad "a posteriori" y para calcularla aplicaremos el teorema de Bayes.

$$P(F3 \mid D) = \frac{P(F3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(F3) \cdot P(D \mid F3)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.03}{0.02} = \mathbf{0.75}$$

(Hemos utilizado aquí que $P(D) + P(C) = 1 \Rightarrow P(D) = 1 - 0.98 = 0.02$)

SEP06 P4A: Un estudio revela que el 10% de los oyentes de radio sintoniza a diario las cadenas Music y Rhythm, que un 35% sintoniza a diario Music y que el 55% de los oyentes no escucha ninguna de las dos emisoras. Obtén:

a) La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm.

b) La probabilidad de que un oyente elegido al azar sintonice la cadena Rhythm pero no la Music.

c) La probabilidad de que un oyente, del que sabemos que escucha Rhythm, escuche Music.

Resolución:

Pongamos nombre a los sucesos que intervienen:

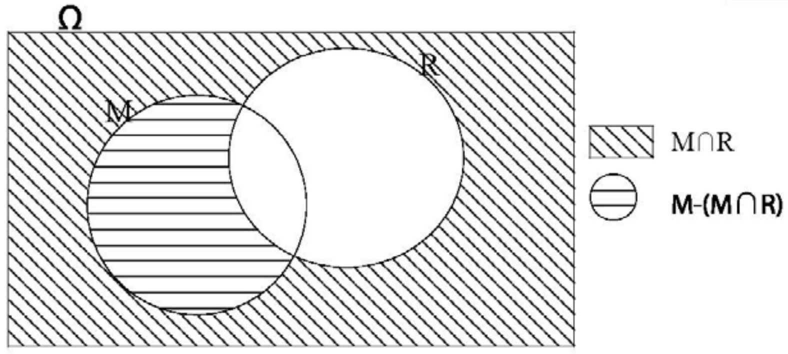
$M =$ "sintonizar la cadena Music"

$R =$ "sintonizar la cadena Rhythm"

Así: $P(M \cap R) = 0.10$ (pues se trata de elementos del espacio muestral que están en M y en R (en los 2 a la vez).

$P(M) = 0.35$ y $P(\overline{M} \cap \overline{R}) = 0.55$ (pues dice que no está en M y además no está en R).

a) Se nos pide $P(R)$. Para saber cómo utilizar los datos que se nos da realizamos una representación gráfica:



$P(R)+P(M)-P(M\cap R)+P(\overline{M}\cap\overline{R}) = 1$
$P(R)+0.35-0.10+0.55 = 1$
$P(R) = 0.20$

Otra manera de hacerlo:

Observando la representación gráfica, es fácil observar que $\overline{M}\cap\overline{R}$ es el contrario de $M\cup R$, por lo que $P(M\cup R)+P(\overline{M}\cap\overline{R}) = 1 \to P(M\cup R) = 1-P(\overline{M}\cap\overline{R}) = 1-0.55 = 0.45$.

Y ahora podemos utilizar la fórmula de la unión y la intersección:

$P(M\cup R) = P(M)+P(R)-P(M\cap R)$

$0.45 = 0.35+P(R)-0.10 \to P(R) = 0.45+0.10-0.35 = 0.20$.

b) Se nos pide $P(R\cap\overline{M})$.

Observando el dibujo del apartado a), obtenemos que:

$P(R\cap\overline{M}) = P(R)-P(M\cap R) = 0.20-0.10 = 0.10$

c) Se nos pide $P(M \mid R)$. Por la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(M \mid R) = \frac{P(M\cap R)}{P(R)} = \frac{0.10}{0.20} = 0.5$$

SEP06 P4B: Dados dos sucesos aleatorios independientes se sabe que la probabilidad de que ocurran los dos simultáneamente es 3/25 y la de que ocurra al menos uno de los dos es 17/25. Calcula la probabilidad de cada uno de los dos sucesos.

Resolución:

Sean A y B los sucesos de los que se habla.

Que ocurran simultáneamente significa que ocurre $A\cap B \to P(A\cap B) = \frac{3}{25}$.

Que ocurra al menos uno de los dos significa que ocurre $A\cup B \to P(A\cup B) = 17/25$.

