RESUMEN LÍMITES Y CONTINUIDAD

Límite de una función en un punto

El límite de la función $f(x)$ en el punto x_0, es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando los originales (las x) se acercan al valorx_0. Es decir el valor al que tienden las imágenes cuando los originales tienden a x_0.

Vamos a estudiar el límite de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 2$.

x	f(x)
9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
...	...
↓	↓
2	4

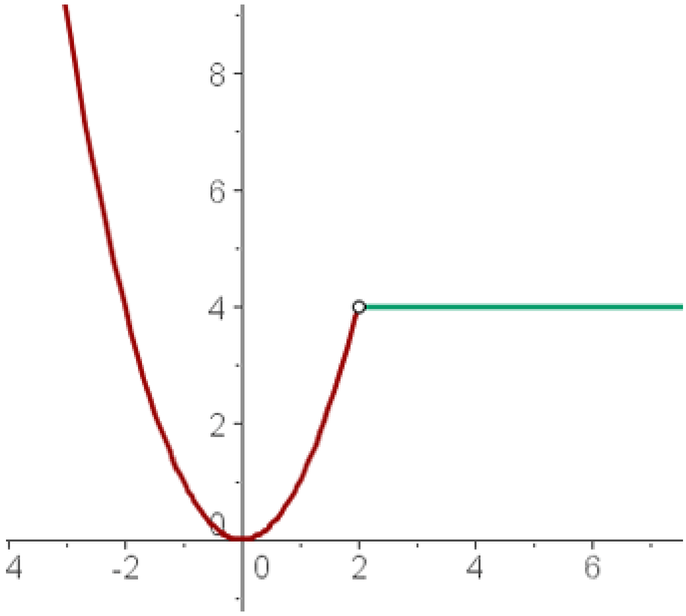
x	f(x)
2,1	4.41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
...	...
↓	↓
2	4

Tanto si nos acercamos a 2 por la izquierda o la derecha las imágenes se acercan a 4.

Límites laterales

1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x<2 \\ 4 \text{ si } x>2 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} 4 = 4$$

En este caso vemos que el **límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4**.

El límite de la función es 4 aunque la función no tenga imagen en x = 2.

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

2.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

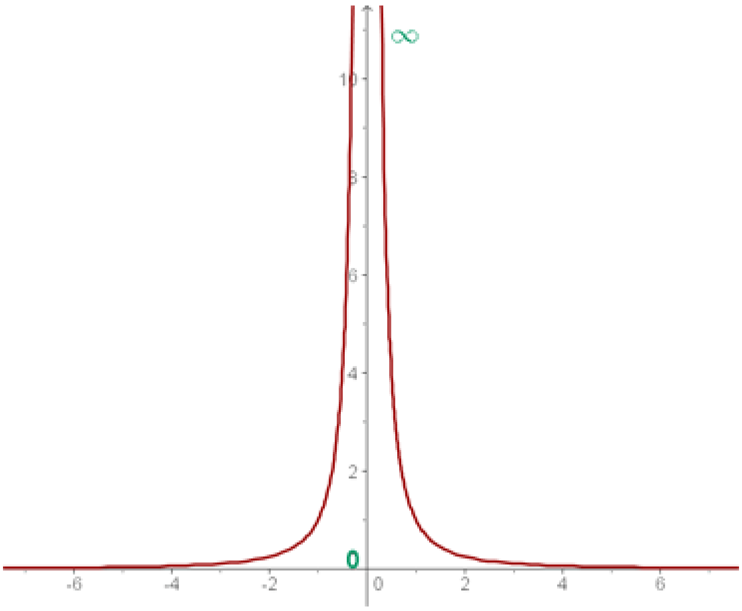
$$\lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

Como no coinciden los **límites laterales**, la función no tiene límite en x = 0.

