PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Para cada número real λ, $M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda)=\begin{pmatrix}4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\end{pmatrix}$ Se pide:

a) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$. *(4 puntos)*.

$$|M(\lambda)|=\begin{vmatrix}4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\end{vmatrix}=-4+2\lambda^2+6\lambda-\lambda^2-8\lambda+6=\lambda^2-2\lambda+2$$

Veamos para que valores de λ $|M(\lambda)|=0$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0 \rightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$ *no tiene soluciones reales*

Es decir que para cualquier valor de $\lambda\in\Re$ $|M(\lambda)|\neq 0$ *por lo que* $\forall\lambda\in\Re \ \exists\ M(\lambda)^{-1}$

b) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$ (*3 puntos*)

$$M(0)=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |M(0)|=0^2-2\,.\,0+2=2$$

Entonces M(0) tiene inversa. Por Gauss o por determinant se calcula la inversa.

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3\\ 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

c) Si A=M(8), B=M(4) y C=M(3), calcúlese, razonadamente el determinante de la matriz producto A B^{-1} C^{-1} . (*3 puntos*)

Aplicando que $|A\,.\,B| = |A|\,|B|$ *y que* $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$$|A\,.\,B^{-1}\,.\,C^{-1}| = |A|\,|B^{-1}|\,|C^{-1}| = |A|\,\frac{1}{|B|}\,\frac{1}{|C|} = |M(8)|\,\frac{1}{|M(4)|}\,\frac{1}{|M(3)|} =$$

$$(8^2 - 2\,.\,8 + 2)\,\frac{1}{4^2 - 2\,.\,4 + 2}\,\frac{1}{3^2 - 2\,.\,3 + 2} = 50\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{5} = 1$$

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = M(8) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = M(4) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = M(3) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}| \rightarrow 1$$

Problema A.2. Consideramos los planos

$$\pi_1: \quad x + y - 6 = 0$$
$$\pi_2: \quad 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. **Se pide:**

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$ *(5 puntos)*

Para $\lambda = 4$ el plano π_2 será: 2 x + 4 y + 4 z + 2 = 0; simplificando por 2 queda x + 2 y + 2 z + 1 = 0

La ecuación de la recta r intersección de estos dos planos será, en forma implícita,

$$r: \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Para obtener la ecuaciones paramétricas, $y = \lambda$, despejamos x en función de λ

$x = 6 - \lambda$ y ahora calculamos el valor de z en función de λ

$$6 - \lambda + 2\lambda + 2z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{-7-\lambda}{2}$$

Las ecuaciones paramétricas de r serán,

$$r: \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \Re \\ z = \dfrac{-7}{2} - \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

b) Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45º. *(5 puntos)*

$\vec{n}_1(1,1,0) \quad y \quad \vec{n}_2(2,4,\lambda)$

$$\cos\left(\widehat{\overline{n_1},\overline{n_2}}\right) = \frac{\overline{n_1}\ \overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{(1,1,0)\ (2,4,\lambda)}{\sqrt{1+1}\ \sqrt{4+16+\lambda^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+4}{\sqrt{2}\ \sqrt{20+\lambda^2}}$$

$$\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$2\ \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$\sqrt{20+\lambda^2} = 6$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$20 + \lambda^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{16} \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 4$$

Comprobamos las soluciones obtenidas en la ecuación irracional

$$Para \quad \lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{20+4^2} = 6; \quad \sqrt{20+16} = 6; \quad \sqrt{36} = 6 \quad Sí$$

$$Para \quad \lambda = -4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{20+(-4)^2} = 6; \quad \sqrt{20+16} = 6; \quad \sqrt{36} = 6 \quad Sí$$

Ambos planos se cortarán formando un ángulo de 45º cuando $\lambda = -4 \quad o \quad \lambda = 4$.

Problema A.3. Sea f la función definida por

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(5 puntos)*

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo que $\quad Dom\ f(x) = \Re - \{1, 2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ *y* $x = 2$.

