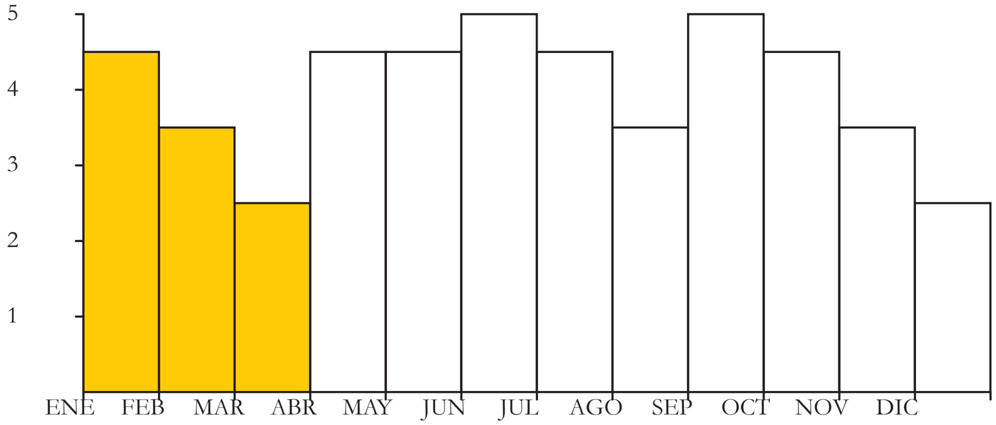
Tema 13: INTEGRALES DEFINIDAS

REFLEXIONA

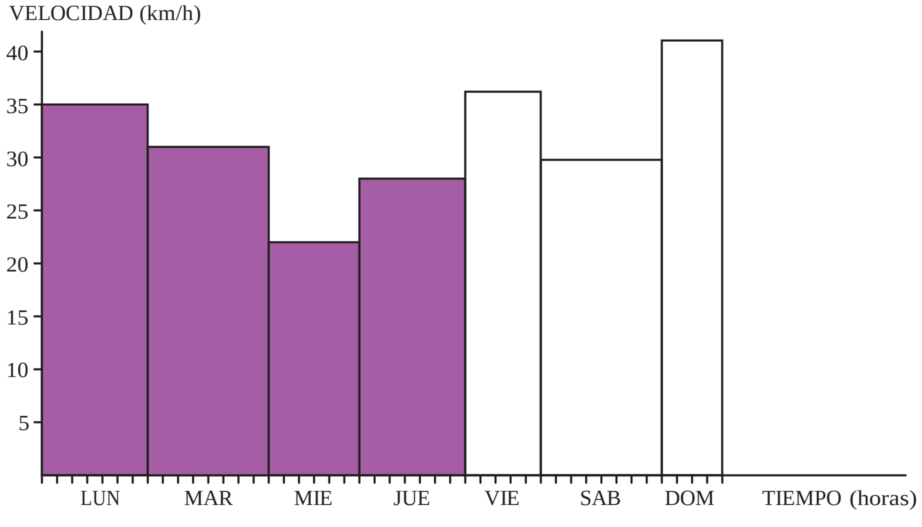
Las ganancias de la compañía ***RAMSES S.L.*** durante los 12 meses de un año, en decenas de miles de euros, se dan en la siguiente gráfica:



Si queremos saber las ganancias acumuladas al final del mes de marzo, es claro que solo tenemos que sumar las alturas de las tres primeras columnas o, lo que es lo mismo, calcular el área bajo la curva de ganancias en los tres prime- ros meses:

$$4{,}5 + 3{,}5 + 2{,}5 = 10{,}5 \text{ decenas de miles de euros} = 105\,000 \text{ euros}$$

