TEMA 12: INTEGRALES INDEFINIDAS

1. INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN

$F(x)$ es primitiva de $f(x)$ cuando $F'(x) = f(x)$ → La primitiva de una función no es única

Es lo mismo que decir:

Si $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$, entonces la **primitiva** de $3x^2$ es x^3

La integral de una función $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas y se representa como: $\boxed{\int f(x)\, dx}$.

Por tanto, si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$:

$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + k}$ a k se le llama constante de integración

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES:

Suma y resta	$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
Producto por un número	$\int [c \cdot f(x)]dx = c \cdot \int f(x)dx$

TABLA DE INTEGRALES SIMPLES:

$$\int 1dx = x + c, c \in \Re$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \Re, si\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, c \in \Re$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \Re$$

$$\int e^x dx = e^x + c, c \in \Re$$

$$\int senx\, dx = -\cos x + c, c \in \Re$$

$$\int \cos x\, dx = senx + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \int (1 + tg^2 x)\, dx = tgx + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = \int \cos ec^2 x\, dx = \int (1 + \cot g^2 x)\, dx = -\cot gx + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c, c \in \Re$$

TABLA DE INTEGRALES COMPUESTAS

$$\int f'(x) f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c, c \in \Re, si\ n \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c, c \in \Re$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c, c \in \Re$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c, c \in \Re$$

$$\int senf(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c, c \in \Re$$

$$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = senf(x) \cdot f'(x) + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \int \sec^2 f(x) \cdot f'(x) dx = tgf(x) + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = \int \cos ec^2 f(x) \cdot f'(x) dx = -\cot gf(x) + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} dx = arcsenf(x) + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + c, c \in \Re$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} dx = arctgf(x) + c, c \in \Re$$

2. <u>INTEGRACIÓN POR PARTES</u>

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

↓

Forma abreviada

↓

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

** $\boxed{\begin{array}{l} v'(x)dx = dv \\ u'(x)dx = du \end{array}}$

<u>ALGUNOS TIPOS DE INTEGRALES QUE SE RESUELVEN POR PARTES:</u>

$\int x^n e^x dx$	$u = x^n$	$dv = e^x dx$
$\int x^n \sin x\, dx$	$u = x^n$	$dv = \sin x\, dx$
$\int x^n \cos x\, dx$	$u = x^n$	$dv = \cos x\, dx$
$\int x^n \ln x\, dx$	$u = \ln x$	$dv = x^n dx$
$\int arc\ tgx\ dx$	$u = arc\ tg\ x$	$dv = dx$
$\int arc\ sen\ x\ dx$	$u = arc\ sen\ x$	$dv = dx$
$\int \ln x\ dx$	$u = \ln x$	$dv = dx$

Ejemplos:

a) $I = \int \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ dx$

$$u = x \quad \to du = 1dx$$
$$dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x$$

Recuerda $\boxed{I = \int udv = u \cdot v - \int vdu}$

$$I = \int \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\ dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c, c \in \Re$$

b) $I = \int \ln x dx$

$$u = \ln x \quad \to du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = dx \to v = \int dx = x$$

$$I = \int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + c \in \Re$$

c) $I = \int e^x \cdot senx\, dx$

$$u = e^x \quad \to du = e^x dx$$
$$dv = senxdx \to v = \int senxdx = -\cos x$$

$$I = \int e^x \cdot senx\, dx = -e^x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot senx - \int senx \cdot e^x dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot senx - I$$

$$I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot senx - I \to 2I = e^x \cdot senx - e^x \cdot \cos x \to I = \frac{e^x \cdot senx - e^x \cdot \cos x}{2} + c, c \in \Re$$

$$I_1 = \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \cdot senx - \int senx \cdot e^x dx$$

$$u = e^x \quad \to du = e^x dx$$
$$dv = \cos xdx \to v = \int \cos xdx = senx$$

3. INTEGRACIÓN POS SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLES

- Sustituimos una expresión adecuada de x por t
- Resolvemos la integral de variable t
- Reemplazamos t por su expresión en x

$\int h(x)dx = \int f\left[g(x)\right]g'(x)dt$
$\int f(t)dt = F(t) = F\left[g(x)\right]$

$$\xrightarrow{Cambio} \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{array}$$

ALGUNOS CAMBIOS DE VARIABLE FRECUENTES:

- Para calcular una integral del tipo $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\, dx$

- Si n es impar, aplicamos el cambio de variable $t = \cos x$
- Si n es par y m es impar, aplicamos el cambio de variable $t = \sin x$
- Si n y m son pares, aplicamos las fórmulas trigonométricas:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- Para calcular una integral del tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, aplicamos el cambio de variable $\frac{x}{a} = \sin t$

4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

A) <u>Grado del numerador ≥ grado del denominador</u>

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx}$$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

B) <u>Grado del numerador < grado del denominador</u>

I. Primero miramos en el cuadro de integrales inmediatas

Forma potencial	$\int \frac{f'}{f^n}dx = \frac{f^{-n+1}}{-n+1}$
Forma logaritmo neperiano	$\int \frac{f'}{f}dx = \ln\left(f\right)$
Forma arco-tangente	$\int \frac{f'}{a^2 + f^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{f}{a}$

II. Descompondremos el denominador en factores

1º. $Q(x)$ sólo tiene raíces simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \ldots + \frac{N}{x-x_n} \text{ con } A, B, C, \ldots, N \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-x_1} + \int \frac{B}{x-x_2} + \int \frac{C}{x-x_3} + \ldots + \int \frac{N}{x-x_n}\, dx} \rightarrow \ln$$

2º. $Q(x)$ sólo tiene raíces reales, pero alguna simple

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{N}{(x-x_2)^m}$$ con m número de veces que se repite la raíz compuesta

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-x_1} + \int \frac{B}{x-x_2} + \int \frac{C}{(x-x_2)^2} + \ldots + \int \frac{N}{(x-x_2)^m}\, dx}$$

$$\rightarrow \ln + \ln + \textit{potencia}$$

3º. $Q(x)$ tiene raíces reales simples y complejas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-x_1} + \int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\, dx} \rightarrow \ln + (\ln + \textit{arctg})$$