$x = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1^2 - 3\,.\,1 + 2} = \frac{1}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es a. v.}$$

$x = 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{2^2 - 3\,.\,2 + 2} = \frac{2}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ es a. v.}$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Luego $y = 0$ *es la asíntota horizontal.*

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,

La asíntota oblicua será la recta de ecuación $y = m\,x + n$; *calculando los coeficientes* m *y* n

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como $m = 0$, *no hay asíntota oblicua.*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. *(5 puntos)*

$$y' = \frac{1\left(x^2-3x+2\right)-x(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

$-x^2+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=2 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\left(x^2-3x+2\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad$ (*resuelta en el apartado a)*) $\; x=1,\, 2$

Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,

	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	
f(x)	↘	↗	↗	↘	↘
f'(x)	f'(-3)<0	f'(-1,5)>0	f'(1,2)>0	f'(1,8)<0	f'(3)<0

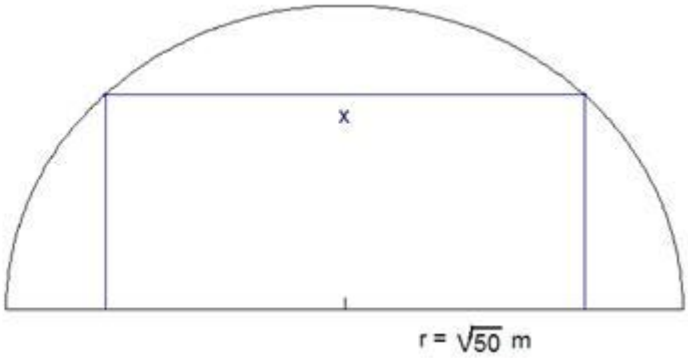
Intervalo Decrecimiento = $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

Intervalo Crecimiento= $\left(-\sqrt{2},1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$

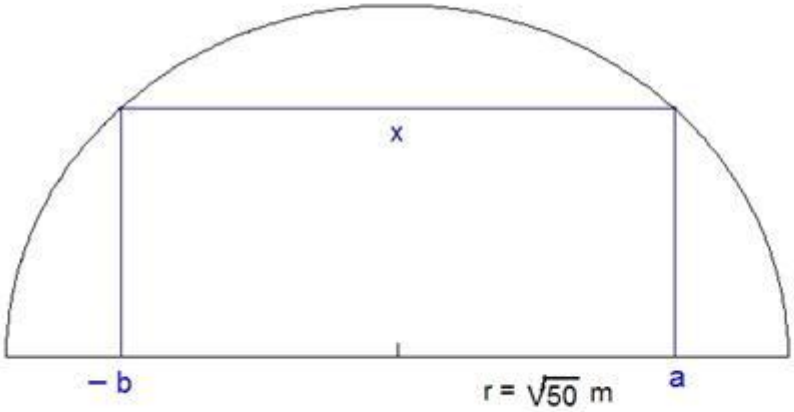
Problema A.4. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) **El área del rectángulo en función de x.** ***(5 puntos)*.**

Del enunciado del problema obtenemos que la representación gráfica de este es:



Situando este gráfico en unos ejes cuyo origen de coordenadas sea el centro desde el que se traza el semicírculo:



Vamos a comprobar que los vértices del rectángulo tiene por abcisa -x/2 y x/2.

Sean a y b dos números positivos y los vértices del rectángulo situados sobre el segmento rectilíneo que tengan de coordenadas (– b , 0) y (a , 0).

Calculemos las coordenadas de los vértices que están sobre la semicircunferencia.
La ecuación de una circunferencia es $\alpha^2+\beta^2=r^2$
En este caso particular,

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\sqrt{50}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2+\beta^2=50$$

Las ordenadas de los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia serán,

$$Para \quad \alpha=a \qquad a^2+\beta^2=50$$
$$\beta^2=50-a^2$$
$$\beta=\pm\sqrt{50-a^2}$$

Ahora bien, como el vértice que estamos calculando está sobre el eje X, β > 0, luego

$$\beta=\sqrt{50-a^2}$$

$$\textit{Para} \quad a = -b \qquad (-b)^2 + \beta^2 = 50$$
$$b^2 + \beta^2 = 50$$
$$\beta = \sqrt{50 - b^2}$$

