GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Obtener **razonadamente**:

a) $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx =$ *(3 puntos).*

El denominador tiene dos raíces simples, x =1 y x =2, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, $x = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, *calculemos los valores de A y B:*

para $x = 1 \;\rightarrow\; 1 = -A + 0 \;\rightarrow\; A = -1$

para $x = 2 \;\rightarrow\; 2 = 0 + B\,.\,1 \;\rightarrow\; B = 2$

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= -Ln\,|x-1| + 2\,Ln\,|x-2| + C$$

b) $\int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx =$ *(4 puntos).*

El numerador es de grado superior al denominador. Hay que realizar la división:

$$\frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = 2x + 1 + \frac{6x - 7}{6x^2 - 7x + 2}$$

$$\int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx = \int 2x + 1 dx + \int \frac{6x - 7}{6x^2 - 7x + 2} dx = x^2 + x + \ln\left(6x^2 - 7x + 2\right) + c, c \in \Re$$

c) $\int \left(x^2 + 2x\right) \cdot \ln x dx =$ *(3 puntos).*

Integral por partes

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 + 2x \rightarrow v = \int x^2 + 2x dx = \frac{x^3}{3} + x^2$$

$$\int \left(x^2 + 2x\right) \cdot \ln x dx = \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) - \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) - \int \frac{x^3}{3x} + \frac{x^2}{x} dx =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) - \frac{1}{3} \int x^2 dx + \int x dx = nx \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + c, c \in \Re$$

Problema A.2. Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2 - 9}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = – 2 y x = 2. *(10 puntos).*

Para calcular esta área debemos dibujar, de [forma] aproximada, la curva dada

La curva corresponde a la función estudiada en el apartado a). Por lo tanto conocemos:

su dominio, $\mathbf{Dom\ y = \Re - \{-3, 3\}}$

y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:

	-3	0	3	
f'(x)	+	+	-	-
f(x)	crece	crece	decrece	decrece

De lo anterior deducimos que en x = 0 la curva tiene un máximo relativo

$$x = 0,\ y = \frac{1}{0^2 - 9} = -\frac{1}{9} \rightarrow \max\left(0, -\frac{1}{9}\right)$$

Puntos de corte con el eje OX

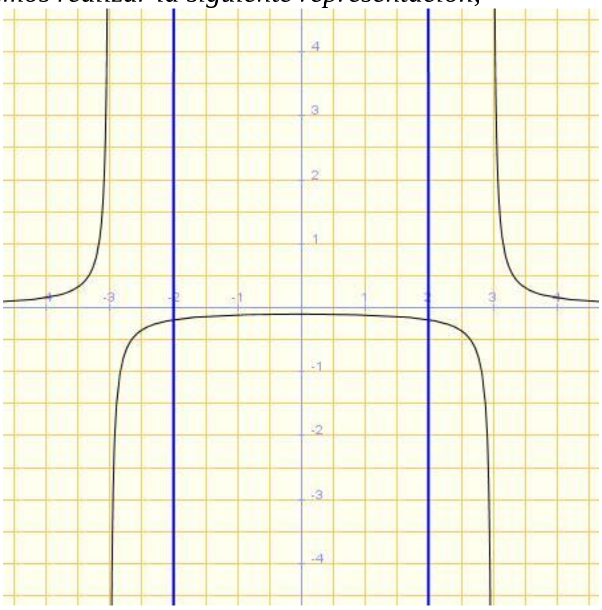
$$y = 0, 0 = \frac{1}{x^2 - 9} \rightarrow 0 = 1 \rightarrow \text{No corta al eje OX}$$

Posibles asíntotas verticales $x = -3$ *y* $x = 3$*; veámoslo,*

$$\lim_{x \to -3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{6 \cdot 0} = \frac{1}{0} = \infty$$ *luego* $x = -3$ *es una asíntota vertical*

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{0 \cdot 6} = \frac{1}{0} = \infty$$ *luego* $x = 3$ *es una asíntota vertical*

A partir de lo estudiado podemos realizar la siguiente representación,



$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2 - 9}\, dx \rightarrow -0.53648$$

El cálculo de esta área lo realizamos mediante la siguiente integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)}\,dx =$$

por el apartado b) sabemos que,

$$\int_{-2}^{2} \left[\frac{1/6}{(3-x)} + \frac{1/6}{(3+x)} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{6} Ln|3-x| + \frac{1}{6} Ln|3+x| \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{-1}{6} Ln|3-2| + \frac{1}{6} Ln|3+2| - \left[\frac{-1}{6} Ln|3+2| + \frac{1}{6} Ln|3-2| \right] = \frac{-1}{6} Ln\,1 + \frac{1}{6} Ln\,5 + \frac{1}{6} Ln\,5 - \frac{1}{6} Ln\,1 = (cc$$