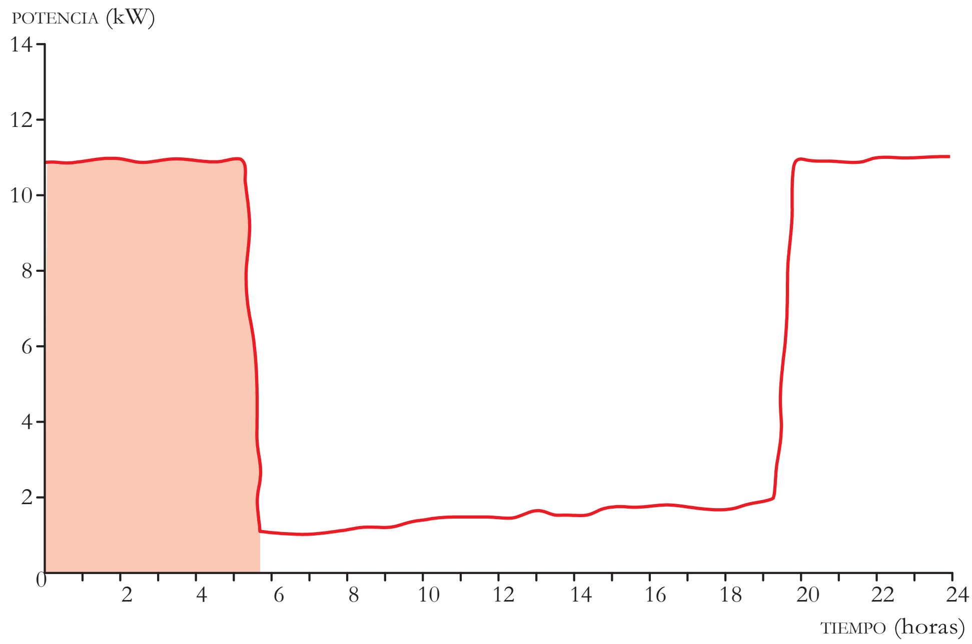
La siguiente gráfica representa la velocidad media de un ciclista, en km/h, en cada uno de los siete días de la **VUELTA CICLISTA A ESPAÑA**. Cada día se señalan solo las horas que está pedaleando.



¿Cuántos kilómetros ha recorrido hasta el jueves? El área rayada bajo la curva de velocidades nos proporciona esta información:

$$7 \cdot 35 + 8 \cdot 31 + 6 \cdot 22 + 7 \cdot 28 = 821 \text{ km}$$

La gráfica siguiente representa la potencia, en kW, que se está empleando en cada momento en un local, a lo largo de un día. (A juzgar por las horas de máximo consumo, bien podría ser una gran discoteca).



¿Cómo calcular el consumo de energía entre las 0 y las 5:30 de la mañana? La energía, en kWh, es el área bajo la cur- va de potencia, que viene a ser, aproximadamente:

$$(10{,}5 \text{ kW}) \cdot (5{,}5 \text{ horas}) = 57{,}75 \text{ kWh}$$

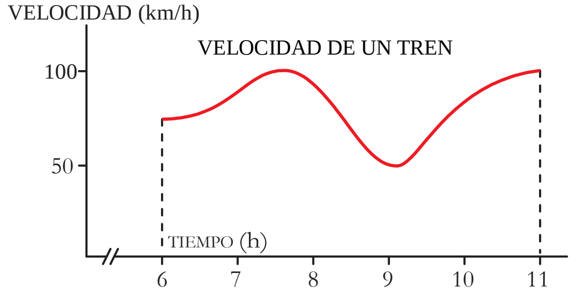
Hemos visto tres ejemplos en los que el área bajo la gráfica de una función tiene un significado especial:

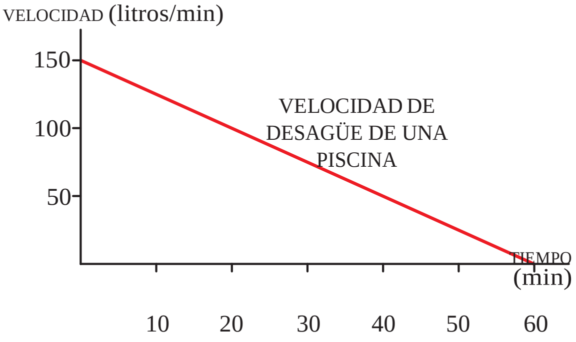
- El área bajo la curva de *ganancias* nos proporciona un dato interesante: el de las *ganancias acumuladas*.

- El área bajo la curva *velocidad* nos proporciona el *espacio total recorrido*.