Pero los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia deben tener la misma ordenada, por lo que:

$$\sqrt{50 - a^2} = \sqrt{50 - b^2}$$
$$50 - a^2 = 50 - b^2$$
$$-a^2 = -b^2$$
$$a^2 = b^2 \quad \rightarrow \quad a = \pm b$$

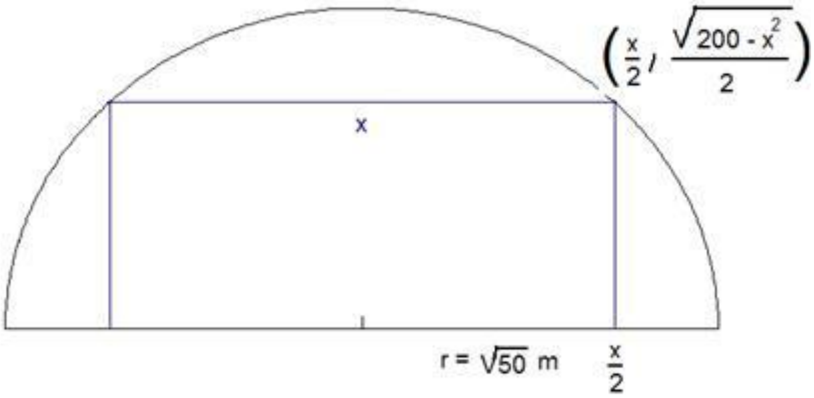
Por la elección que hemos hecho de a y b (ambos positivos), obtenemos que a = b.

Tendiendo en cuenta que $a + b = x \quad \rightarrow \quad a + a = x \quad \rightarrow \quad 2a = x \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{x}{2}$

Por lo que la ordenada de los vértices que están sobre la semicircunferencia será:

$$\beta = \sqrt{50 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{50 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{200 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{200 - x^2}}{2}$$

La situación final del gráficos es,



El área del rectángulo será

$$A(x) = x\frac{\sqrt{200 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{200 - x^2}}{2}$$

Veamos los valores que puede tomar x. Por definición x es una distancia entre dos puntos, luego x ≥ 0. Además, puesto que el rectángulo está construido dentro de una semicircunferencia, se cumplirá que

$$\frac{x}{2} \leq \sqrt{50} \quad \rightarrow \quad x \leq 2\sqrt{50}. \qquad \textit{Luego} \quad 0 \leq x \leq 2\sqrt{50} \quad (\approx \quad 0 \leq x \leq 14'14)$$

b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. ***(5 puntos)*****.**

$$A(x)=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{200-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$$

$$A'(x)=0$$

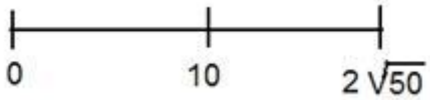
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)=0$$

$$\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0$$

$$200-x^2-x^2=0$$

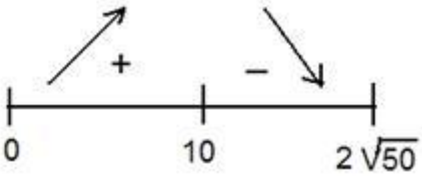
$$200-2x^2=0 \;\rightarrow\; 200=2x^2 \;\rightarrow\; x^2=\frac{200}{2} \;\rightarrow\; x^2=100 \;\rightarrow\; x=\pm 10$$

Como los valores de x deben ser mayores o iguales que cero, sólo sirve la solución x = 10.
Veamos ahora si para este valor de x A(x) tiene un máximo, para ello estudiamos el signo de A´ en los siguientes intervalos,



x	$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$
2	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-2^2}-\frac{2^2}{\sqrt{200-2^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{196}-\frac{4}{\sqrt{196}}\right)=\frac{1}{2}\left(14-\frac{4}{14}\right)=6'85\_>0$
12	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-12^2}-\frac{12^2}{\sqrt{200-12^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{56}-\frac{144}{\sqrt{56}}\right)=-5'87\_<0$

Marcando estos resultados en el intervalo anterior,



Luego en x = 10 hay un máximo relativo que es el absoluto de la función A(x) ya que, en su dominio de definición, a la izquierda de 10 A(x) es creciente y a la derecha decreciente.