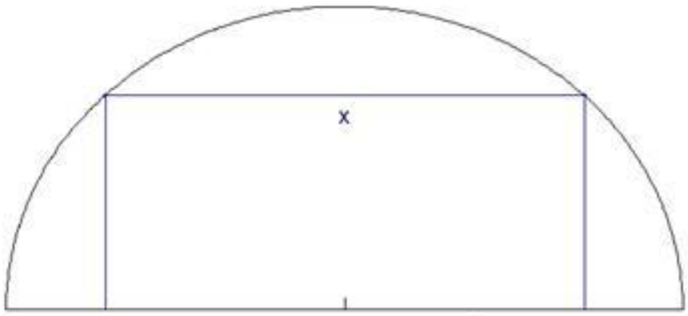
Finalmente, el área de la superficie pedida es $\frac{1}{3} Ln\,5\ u^2 \approx 0'5365\ u^2$

Problema A.3. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

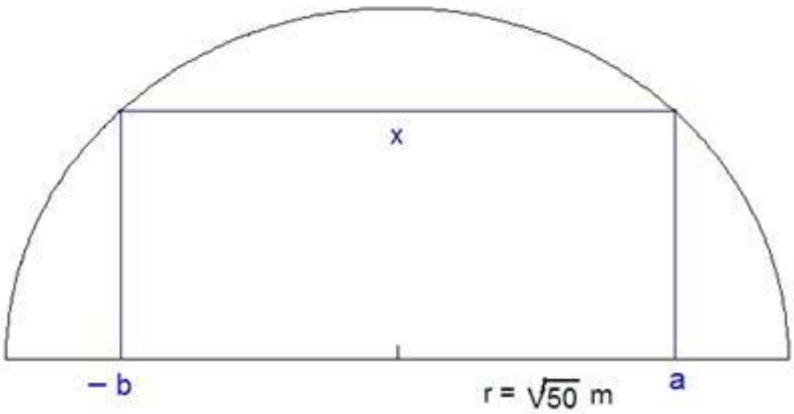
a) El área del rectángulo en función de x. *(5 puntos).*

b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. *(2 puntos).*

Solución:
a) Del enunciado del problema obtenemos que la representación gráfica de este es:



Situando este gráfico en unos ejes cuyo origen de coordenadas sea el centro desde el que se traza el semicírculo:



Vamos a comprobar que los vértices del rectángulo tiene por abcisa -x/2 y x/2.
Sean a y b dos números positivos y los vértices del rectángulo situados sobre el segmento rectilíneo que tengan de coordenadas (– b , 0) y (a , 0).
Calculemos las coordenadas de los vértices que están sobre la semicircunferencia.
La ecuación de una circunferencia es $\alpha^2+\beta^2=r^2$
En este caso particular,

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\sqrt{50}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\beta^2=50$$

Las ordenadas de los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia serán,

$$Para \quad \alpha=a \qquad a^2+\beta^2=50$$
$$\beta^2=50-a^2$$
$$\beta=\pm\sqrt{50-a^2}$$

Ahora bien, como el vértice que estamos calculando está sobre el eje X, β > 0, luego

$$\beta=\sqrt{50-a^2}$$

$$Para \quad \alpha=-b \qquad (-b)^2+\beta^2=50$$
$$b^2+\beta^2=50$$
$$\beta=\sqrt{50-b^2}$$

Pero los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia deben tener la misma ordenada, por lo que:

$$\sqrt{50-a^2}=\sqrt{50-b^2}$$

$$50-a^2=50-b^2$$

$$-a^2=-b^2$$

$$a^2=b^2 \quad \rightarrow \quad a=\pm b$$

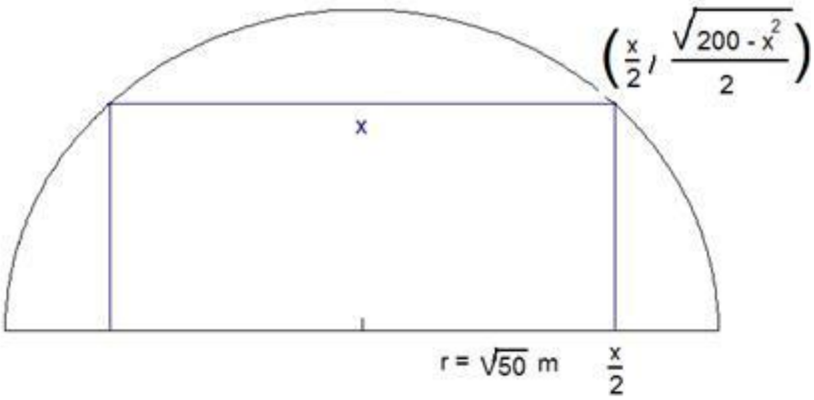
Por la elección que hemos hecho de a y b (ambos positivos), obtenemos que a = b.