Como son independientes:

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \to \frac{3}{25} = P(A)\cdot P(B)(*)$

Utilizando la fórmula de la unión: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \to \frac{17}{25} = P(A)+P(B)-\frac{3}{25}(**)$

Juntamos las ecuaciones (*) y (**), llamamos $x = P(A)$ e $y = P(B)$ y así obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 0.12 = x\cdot y \\ 0.70 = x+y \end{array}\right. \to \begin{array}{l} x = 0.4 \\ y = 0.3 \end{array} \text{ o } \begin{array}{l} x = 0.3 \\ y = 0.4 \end{array}$$

En cualquier caso la probabilidad de los sucesos es 0.3 de uno de ellos y 0.4 del otro.

JUN07 P4A: Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivo en el 96% de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94% de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:

a) La probabilidad de que el test dé positivo.

b) La probabilidad de que sea portadora del virus, si el resultado del test es positivo.

c) La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.

Resolución:

Llamemos V al suceso "ser portador del virus" y + al suceso "dar positivo en el test".

Entonces, el enunciado dice que:

$$\begin{cases} P(+ \mid V) = 0.96 \\ P(- \mid \overline{V}) = 0.94 \\ P(V) = \dfrac{1}{145} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(- \mid V) = 0.04 \\ P(+ \mid \overline{V}) = 0.06 \\ P(\overline{V}) = \dfrac{144}{145} \end{cases}$$

Dado que se trata de un experimento compuesto (1º es portador o no del virus, después da positivo o no en el test) facilitará la resolución el planteamiento mediante diagrama de árbol:

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(+) = P(+\cap V) + P(+\cap \overline{V}) = P(V)\cdot P(+ \mid V) + P(\overline{V})\cdot P(+ \mid \overline{V}) = \frac{1}{145}\cdot 0.96 + \frac{144}{145}\cdot 0.06 = 0.066207$$

b) Se pide $P(V \mid +)$, que es una probabilidad "a posteriori". Tendremos que aplicar el teorema de Bayes.

$$P(V \mid +) = \frac{P(V\cap +)}{P(+)} = \frac{0.0066207}{0.066207} = 0.1.$$

c) Se pide $P(-\cap \overline{V}) = P(\overline{V})\cdot P(- \mid \overline{V}) = \dfrac{144}{145}\cdot 0.94 = 0.93352$

JUN07 P4B: La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0,1. La probabilidad de que suene ésta si se ha producido algún incidente es 0,97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.

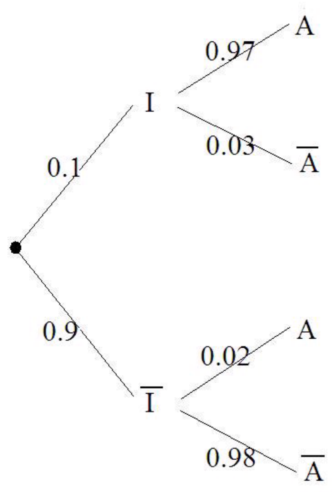
b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Resolución:

Llamemos I al suceso "se produce algún incidente" y A al suceso "suena la alarma". Datos:

$$\begin{cases} P(I) = 0.1 & \Rightarrow P(\overline{I}) = 0.9 \\ P(A \mid I) = 0.97 & \Rightarrow P(\overline{A} \mid I) = 0.03 \\ P(A \mid \overline{I}) = 0.02 & \Rightarrow P(\overline{A} \mid \overline{I}) = 0.98 \end{cases}$$

Se trata de un experimento compuesto que se puede modelizar mediante un diagrama de árbol como éste:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap I) + P(\overline{A} \cap \overline{I}) =$

$= P(I) \cdot P(\overline{A} \mid I) + P(\overline{I}) \cdot P(\overline{A} \mid \overline{I}) =$

$= 0.1 \cdot 0.03 + 0.9 \cdot 0.98 = 0.885$

b) Se nos pide $P(\overline{I} \mid A)$, que es una probabilidad a posteriori, por lo que utilizaremos el teorema de Bayes: $P(\overline{I} \mid A) = \dfrac{P(\overline{I} \cap A)}{P(A)} =$

