PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: **Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.**
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 5x+7y+\alpha z=0 \end{cases}$, se pide:

a)Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución (x, y, z)= (0,0,0).

(5 puntos)

Solución:
Estudiemos el sistema.
Llamando A a la matriz de coeficientes y A´ a la matriz ampliada,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\5&7&\alpha\end{pmatrix}\quad y\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&3&4&0\\5&7&\alpha&0\end{array}\right)$$

Como el sistema es homogéneo, sabemos que es compatible (rang(A) = rang(A´)).
Estudiemos el máximo rango posible de A,

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\5&7&\alpha\end{vmatrix}=3\alpha+14+20-15-28-2\alpha=\alpha-9$$

$$\alpha-9=0 \;\rightarrow\; \alpha=9$$

$$\textit{Para } \alpha\neq 9,\; |A|\neq 0 \;\; \textit{luego} \;\; rang(A)=3=n^o \textit{ de incógnitas} \;\rightarrow\; \textit{Sistema Compatible Determin}$$

como el sistema es homogéneo la solución es la trivial, x = y = z = 0

Para α = 9, estudiemos la matriz A resultante. Para este valor de α sabemos que $|A| = 0$*, luego* $rang(A) \le 2$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\5&7&9\end{pmatrix}$$

Busquemos un menor de orden dos no nulo, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 2$$

luego rang(A) = 2 < 3 = nº de incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado.

De lo estudiado anteriormente, las respuestas a cada uno de los apartados será:

El sistema sólo admite la solución (x , y , z) = (0 , 0 , 0) (solución trivial) para α ≠ 9

El valor de α que hace al sistema indeterminado es   α = 9

Para este valor de α la solución será:

Utilizamos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir,

$$\begin{cases} x + y = -z \\ 2x + 3y = -4z \end{cases} \qquad \textbf{\textit{Resolviéndolo por Cramer,}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -4z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3z + 4z}{1} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4z + 2z}{1} = -2z$$

Por tanto, para α = 9 la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema A.2. Se dan las matrices

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.

Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) ½ T. (3 puntos)

$$d\left(\frac{1}{2}T\right) = \left(\text{como T es una mátriz 3x3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 d(T) = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

b) ***M*** $^{\boldsymbol{4}}$***. (3 puntos)***

$$d\left(M^4\right) = \left(\text{como } \det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})\cdot\det(\mathrm{B})\right) = \det(M)^4 = 6^4 = 1296$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+2+4)-(2+1-4) = 6$$

c) ***T M*** $^{\boldsymbol{3}}$ ***T*** $^{\boldsymbol{-1}}$***.(4 puntos)***

Como:

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Entonces:

$$\det\left(T\cdot M^3\cdot T^{-1}\right) = \det(T)\cdot\det\left(M^3\right)\cdot\det\left(T^{-1}\right) = \det(T)\cdot\det(M)^3\cdot\frac{1}{\det(T)} = \sqrt{2}\cdot 6^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 6^3 = 216$$

Problema A.3. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3. ***(5 puntos).***

Cálculo de A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \cdot 17 - 29 \cdot 10 & 17 \cdot 29 - 29 \cdot 17 \\ -10 \cdot 17 + 17 \cdot 10 & -10 \cdot 29 + 17 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^2 = -I$

Cálculo de A^3

$A^3 = A^2 . A = -I . A = -A$

$$A^3 = -A = -\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Los números α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$. ***(5 puntos).***

Utilizaremos los resultados del anterior apartado $A^2 = -I$ y $A^3 = -A$

$$(I + A)^3 = (I + A)^2 (I + A)$$

$$(I + A)^2 = (I + A)(I + A) = II + IA + AI + AA = I + A + A + A^2 = I + 2A - I = 2A$$

$$(I + A)^3 = 2A(I + A) = 2AI + 2AA = 2A + 2A^2 = 2A - 2I = -2I + 2A$$

$$\textit{por lo que} \quad \alpha = -2 \quad \textit{y} \quad \beta = 2$$

<u>**NOTA:**</u> También se puede resolver el sistema en función de los parámetros.