Tendiendo en [cuenta]() que $a+b=x \quad \rightarrow \quad a+a=x \quad \rightarrow \quad 2a=x \quad \rightarrow \quad a=\dfrac{x}{2}$

Por lo que la ordenada de los vértices que están sobre la semicircunferencia será:

$$\beta=\sqrt{50-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{50-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{200-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{200-x^2}}{2}$$

La situación final del gráficos es,



El área del rectángulo será

$$A(x)=x\frac{\sqrt{200-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

Veamos los valores que puede tomar x. Por definición x es una distancia entre dos puntos, luego x ≥ 0. Además, puesto que el rectángulo está construido dentro de una semicircunferencia, se cumplirá que

$$\frac{x}{2}\le\sqrt{50} \quad \rightarrow \quad x\le 2\sqrt{50} \qquad \textit{Luego} \quad 0\le x\le 2\sqrt{50} \quad (\approx \quad 0\le x\le 14'14)$$

El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. *(5 puntos).*

b) ¿x / área es máxima?

$$A(x)=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{200-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$$

$$A'(x)=0$$

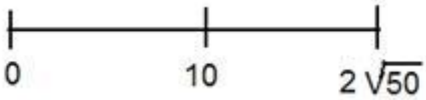
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)=0$$

$$\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0$$

$$200-x^2-x^2=0$$

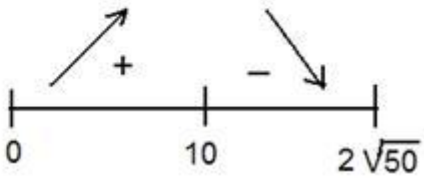
$$200-2x^2=0 \quad\rightarrow\quad 200=2x^2 \quad\rightarrow\quad x^2=\frac{200}{2} \quad\rightarrow\quad x^2=100 \quad\rightarrow\quad x=\pm 10$$

Como los valores de x deben ser mayores o iguales que cero, sólo sirve la solución x = 10.
Veamos ahora si para este valor de x A(x) tiene un máximo, para ello estudiamos el signo de A´ en los siguientes intervalos,



x	$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$
2	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-2^2}-\frac{2^2}{\sqrt{200-2^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{196}-\frac{4}{\sqrt{196}}\right)=\frac{1}{2}\left(14-\frac{4}{14}\right)=6'85\_\_>0$
12	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-12^2}-\frac{12^2}{\sqrt{200-12^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{56}-\frac{144}{\sqrt{56}}\right)=-5'87\_\_<0$

Marcando estos resultados en el intervalo anterior,



Luego en x = 10 hay un máximo relativo que es el absoluto de la función A(x) ya que, en su dominio de definición, a la izquierda de 10 A(x) es creciente y a la derecha decreciente.

Finalmente, el área del rectángulo es máxima para x = 10 m.

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema B.1. Obtener **razonadamente**:

a) $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx =$ *(3 puntos)*

El denominador tiene dos raíces simples, $x=1$ y $x=2$, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, $x = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, *calculemos los valores de A y B:*

para $x=1 \;\longrightarrow\; 1 = -A + 0 \;\longrightarrow\; A = -1$

para $x=2 \;\longrightarrow\; 2 = 0 + B\,.\,1 \;\longrightarrow\; B = 2$

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)dx = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= -Ln\,|x-1| + 2\,Ln\,|x-2| + C$$

b) $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)\cdot(x^2+9)}\,dx =$ *(4 puntos)*

c) $\int \left(x^2+2x\right)\cdot \ln x dx =$ *(3 puntos)*

Integral por partes

$$u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=x^2+2x \rightarrow v=\int x^2+2xdx=\frac{x^3}{3}+x^2$$

$$\int \left(x^2+2x\right)\cdot \ln xdx = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)-\int\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\frac{1}{x}dx = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)-\int\frac{x^3}{3x}+\frac{x^2}{x}dx =$$

$$= \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)-\frac{1}{3}\int x^2dx+\int xdx = nx\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+c, c\in\Re$$