Finalmente, el área del rectángulo es máxima para x = 10 m.

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA:	CONVOCATORIA:
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema B.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro λ, se pide:

a) **Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. *(5 puntos)***

La matriz ampliada del sistema es

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right)$$

El máximo rango posible de A y A' es 3, estudiamos el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 3\lambda^2+15+10-9-25-2\lambda^2=\lambda^2-9$$

$$\lambda^2-9=0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2=9 \quad \rightarrow \quad \lambda=\pm\sqrt{9} \quad \rightarrow \quad \lambda=\pm 3$$

Para $\lambda \neq -3$ *y* $\lambda \neq 3$, *ran(A) = 3 = ran(A') = nº de incógnitas, Sistema Compatible Determinado.*

Para $\lambda=-3$

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que det(A) = 0, calculemos el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A)=2$$

Veamos el rango de A', al menor anterior le orlamos la 4ª columna y la 3ª fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3-30+6+27-10-2=-6\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A')=3$$

Como ran(A)=2≠ 3=ran(A'), Sistema Incompatible

Para $\lambda = 3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

Al igual que calculamos en el caso anterior ran(A) = 2

Veamos el de A'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 30 + 6 - 27 - 10 - 2 = 39 - 39 = 0$$

como no hay más menores de orden 3 de A', ran(A') = 2

Como ran(A) = 2 = ran(A') < nº incógnitas, Sistema Compatible Indeterminado

En resumen,

Para $\lambda \neq -3$ *y* $\lambda \neq 3$*, Sistema Compatible Determinado.*

Para $\lambda = -3$*, Sistema Incompatible*

Para $\lambda = 3$*, Sistema Compatible Indeterminado*

b) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. *(5 puntos)*

El sistema es compatible indeterminado para $\lambda = 3$*, el menor que da el rango 2 es el formado por 1ª y 2ª fila y 1ª y 2ª columna, luego las incógnitas principales serán x e y; para resolver el sistema usaremos la 1ª y 2ª ecuación. Es decir:*

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 2 - 5z \end{cases}$$

En el apartado anterior ya calculamos el determinante del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Resolviendo el sistema por la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 1 \\ 2 - 5z & 3 \end{vmatrix}}{1} = 9 - 3z - 2 + 5z = 7 + 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 2 & 2 - 5z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 5z - 6 + 2z = -4 - 3z$$

Para $\lambda = 3$ *el conjunto, S, de soluciones del sistema es:* $\begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -4 - 3\mu \quad \mu \in \Re \\ z = \mu \end{cases}$

Problema B.2. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y - 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente.

Se pide calcular razonadamente:

a) El área del triángulo ABC. ***(4 puntos).***

Calculemos los puntos A, B y C.
A – punto de corte entre el plano y el eje OX

La ecuación del eje OX la podemos dar como intersección de dos planos: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

El sistema a resolver para encontrar el punto A es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de y, z en la primera ecuación obtenemos $x - 4 = 0$, luego $x = 4$. El punto A tiene de coordenadas (4 , 0 , 0)
Similarmente obtenemos los restantes puntos.
B – punto de corte entre el plano y el eje OY
El sistema a resolver para encontrar el punto B es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, z en la primera ecuación obtenemos $4y - 4 = 0$, luego $y = 1$. El punto B tiene de coordenadas (0 , 1 , 0)
C – punto de corte entre el plano y el eje OZ
El sistema a resolver para encontrar el punto C es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y en la primera ecuación obtenemos $-2z - 4 = 0$, luego $z = -2$. El punto C tiene de coordenadas (0 , 0 , – 2)