$= \dfrac{P(\overline{I}) \cdot P(A \mid \overline{I})}{1 - P(\overline{A})} = \dfrac{0.9 \cdot 0.02}{1 - 0.885} = 0.15652$

$\boxed{\text{SEP07 P4A}}$: Se sabe que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,6$ y $p(A \cup B) = 0,7$.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula $p(A \cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ representa el suceso complementario o contrario de B.

c) Calcula $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Resolución:

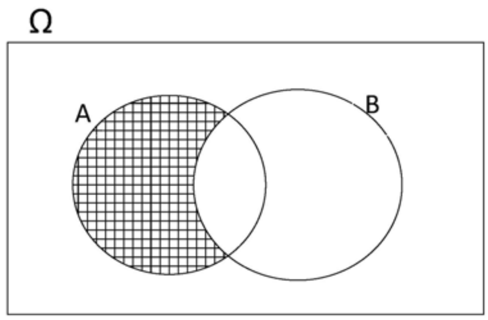
a) Para que sean independientes habría de cumplirse que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Para comprobarlo, hemos de calcular $P(A \cap B)$. Utilicemos la fórmula de la unión y la intersección:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0,7 = 0,4 + 0,6 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0,3$

Pero $P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$, luego los sucesos A y B no son independientes.

b) $A \cap \overline{B}$ es el suceso formado por aquellos elementos que están en A y al mismo tiempo no están en B. Este conjunto lo solemos representar con forma de luna. Hagamos un dibujo mediante el cual deducir la fórmula para calcular su probabilidad:

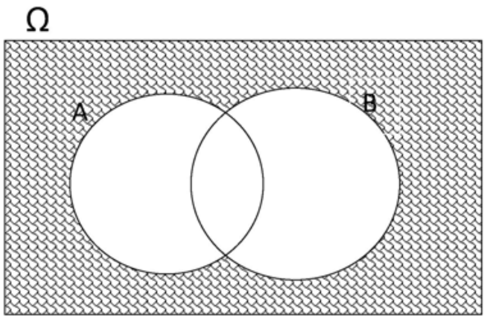


Así, $P(A \cap \overline{B}) =$

$= P(A) - P(A \cap B) =$

$= 0,4 - 0,3 = 0,1.$

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$ es el suceso formado por los elementos que no están en A y además no están en B. Dibujo:



Por lo que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= 1 - P(A \cup B) =$

$= 1 - 0,7 = 0,3.$

$\boxed{\text{SEP07 P4B}}$: De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace 2 dianas de cada 3 disparos, y el otro consigue 3 dianas de cada 4 disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

a) La probabilidad de que los dos acierten.

b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

c) La probabilidad de que ninguno acierte.

d) La probabilidad de que alguno acierte.

e) Sumar las probabilidades de a), b) y c), justificando la suma obtenida.

Resolución:

Llamamos A1 y A2 a los sucesos "acierta el tirador 1" y "acierta el tirador 2" respectivamente. Por el contexto tenemos que los 2 sucesos son independientes.

a) Como los sucesos son independientes, $P(A1 \cap A2) = P(A1) \cdot P(A2) = 2/3 \cdot 3/4 = 1/2$

b) $P(\text{"uno acierta y el otro no"}) = P(A1 \cap \overline{A2}) + P(\overline{A1} \cap A2) = P(A1) \cdot P(\overline{A2}) + P(\overline{A1}) \cdot P(A2) = 2/3 \cdot 1/4 + 1/3 \cdot 3/4 = 1/6 + 1/4 = 5/12$

c) $P(\overline{A1} \cap \overline{A2}) = P(\overline{A1}) \cdot P(\overline{A2}) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$

d) $P(\text{"alguno acierte"}) = 1 - P(\text{"nadie acierte"}) = 1 - P(\overline{A1} \cap \overline{A2}) = 1 - 1/12 = 11/12.$

(también hubiera valido $P(\text{"alguno acierte"}) = P(A1 \cup A2) = \ldots$)

e) La suma obtenida es 1 y se justifica porque los sucesos correspondientes a los tres apartados son disjuntos y componen el espacio muestral.