OPCIÓN B

Problema B.1. Dado el sistema dependiente α del parámetro real

$$\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases}$$

Se pide,

a) Determinar, razonadamente los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. ***(5 puntos)***

Llamando A a la matriz de coeficientes del sistema y A' a la matriz ampliada,

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

A es una matriz 3x3, luego el máximo rango de A será 3

A' es una matriz 3x4, luego su máximo rango será 3

Estudiemos el rango de A

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3+1+1-\alpha-\alpha-\alpha=\alpha^3-3\alpha+2$$

$$\alpha^3-3\alpha+2=0$$

$$\textit{Por Ruffini}:$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array} \qquad \textit{Soluciones}: \quad \alpha=1 \quad y \quad \alpha=-2$$

$$\textit{Para} \quad \alpha\neq 1 \quad y \quad \alpha\neq -2, \quad |A|\neq 0 \quad \textit{luego} \quad ran(A)=3=ran(A')=n^{o}\ de\ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.D$$

$$\textit{Para} \quad \alpha=-2$$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$ *luego el rango de A será menor o igual que 2, como el menor de A*

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Ahora calculemos el rango de A'. Orlando el menor anterior de A, no nulo, con 3ª fila y 4ª columna de A´,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+1+1+2+2-1 = 9 \neq 0 \qquad luego \quad ran(A') = 3$$

ran(A) = 2 ≠ 3 = ran(A'), Sistema Incompatible

$$Para \quad \alpha = 1$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como esta matriz tiene todas sus filas (o columnas) iguales para estudiar su rango sólo debemos considerar una fila, la 1ª por ejemplo, como esta fila tiene elementos no nulos ran(A´) = 1. Lo mismo ocurre con la matriz A, por lo que

ran(A) = ran(A´) = 1 < 3 = nº de incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado.

b) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando α = 0. *(5 puntos).*

Sustituimos **α = 0** en el sistema y nos queda:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \rightarrow \\ x + y = 1 \end{cases} y = 1 - z \quad \rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x + 1 - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = z \quad \rightarrow \quad z + z = 1 \rightarrow 2z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$x + z = 1 \rightarrow x + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = 1 - z \rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Problema B.2. Se da la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) **Obtener razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de *m*.*(5 puntos)***

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{vmatrix} = -m(m^2-1)-2m = -m^3+m-2m = -m^3-m$$

$$-m^3-m=0 \quad \to \quad -m(m^2+1)=0 \quad \to \begin{cases} -m=0 & \to \quad m=0 \\ m^2+1=0 & \to \quad m^2=-1;\ \text{sin } solución \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq 0$, $ran(A) = 3$

Si $m=0$,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$como \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \to \quad ran(A)=2$$

b) **Explicar por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. *(2 puntos)***

Para $m = 1$ *sabemos, según lo calculado en el apartado anterior, que* $|A| = -1^3-1 = -1-1 = -2 \neq 0$, *por lo tanto, cuando* $m = 1$, *existe la matriz inversa de* A.

c) **Obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando m = 1, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprobar que los productos $A\,A^{-1}$ y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad.** ***(3 puntos)***

Para m = 1, $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$ y $|A| = -2$

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix},\ \textit{cálculo de los menores:}\ \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-1&-2&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ \textit{adjuntos:}\ \begin{pmatrix}0&0&-2\\+1&-2&+1\\-1&0&-1\end{pmatrix},$$

$$\textit{traspuesta:}\ \begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-2&0\\-2&1&-1\end{pmatrix}.\ \ \textit{Y finalmente}\ \ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-2&0\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-2&0\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\0&1&0\\1&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

Luego $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\0&1&0\\1&-1/2&1/2\end{pmatrix}$

También se puede calcular mediante transformaciones de filas y columnas.

$$(A\,|\,I)\rightarrow(I\,|\,A^{-1})$$

Comprobemos los productos indicados,

$$A\,A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\0&1&0\\1&-1/2&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.0+0.0+1.1&-1\frac{-1}{2}+0.1+1\frac{-1}{2}&-1\frac{1}{2}+0.1+1\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

De forma similar obtendríamos el otro producto $A^{-1}A=\begin{pmatrix}0&-1/2&1/2\\0&1&0\\1&-1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

Luego, hemos comprobado que los productos $A\,A^{-1}$ *y* $A^{-1}A$ *dan la matriz unidad.*

Problema B.3. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$.Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3. *(5 puntos).*

Cálculo de A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \cdot 17 - 29 \cdot 10 & 17 \cdot 29 - 29 \cdot 17 \\ -10 \cdot 17 + 17 \cdot 10 & -10 \cdot 29 + 17 \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^2 = -I$

Cálculo de A^3

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$$A^3 = -A = -\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Los números α y β para los que se verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$.*(5 puntos).*

Utilizaremos los resultados del anterior apartado $A^2 = -I$ y $A^3 = -A$

$$(I + A)^3 = (I + A)^2 (I + A)$$

$$(I + A)^2 = (I + A)(I + A) = II + IA + AI + AA = I + A + A + A^2 = I + 2A - I = 2A$$

$$(I + A)^3 = 2A(I + A) = 2AI + 2AA = 2A + 2A^2 = 2A - 2I = -2I + 2A$$

$$\textit{por lo que} \quad \alpha = -2 \quad y \quad \beta = 2$$

<u>NOTA:</u> También se puede resolver el sistema en función de los parámetros.