Para calcular esta área utilizamos la siguiente fórmula $S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$

$$\vec{AB} = (0,1,0) - (4,0,0) = (-4,1,0)$$

$$\vec{AC} = (0,0,-2) - (4,0,0) = (-4,0,-2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} = (-2,-8,4)$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \left|(-2,-8,4)\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 64 + 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

Finalmente $S = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} = \sqrt{21}\ u^2$

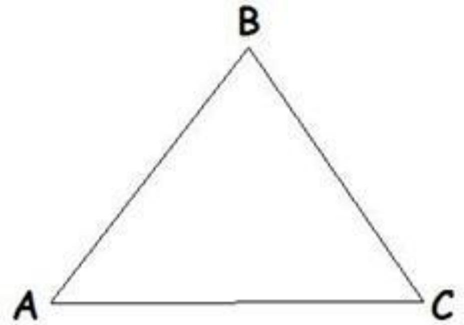
b) El perímetro del triángulo ABC. *(3 puntos).*

$P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) =$

$$= \sqrt{(0-4)^2+(1-0)^2+(0-0)^2} + \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2+(-2-0)^2} + \sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0+2)^2} = \sqrt{16+1} + \sqrt{}$$

$$= \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \approx 10'83\,u$$

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC



Obtengamos los vectores que determinan los tres lados. Anteriormente ya obtuvimos dos de ellos,

$$\vec{AB} = (-4,1,0)$$

$$\vec{AC} = (-4,0,-2)$$

Calculemos el tercero

$$\vec{BC} = (0,0,-2) - (0,1,0) = (0,-1,-2)$$

Procedamos al cálculo de los tres ángulos, para ello utilizamos la fórmula del coseno del ángulo determinado por dos vectores.

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. *(3 puntos).*

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{(-4,1,0)\cdot(-4,0,-2)}{\sqrt{(-4)^2+1^2+0^2}\ \sqrt{(-4)^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{17}\ \sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{17}\ 2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}}$$

$$\hat{A} = arc\cos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right) = 29'805^{\circ}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{(4,-1,0)\cdot(0,-1,-2)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+0^2}\ \sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}\ \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$$

$$\hat{B} = arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) = 83'773^{\circ}$$

$y\ finalmente\quad \hat{C} = 180^{\circ} - 29'805^{\circ} - 83'773^{\circ} = 66'422^{\circ}$

Problema B.3.

a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$. ***(5 puntos)***

Dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Dom f(x)

Como f(x) es una función racional busquemos las raíces del denominador,

$$(3-x)(3+x) = 0 \begin{cases} 3-x=0 & \rightarrow \quad x=3 \\ 3+x=0 & \rightarrow \quad x=-3 \end{cases}$$

$$\textit{Luego} \quad \textit{Dom } f(x) = \Re - \{-3\,,3\}$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Debemos estudiar el signo de f´(x).

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{9-x^2}$$

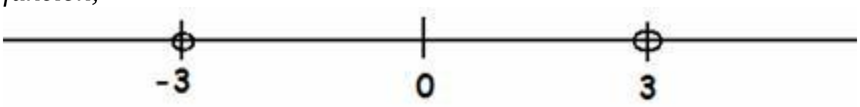
$$f'(x) = \frac{-(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{2x}{(9-x^2)^2}$$

Buscamos las raíces del numerador y denominador,

$2x = 0;\ \ x = 0$

$(9 - x^2)^2 = 0;\ \ 9 - x^2 = 0;\ \ x^2 = 9;\ \ \ x = \pm 3$

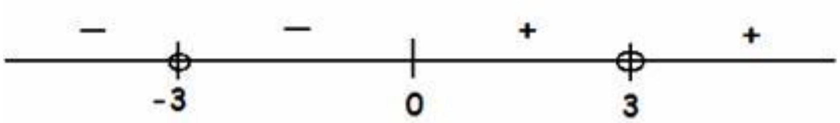
Marcamos en la recta real las raíces obtenidas anteriormente y tenemos en cuenta en dominio de la función,



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado será positivo, por lo que el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es $2x$