Límite infinito

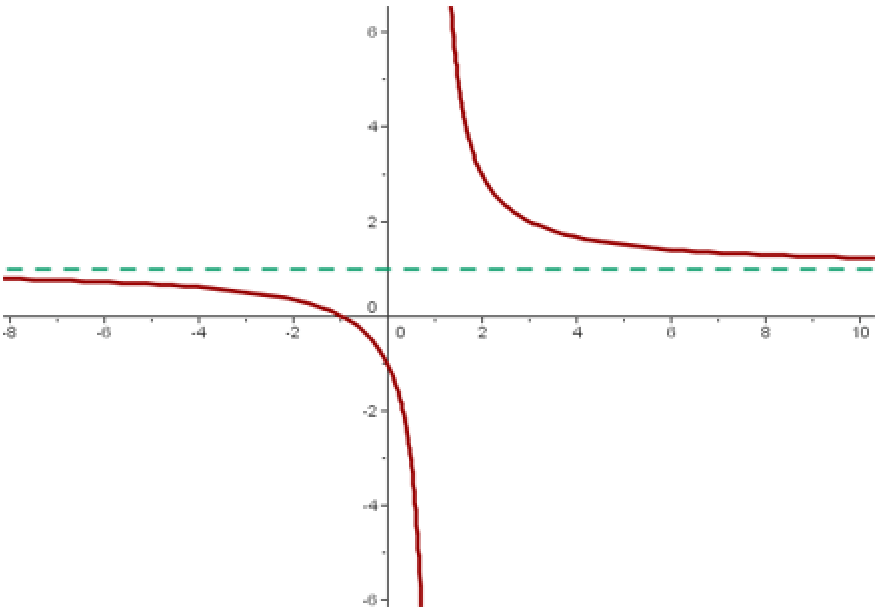
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$



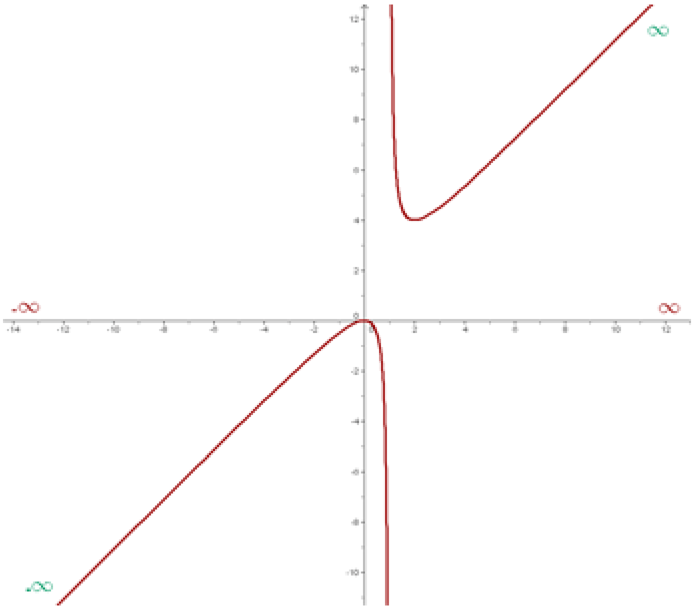
Límite cuando x tiende a infinito

Ejemplos

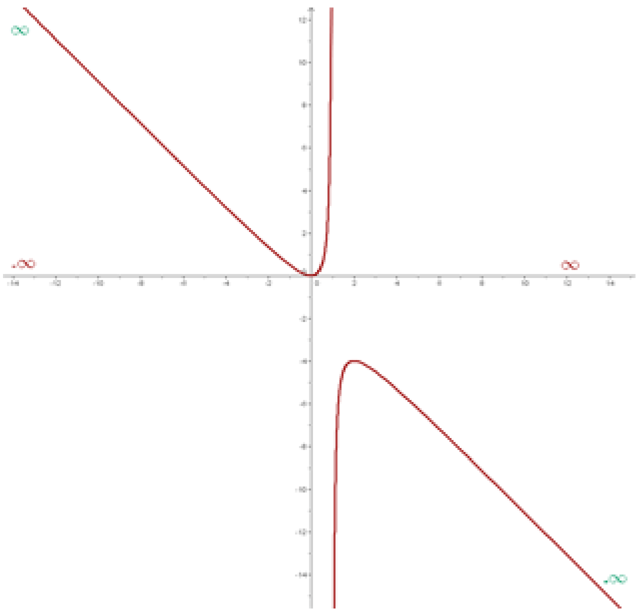
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x-1} = \infty$$



