TEMA 10: APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES

$f'(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ CRECIENTE en $x = a$

$f'(a) < 0 \Rightarrow f(a)$ DECRECIENTE en $x = a$

- Una función es creciente/decreciente en un intervalo si es creciente/decreciente en todos sus puntos.

- Estudiar crecimiento y decrecimiento en una función es estudiar su MONOTONÍA

2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1. Se halla la primera derivada → $f'(x)$
2. Se iguala a cero y se resuelve la ecuación → $f'(x) = 0 \rightarrow a$
3. Se halla la segunda derivada→ $f''(x)$
4. Se sustituyen los valores que anulan la primera derivada (a) en $f''(x)$
5. Si:

$f''(a) > 0 \Rightarrow$ mínimo en $x = a$
$f''(a) < 0 \Rightarrow$ máximo en $x = a$

** Si $f''(a) = 0$ no podemos concluir nada

3. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

$f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ CÓNCAVA en $x = a$

$f''(a) < 0 \Rightarrow f(a)$ CONVEXA en $x = a$

- Estudiar concavidad y convexidad en una función es estudiar su CURVATURA.

- Los puntos donde la función pasa de ser cóncava a convexa o viceversa se llaman PUNTOS DE INFLEXIÓN

4. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

1. Se halla la segunda derivada → $f''(x)$
2. Se iguala a cero y se resuelve la ecuación → $f''(x) = 0 \rightarrow b$
3. Se halla la tercera derivada → $f'''(x)$
4. Se sustituyen los valores que anulan la segunda derivada en $f'''(x)$
5. Si:

$f'''(b) \neq 0 \Rightarrow$ punto de inflexión en $x = b$
$f'''(b) = 0 \Rightarrow$ no podemos concluir nada

5. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Aparecen, con frecuencia, problemas físicos, geométricos, económicos, bilógicos,…, en los que se trata de maximizar una función (hacer máximo un volumen, unos beneficios, una población, hacer mínimos unos costes o un área…)

Para ello, hay que encontrar la expresión analítica de la función que hemos de optimizar:

- **a.** Expresar funciones que se describen mediante un enunciado.
- **b.** Aprender a calcular o hallar los extremos de una función que viene dada mediante expresión analítica.

¿Y como?

1. Se resuelve, la ecuación $f'(x)=0$
2. Se seleccionan las raíces (soluciones), $x_1, x_2, x_3, \dots$ de $f'(x)=0$.
3. Se calcula $f(x_1), f(x_2), f(x_3)\dots$.
4. Se observará que valor es el máximo y el mínimo.

6. LA DERIVACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES: REGLA DE L'HOPITAL

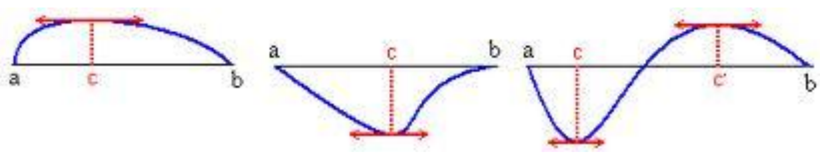
$$\text{Si } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right) \text{ y } \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

$$\text{Si } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \text{ y } \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

7. TEOREMAS.

Teorema de Rolle

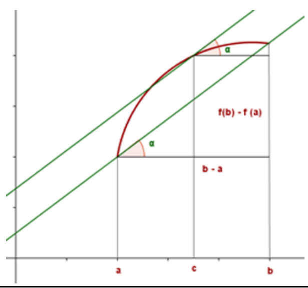
Si f es continua en [a,b] y derivable en (a,b) , f(a)=f(b) → $\exists c\in(a,b)/ f'(c)=0$



La idea es que una curva y sin picos que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo, necesariamente tiene algún punto con tangente horizontal.

Teorema del Valor Medio o de Lagrange

Si f es continua en [a,b] y derivable en (a,b) → $\exists c\in(a,b)/ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



La idea es que una curva continua y sin picos que va de A a B, habrá algún punto intermedio en el que su tangente sea paralela al segmento AB.