$2x > 0;\ \ \ x > 0$

Y el signo de f´(x) será



f(x) es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ *y es creciente en* $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$**. *(5 puntos).***

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x)+B(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

Luego debe ser 1 = A (3 + x) + B (3 – x), buscamos los valores de A y B dándole valores a x
para x = 3 1 = A (3 + 3) + B (3 – 3)
1 = 6 A

$A = \frac{1}{6}$

para x = – 3 1 = A (3 – 3) + B (3 – (– 3))
1 = 6 B

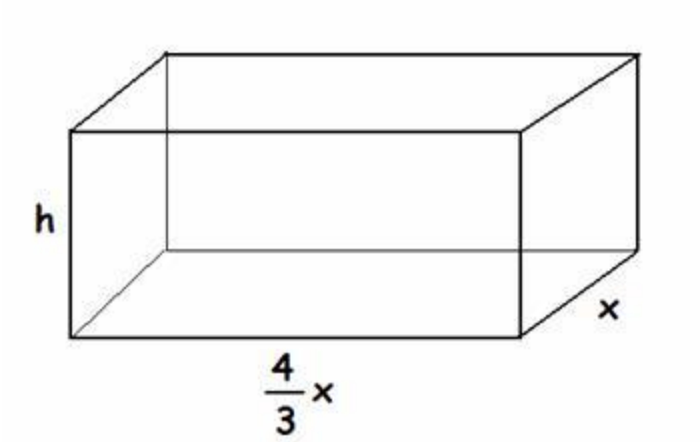
$B = \frac{1}{6}$

Problema B.4. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 3/4 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determinar razonadamente:

a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. *(5 puntos)*.

Calcular el valor x de la anchura que minimiza el coste..

La bodega a construir es, según el enunciado,



Sabemos que
El precio del suelo es de 225 €/m^2
El precio del techo es de 300 €/m^2
El precio de la pared lateral es de 256 €/m^2

El coste de la bodega, C, será

$$C = 225\frac{4}{3}x\,x + 300\frac{4}{3}x\,x + 2\,.\,256\,x\,h + 2\,.\,256\frac{4}{3}x\,h = 300x^2 + 400x^2 + 512\,x\,h + \frac{2048}{3}x\,h = 700x^2 + \frac{3584}{3}x\,h$$

Para poder encontrar el mínimo de C debemos tener una sola variable. Busquemos la relación entre x y h. Esta relación nos la da el volumen de la bodega, 100m^3.

$$V = x\frac{4}{3}x\,h = 100 \;\rightarrow\; x^2h = \frac{300}{4} \;\rightarrow\; x^2h = 75 \;\rightarrow\; h = \frac{75}{x^2}$$

$$\textit{Luego}\quad C = 700x^2 + \frac{3584}{3}x\frac{75}{x^2} = 700x^2 + \frac{89600}{x}$$

Por ser x y h longitudes, y teniendo en cuenta la relación entre ellas $x^2 h = 75$, los valores que puede tomar la variable x son todos los reales positivos, es decir que Dom C = (0 , +∞).

Busquemos el mínimo de C,

$$C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$$

$$1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; 1400x^3 - 89600 = 0 \;\rightarrow\; 1400x^3 = 89600 \;\rightarrow\; x^3 = \frac{89600}{1400} \;\rightarrow\; x^3 = 64 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Estudiemos el signo de C´ a la izquierda y derecha de 4 para determinar si es un mínimo,

x	C'
1	$1400\,.\,1 - \frac{89600}{1^2} = -88200 < 0$
5	$1400\,.\,5 - \frac{89600}{5^2} = 3416 > 0$

Luego en x = 4 hay un mínimo relativo y, además, como en (0 , 4) la función C es decreciente y en (4 , +∞) es creciente el mínimo es absoluto.

El valor de x que minimiza el coste es 4, es decir, hay que construir una bodega cuya base tenga una anchura de 4 m.

b) Dicho coste mínimo. *(5 puntos)*.

$$C(4) = 700 \cdot 4^2 + \frac{89600}{4} = 33600$$

El coste mínimo de la bodega es de 33600€