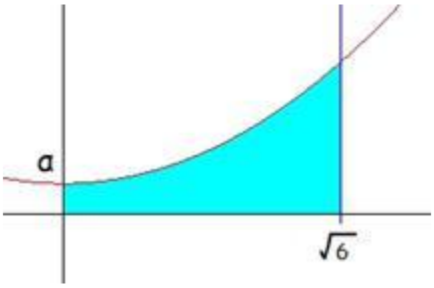
Problema B.2. Para cada número real positivo α, se considera la función *g(x)* = x^2 + *α*. Se pide calcular razonadamente:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva *y* = *g(x)*. (*5 puntos).*

Solución:

a) g(x) = x^2 *+ α, α > 0. Gráficamente es una parábola de vértice (0 , α)*

La región del plano limitada por eje X, eje Y, $x = \sqrt{6}$ *e y = g(x) será:*



Calculamos el área de esta región mediante la siguiente integral,

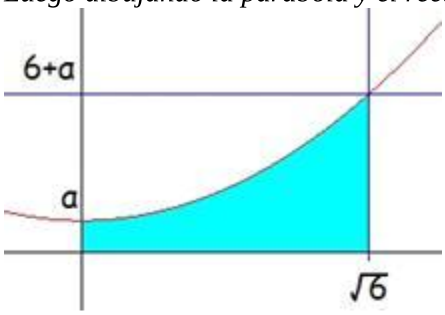
$$\int_0^{\sqrt{6}} \left(x^2+\alpha\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\alpha\, x\right]_0^{\sqrt{6}} = \left[\frac{\left(\sqrt{6}\right)^3}{3}+\alpha\sqrt{6}\right]-[0] = \frac{6\sqrt{6}}{3}+\alpha\sqrt{6} = 2\sqrt{6}+\alpha\sqrt{6} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

como el valor del área obtenido depende de α, el área pedida podemos escribirla como: $A(\alpha) = (2+\alpha)\sqrt{6}$

b) El valor de α para el que la curva y = x^2 + *α* divide al rectángulo de vértices (0,0), ($\sqrt{6}$,0), ($\sqrt{6}$, 6 + α), (0, 6 + α) en dos regiones de igual área. *(5 puntos)*

c) $x = \sqrt{6} \;\rightarrow\; g\left(\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \alpha = 6+\alpha$

d) *Luego dibujando la parábola y el rectángulo tendríamos,*



e)

El área del rectángulo es $R(\alpha) = (6+\alpha)\sqrt{6}$

f)

El área de la zona pintada, según lo calculado en el apartado anterior, $A(\alpha) = (2+\alpha)\sqrt{6}$

g)

$$\textit{Debe ser} \quad \frac{R(\alpha)}{2} = A(\alpha)$$

$$\frac{(6+\alpha)\sqrt{6}}{2} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

El valor buscado de α es 2.

$$6+\alpha = 4+2\alpha$$

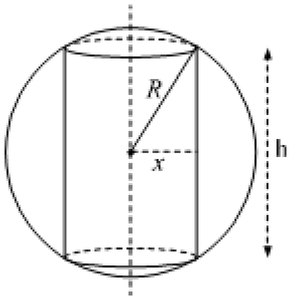
$$6-4 = 2\alpha-\alpha$$

$$2 = \alpha$$

h)

Problema B.3. Halla el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio *R* para que el área lateral del cilindro sea máxima. *(10 puntos)*

Solución:



Llamamos *x* al radio de la base del cilindro y h a su altura.
Expresamos h, en función de *x* y *R*:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad \frac{h^2}{4} + x^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = 4\left(R^2 - x^2\right) \quad \rightarrow \quad h = 2\sqrt{R^2 - x^2} \quad 0 < x < R$$

$$\text{Área lateral} = \text{perímetro de la base} \cdot \text{altura} = A\left(x\right) = 2\pi x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}$$

Buscamos *x* para que el área sea máxima:

$$A'(x) = 4\pi\sqrt{R^2 - x^2} + 4\pi x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = 4\pi\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{4\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{4\pi\left(R^2 - x^2\right) - 4\pi x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{4\pi\left(R^2 - 2x^2\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad R^2 - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{R^2}{2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$A' > 0$ a la izquierda de $x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ y $A' < 0$ a la derecha de dicho valor; por tanto, en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ hay un máximo. En este caso, la altura del cilindro es:

$$h = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}R = \sqrt{2}R$$