Operaciones con infinito

Sumas con infinito

Infinito más un número

$$\infty \pm k = \infty$$

Infinito más infinito

$$\infty + \infty = \infty$$

Infinito menos infinito

$$\infty - \infty \rightarrow Ind$$

Productos con infinito

Infinito por un número

$$\infty \cdot (\pm k) = \pm\infty \qquad Si\ k \neq 0$$

Infinito por infinito

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

Infinito por cero

$$0 \cdot \infty \rightarrow Ind$$

Cocientes con infinito y cero

Cero partido por un número

$$\frac{0}{k} = 0$$

Un número partido por cero

$$\frac{k}{0} = \infty$$

Un número partido por infinito

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

Infinito partido por un número

$$\frac{\infty}{k} = \infty$$

Cero partido por infinito

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

Infinito partido por cero

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

Cero partido por cero

$$\frac{0}{0} \to Ind$$

Infinito partido por infinito

$$\frac{\infty}{\infty} \to Ind$$

Potencias con infinito y cero

Un número elevado a cero

$$k^0 = 1$$

Cero elevado a cero

$$0^0 \to Ind$$

Infinito elevado a cero

$$\infty^0 \to Ind$$

Cero elevado a un número

$$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k>0 \\ \infty & \text{si } k<0 \end{cases}$$

Un número elevado a infinito

$$k^{\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad K>0 \\ 0 & \text{si} \quad 0<k<1 \end{cases}$$

Cero elevado a infinito

$$0^{\infty} = 0$$

Infinito elevado a infinito

$$\infty^{\infty} = \infty$$

Uno elevado a infinito

$$1^{\infty} \to Ind$$

Cálculo del límite en un punto

Si *f(x)* es una función usual (polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, etc.) y está definida en el punto a, entonces se suele cumplir que:

$$\lim_{x \to a} = f(a)$$

Es decir: para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tienden las x.

$$\lim_{x \to 1} (-x^2 - 5x + 6) = -1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2} = \frac{3^2 - 2}{3^2 - 5 \cdot 3 + 2} = -\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = \left(\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1} - \sqrt{1^2 + 1} \right) = 2 - \sqrt{2}$$

No podemos calcular $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$ porque el dominio de definición está en el intervalo [0, ∞), por tanto no puede tomar valores que se acerquen a −2.

Sin embargo sí podemos calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$, porque aunque 3 no pertenezca al dominio, D= $\mathbb{R}$ − {2, 3}, sí podemos tomar valores del dominio tan próximos a 3 como queramos.

Cálculo del límite en una función definida a trozos

En primer lugar tenemos que estudiar los límites laterales en los puntos de unión de los diferentes trozos.

Si coinciden, este es el valor del límite.

Si no coinciden, el límite no existe.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} & x<-1 \\ x^2 & \text{si} & -1\le x<1 \\ 2 & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$$

En x = −1, los límites laterales son:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to -1^-} 1 = 1$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to -1^+} x^2 = 1$

Como en ambos casos coinciden, **el límite existe y vale 1**.

En x = 1, los límites laterales son:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2$

Como no coinciden los límites laterales no tiene límite en x = 1.

Cálculo de límites cuando x tiende ∞

Límite de funciones polinómicas en el infinito

El límite cuando x → ∞ de una función polinómica es +∞ o −∞ según que el término de mayor grado sea positivo o negativo.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \infty$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^2 + 5x + 6) = -\infty$

Límite de la inversa de un polinomio en el infinito

Si P(x) es un polinomio, entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{P(x)} = 0$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x} = 0$$

Cálculo de límites cuando x → −∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \lim\limits_{x \to \infty} (3x^4 - x^3 + 2x) = \infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 5x + 6) = \lim\limits_{x \to \infty} (-x^2 - 5x + 6) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - 8x - 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2(-x)^2 - 8(-x) - 3} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2x^2 + 8x - 3} = \infty$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^3 - 5x} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{(-x)^3 - 5(-x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{-x^3 + 5x}$

No existe el límite, porque el radicando toma valores negativos.

