EJEMPLOS. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Ejercicio nº 1.-

Calcula el límite de la siguiente función en el punto $x = 3$ y estudia su comportamiento por la izquierda y por la derecha:

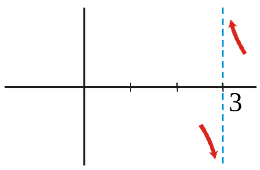
$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Solución:

$x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$



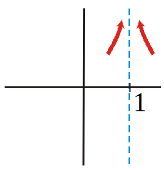
Ejercicio nº 2.-

Halla el límite siguiente y representa la información obtenida:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)^2} = +\infty$$



Ejercicio nº 3.-

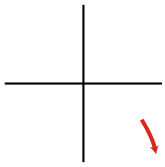
Halla el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones y representa gráficamente la información que obtengas:

a) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} + 1$

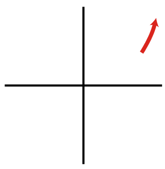
b) $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x^3}{5}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{2}+1\right)=-\infty$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+2x^3}{5}=+\infty$



<u>Ejercicio nº 4.-</u>

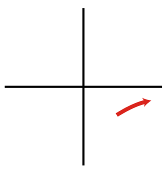
Resuelve los siguientes límites y representa los resultados obtenidos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(1-x)^3}$

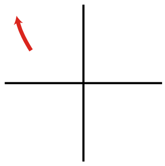
b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x^3}{x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(1-x)^3}=0$



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x^3}{x^2} = +\infty$



Ejercicio nº 5.-

Averigua si la siguiente función es continua:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x\le 2 \\ x+2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Solución:

- Si $x \neq 2$, la función es continua.

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (\ 2x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x+2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\} \quad \text{Es continua en } x=2 \text{ porque } \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

Ejercicio nº 6.-

Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2-1}$$

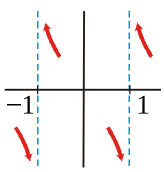
Solución:

- $x^2-1=0 \to x=-1;\ x=1$
  Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$.

- Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$



Ejercicio nº 7.-

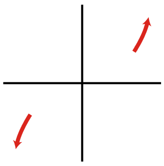
Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$ de la siguiente función y representa los resultados obtenidos:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = -\infty$$



Ejercicio nº 8.-

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la función:

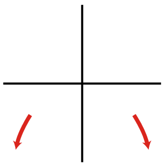
$$f(x) = \frac{2x^3 + x}{1 - x}$$

Representa la información obtenida.

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x}{1 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + x}{1 - x} = -\infty$$



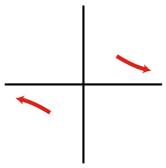
Ejercicio nº 9.-

Estudia el comportamiento de la siguiente función, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, y representa las ramas que obtengas:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+2}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x^2+2} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2x^2+2} = 0$$



Ejercicio nº 10.-

Halla la asíntota oblicua de la siguiente función y representa la posición de la curva respecto a ella:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$$

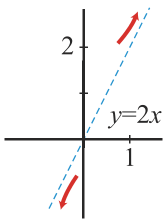
Solución:

- $\dfrac{2x^3}{x^2-1} = 2x + \dfrac{2x}{x^2-1} \to$ Asíntota oblicua: $y = 2x$

- Cuando $x \to +\infty$, $\dfrac{2x}{x^2-1} > 0 \to$ La curva está por encima de la asíntota.

- Cuando $x \to -\infty$, $\dfrac{2x}{x^2-1} < 0 \to$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Representación:



Ejercicio nº 11.-

En cada uno de los siguientes casos, obtén la asíntota vertical:

a) $y = \log x$ **b)** $y = -\log_3 (x+3)$ **c)** $y = -\ln (2x+4)$ **d)** $y = \log_5 (x-1)$

Halla el límite cuando $x \to +\infty$**.**

Solución:

a) Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asíntota vertical: $x = -3$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d) Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$