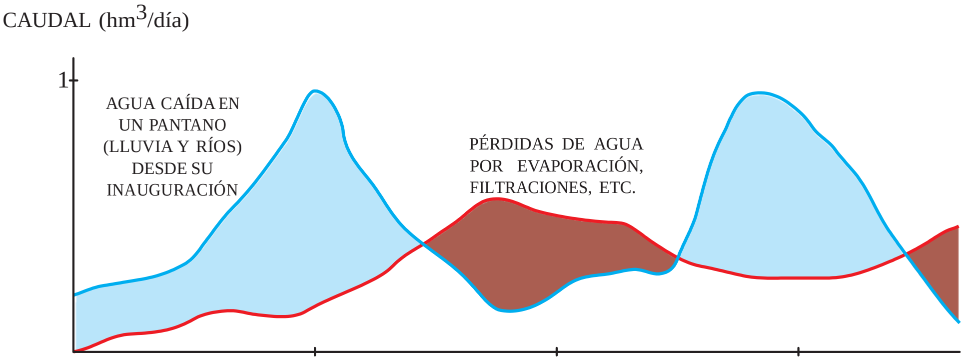
- El área bajo la curva *potencia funcionando en cada instante* nos proporciona la ***energía consumida.***

Interpreta lo que significa el área bajo la curva en cada uno de los siguientes casos:




VELOCIDAD (litros/min)
150
100
50
VELOCIDAD DE DESAGÜE DE UNA PISCINA
TIEMPO (min)
10
20
30
40
50
60

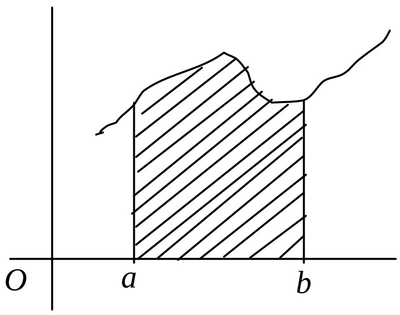

ACELERACIÓN (m/s2)
ACELERACIÓN DE UNA GOTA DE AGUA DESDE QUE SE FORMA HASTA QUE CAE AL SUELO
ESPACIO (m)


CAUDAL (hm3/día)
1
AGUA CAÍDA EN UN PANTANO (LLUVIA Y RÍOS) DESDE SU INAUGURACIÓN
PÉRDIDAS DE AGUA POR EVAPORACIÓN, FILTRACIONES, ETC.

1. INTEGRAL DEFINIDA.

Sea $f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo $[a,b]$.

Llamamos $\int_a^b f(x)dx$ y lo leemos como **integral definida** entre a y b de f(x), al valor del área comprendida entre la gráfica de f(x), el eje X y las rectas verticales x=a y x=b.



2. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

1	$\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$
2	Si $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\cdot dx > 0.$ Si $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\cdot dx < 0.$
3	Si $a < c < b$ y f es continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$
4	Si permutamos los límites de integración, la integral cambia de signo: $\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$
5	Dadas las funciones *f(x)* y *g(x)*continuas en el intervalo [*a*,*b*], se cumple que: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx \pm \int_a^b g(x)\cdot dx$
6	$\int_a^b K\cdot f(x)\cdot dx = K\cdot \int_a^b f(x)\cdot dx$
7	Si f y g son dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$, tales que $f(x) \le g(x)$ para todo punto *x* de $[a,b]$, entonces: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b g(x)\cdot dx}$

3. TEOREMAS Y REGLA DE BARROW

3.1. Teorema del valor medio para la integral.

Si ***f*** es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un número $c \in [a,b]$, tal que:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c)\cdot(b-a)$$

3.2. Teorema fundamental del cálculo integral

Si *f* es una función continua en $[a,b]$, la función $F(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt$ definida para cada $x\in[a,b]$, es derivable y se verifica que $F'(x)=f(x)$. **(*F* es una primitiva de *f*).**

3.3. Regla de Barrow

Si *f*(*x*) es continua en $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ y *G*(*x*) es una primitiva de *f*(*x*), entonces

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = G(b)-G(a)$$

Para aplicar la regla de Barrow al cálculo de la integral definida de una función *f(x)* continua en [*a*,*b*], $\int_a^b f(x)dx$, se siguen estos pasos:

- Determinamos una primitiva de *f(x)*: $F'(x)=f(x)$
- Calculamos los valores de esta función en *a* y *b*: $F(a)$ y $F(b)$
- Hallamos su diferencia para calcular la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

- $\int_1^3 (2x-3)\cdot dx = [x^2-3x]_1^3 = (3^2-3\cdot 3)-(1^2-3\cdot 1)=(9-9)-(1-3)=0-(-2)=2$
- $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot dx = [Lx]_1^e = Le - L1 = 1-0=1$
- $\int_2^3 \frac{1}{x.(Lx)^4}\cdot dx$