Indeterminaciones

Una indeterminación no significa que el límite no exista o no se pueda determinar, sino que la aplicación de las propiedades de los límites tal como las hemos enunciadas no son válidas.

En estos casos hay que efectuar operaciones particulares para resolver cada una de las indeterminaciones.

Tipos de indeterminación

1. Infinito partido por infinito

$$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow Ind$$

2. Infinito menos infinito

$$\infty - \infty \rightarrow Ind$$

3. Cero partido por cero

$$\frac{0}{0} \rightarrow Ind$$

4. Cero por infinito

$$0 \cdot \infty \rightarrow Ind$$

5. Cero elevado a cero

$$0^0 \rightarrow Ind$$

6. Infinito elevado a cero

$$\infty^0 \rightarrow Ind$$

7. Uno elevado a infinito

$$1^\infty \rightarrow Ind$$

Límite de un número partido por cero

$$\frac{k}{0}$$

El límite puede ser +∞, −∞ o no tener límite.

Ejemplos

Calcular el límite:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0}$

Tomamos los límites laterales para determinar el signo de ∞.

Si le damos a la x un valor que se acerque a −1 por la izquierda como −1,1; tanto el numerador como denominador son negativos, por tanto el límite por la izquierda será: +∞.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{(-)}{(-)} = \infty$$

Si le damos a la x un valor que se acerque a −1 por la derecha como −0,9. El numerador será negativo y el denominador positivo, por tanto el límite por la derecha será: −∞.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{(-)}{(+)} = -\infty$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite cuando x → −1.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

3. $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{0}$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{\left(0^-\right)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{\left(0^+\right)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

Indeterminación infinito partido infinito

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Para resolver resolver la indeterminación infinito partido infinito podemos utilizar uno de estos dos métodos:

1. Por comparación de infinitos

1. El numerador tiene mayor grado que el denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}=\infty$$

El límite es ∞

2. El denominador tiene mayor grado que el numerador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^7-x^3}=0$$

El límite es **0**

3. Numerador y denominador tienen el mismo grado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{3x^5-x^3}=\frac{2}{3}$$

Al tener el mismo grado el límite es el **cociente entre los coeficientes de mayor grado**.

Ejemplos

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x}=\infty$

El numerador es un infinito de orden superior.

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x}=0$

El denominador es un infinito de orden superior.

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^7-2}}{x^4-1}=0$

Como $4>\frac{7}{2}$ el denominador tiene mayor orden.

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^5-1)}{x^2-5} = 0$

El denominador tiene mayor orden.

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^{23}} = \infty$

El numerador tiene mayor orden.

$$\frac{0}{0}$$

Vamos a estudiar la indeterminación 0/0 en dos casos:

Caso 1. Función racional

Se descomponen en factores los polinomios y se simplifica la fracción.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{x-1}=\frac{0}{-2}=0$$

El límite es **0**.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{0}$$

Tomamos límites laterales:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{x+1}=-\infty$$

No tiene límite en $x=-1$

Caso 2. Función con radicales

En primer lugar **multiplicamos numerador y denominador por el conjugado** de la expresión irracional.

Realizamos las operaciones y simplificamos la fracción.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{1-x})=2$$

$\infty - \infty$

Para resolver la indeterminación $\infty - \infty$ tenemos varios métodos:

1. Por comparación de infinitos

$$\lim_{x\to\infty}(x^7 - x^5 + x^3 - x^2) = \infty$$

Por tener x^7 mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x+3} = \infty$$

Por tener x^2 mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x^5+3} = -\infty$$

Porque $\frac{5}{2} > 2$

$$\lim_{x\to\infty}(3^x - \sqrt{x^8 - 2}) = \infty$$

3^x tiene mayor orden

2. Con funciones racionales

Ponemos a **común denominador**.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{X-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4X+3}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{X-1}{x-3} - \frac{x+5}{x^2-4X+3}\right) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x+1)-(x+5)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)} = \frac{-4}{0}$$

Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\infty$$

No tiene límite

3. Con funciones irracionales

Cuando se trata de funciones irracionales podemos multiplicar y dividir por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x})=\infty-\infty$$

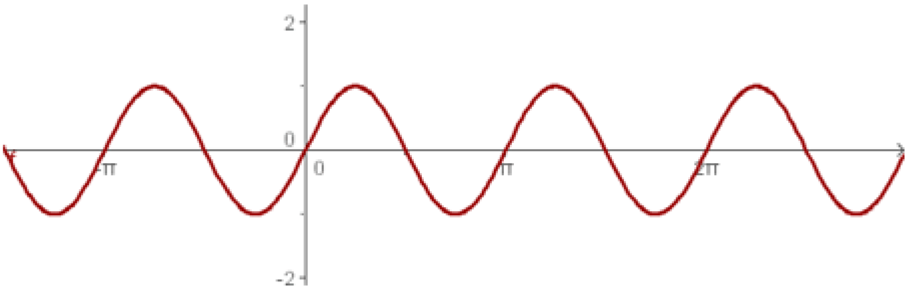
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})\right]}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2-x^2-x}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-x}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x}-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

Continuidad de una función

Una idea intuitiva de **función continua** se tiene al considerar que su gráfica es continua, en el sentido que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja de papel.



Continuidad de una función en un punto

Se dice que una **función f(x) es continua en un punto x = a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Que el punto x = a tenga imagen.

$$\exists f(a)$$

2. Que exista el límite de la función en el punto x = a.

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

3. Que la imagen del punto coincida con el límite de la función en el punto.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Ejemplo

Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<2 \\ 4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ en x = 2

1. La función tiene imagen en x = 2.

f(2)= 4

2. La función tiene límite en x = 2 porque coinciden los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

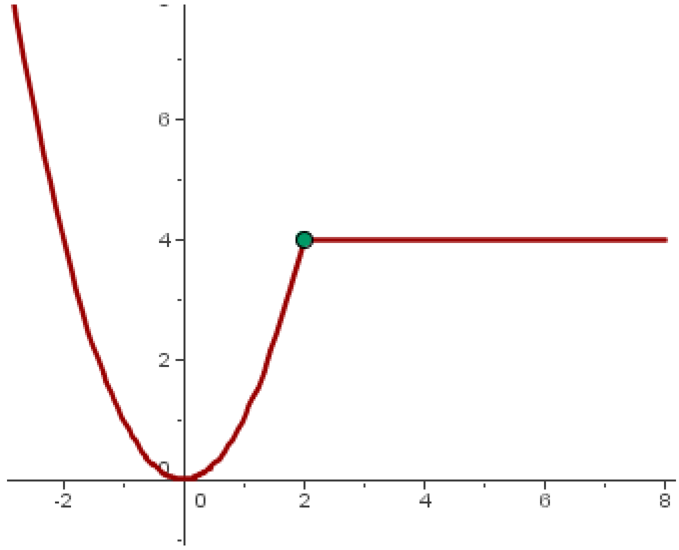
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to -2^+} 4 = 4$$

3. En x = 2 la imagen coincide con el límite

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

En la gráfica podemos comprobar que es continua.



Concepto de función

Dados dos conjuntos A y B, llamamos **función a la correspondencia de A en B** en la cual **todos los elementos de A tienen a lo sumo una imagen en B**, es decir una imagen o ninguna.

Función real de variable real es toda correspondencia f que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales, llamado dominio, otro número real.

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{f(x) = y}$$

El subconjunto en el que se define la función se llama **dominio o campo existencia de la función**. Se designa por D.

El número **x** perteneciente al **dominio** de la función recibe el nombre de **variable independiente**.

Al número, y, asociado por f al valor x, se le llama variable dependiente. La imagen de x se designa por f(x). Luego