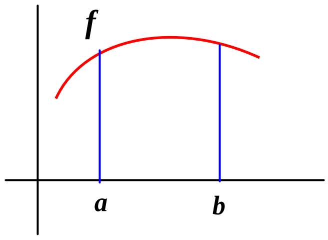
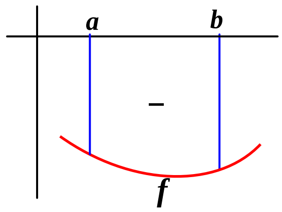
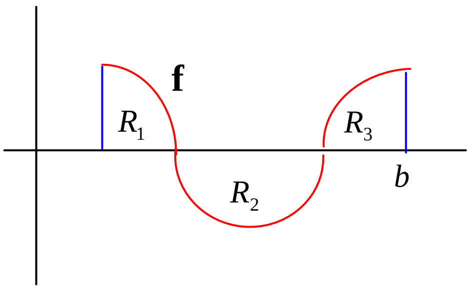
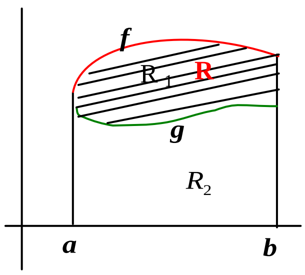
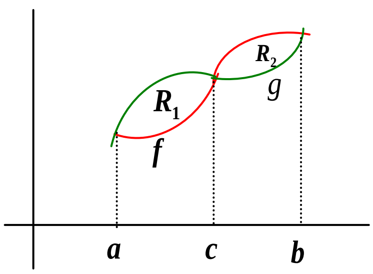
  Calculamos primeramente una primitiva:

  $\int \frac{1}{x.(Lx)^4}\cdot dx = \int \frac{1}{x}\cdot (Lx)^{-4}\cdot dx = \frac{(Lx)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3(Lx)^3}$

  Entonces:

$$\int_2^3 \frac{1}{x.(Lx)^4}\cdot dx = \left[-\frac{1}{3(Lx)^3}\right]_2^3 = -\frac{1}{3(L3)^3} - \left(-\frac{1}{3(L2)^3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{(L3)^3}+\frac{1}{(L2)^3}\right)$$

4. ÁREAS

	$A(R)=\int_a^b f(x).dx$
	$A(R(-)) = A(R(+)) = \int_a^b (-f)(x).dx = -\int_a^b f(x).dx$
	En este caso el área del recinto pedido será la suma de las áreas de cada uno de los recintos. No podemos calcular la integral definida entre a y b, sino que será necesario calcular las áreas de cada uno de los recintos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ y sumarlas después. Los puntos de corte con eje de ABCISAS se halla resolviendo la ecuación *f(x)=0*
	$Área(R) = Área(R_1) - Área(R_2) =$ $= \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx = \int_a^b [f(x)-g(x)].dx$ Los puntos *a* y *b* se obtienen resolviendo el sistema *f(x)=g(x)*
	$Área(R) = Área(R_1) + Área(R_2) =$ $\int_a^c [g(x)-f(x)].dx + \int_c^b [f(x)-g(x)].dx$

5. ÁREAS EJEMPLOS

Halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$, el eje OX, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$.

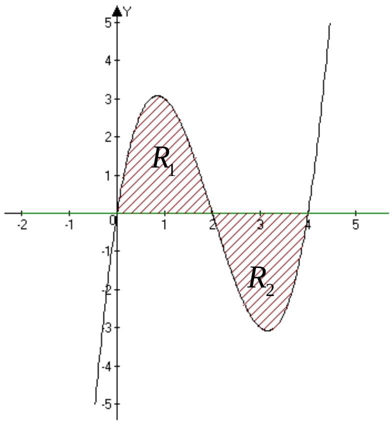
Puesto que la función es positiva en todo su dominio, el área del recinto nos vendrá dada por:

$$A(R) = \int_1^3 x^2 .dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{6} \text{ u.s.}$$

Halla el área del recinto limitado por la curva $y = -x^2$, el eje OX, y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

$$A(R) = -\int_{-2}^{2} (-x^2).dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ u.s.}$$

Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.



Los puntos de corte de nuestra función con el eje OX son: $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$

El recinto cuya área queremos calcular se descompone en dos recintos: uno situado por encima del eje y el otro por debajo.