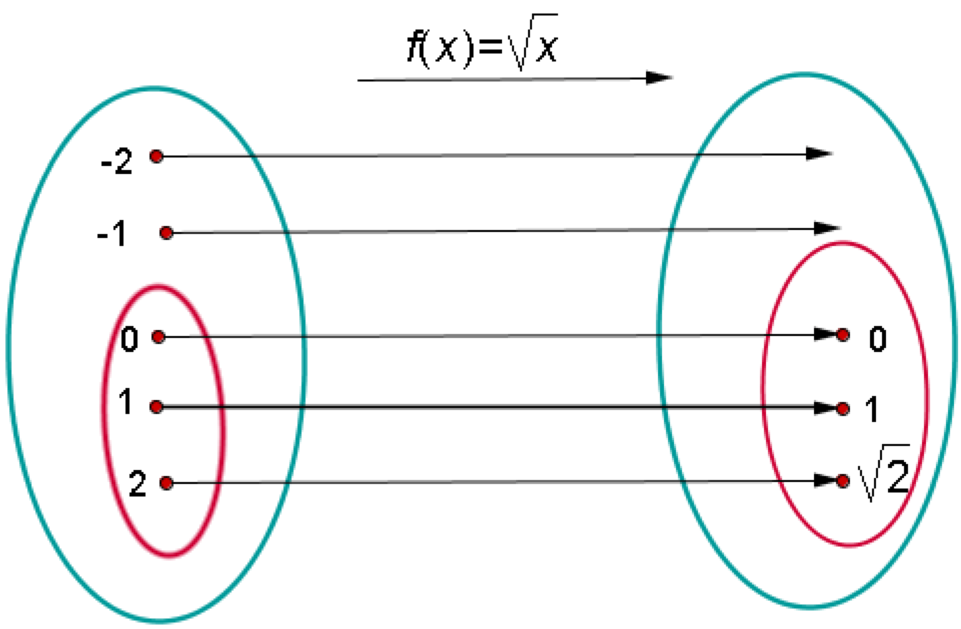
y= f(x)

Se denomina **recorrido** de una función al **conjunto de los valores reales que toma la variable y o f(x)**.

Dominio de una función

El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen.

D = {x ∈ ℝ / ∃ f (x)}



Conjunto inicial Conjunto final

Dominio Conjunto imagen o recorrido

Estudio del dominio de una función

Dominio de la función polinómica entera

El dominio es R, cualquier número real tiene imagen.

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ **D=R**

Dominio de la función racional

El dominio es R menos los valores que anulan al denominador (no puede existir un número cuyo denominador sea cero).

$$f(x) = \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 6}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ $D = \mathbb{R} - \{2,3\}$

Asíntotas

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente.
Hay tres tipos de asintotas:

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$$

ó

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

$$y = k$$

Ejemplo

Calcular las **asíntotas horizontales** de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = 2 \qquad y = 2$$

Asíntotas verticales

$$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty \qquad\qquad x = k$$

Consideramos que el resultado del límite es ∞ si tenemos un número real partido por cero.**K son los puntos que no pertenecen al dominio de la función** (en las funciones racionales).

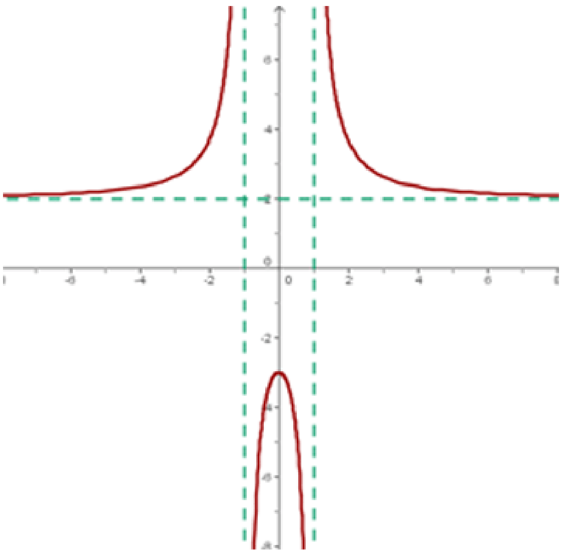
Ejemplo

Calcular las **asíntotas verticales** de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2-1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = \infty \qquad\qquad x = -1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = \infty \qquad\qquad x = 1$$



Asíntotas oblicuas

$y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Sólo hallaremos las **asíntotas oblicuas** cuando **no haya asíntotas horizontales**.

Ejemplo

Calcular las **asíntotas** de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales

Asíntotas verticales

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x - 2} = \infty$$

$x = 2$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+2}{x-2} = 2$$

$y = x + 2$