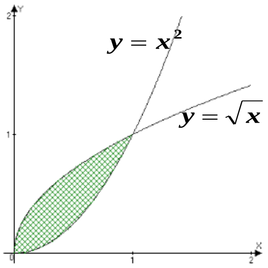
Por tanto:

$$\boldsymbol{A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x).dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x).dx =}$$

$$\boldsymbol{= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x\right]_2^4 = 4 - (-4) = 8 \text{ u.s.}}$$

Halla el área del recinto limitado por las parábolas $\boldsymbol{y = x^2}$ **e** $\boldsymbol{y^2 = x}$**.**

Dibujamos el recinto limitado por las curvas y calculamos los puntos de corte de ellas:



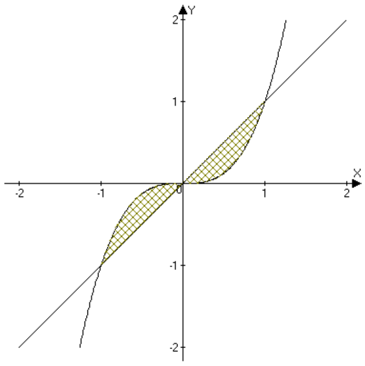
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y^2 = x \end{array}\right\} \Rightarrow (x^2)^2 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

El área del recinto nos vendrá dada por:

$$\boldsymbol{A(R) = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot dx - \int_0^1 x^2 \cdot dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \cdot dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) \cdot dx =}$$

$$\boldsymbol{= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}} \textbf{ u.s.}$$

El área de la región comprendida entre las gráficas de $\boldsymbol{y = x^3}$ **e** $\boldsymbol{y = x}$ **(mira el dibujo) no se puede calcular mediante la integral** $\boldsymbol{\int_{-1}^{1} (x^3 - x).dx}$



$$A(R) = 2\int_0^1 (x - x^3).dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ u.s.}$$

O también

$$\boldsymbol{A(R) = \int_{-1}^{0} (x^3 - x).dx + \int_0^1 (x - x^3).dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =}$$

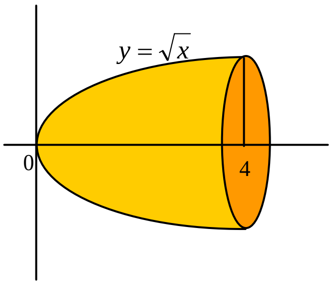
$$\boldsymbol{= \left(0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} \textbf{ u.s.}$$

6. VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

$$V(f,a,b)=\int_a^b \pi\cdot f^2(x).dx=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\cdot dx$$

EJEMPLO.

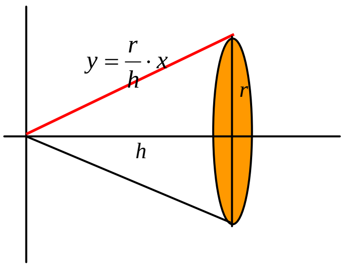
Calcular el volumen engendrado al girar la parábola $y=\sqrt{x}$ alrededor del OX entre 0 y 4.



$$V=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\cdot dx=\pi\int_0^4 x\cdot dx=\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{4^2}{2}-0\right)=8\pi\ \text{u.v.}$$

Utilizando el cálculo integral, determina el volumen de un cono circular recto de radio *r* y altura *h*.

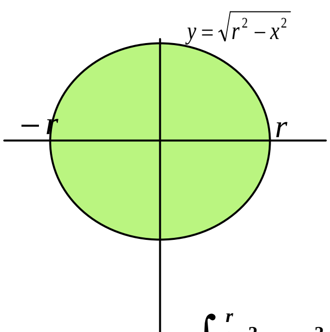


La ecuación de la recta que gira alrededor del eje OX para generar en el intervalo $[0,h]$ un cono de radio r y altura h es $y=\frac{r}{h}\cdot x$ Por tanto, el volumen del cono nos vendrá dado por

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2\cdot dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\cdot dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

que es la fórmula del volumen del cono.

Utilizando el cálculo integral, determina el volumen de una esfera de radio *r*.



La esfera se engendra al girar una circunferencia de ecuación $x^2+y^2=r^2$ alrededor del eje OX.

En consecuencia, el volumen de la esfera nos vendrá dado por

$$\boldsymbol{V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\cdot dx=\pi\cdot\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\cdot\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(r^2(-r)-\frac{(-r)^3}{3}\right)\right]=}$$

$$\boldsymbol{=\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot r^3-\left(-r^3-\frac{-r^3}{3}\right)\right]=\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot r^3+\frac{2}{3}\cdot r^3\right]=\frac{4}{3}\pi r^3}$$