FICHA BLOQUE 2.

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTIMICAS. FUNCIONES.LÍMITES.DERIVADAS

1. Resuelve

a) $\log(3x-1)-\log(2x+3)=1-\log 25$

b) $5^{x+1}+5^{x}+5^{x-1}=\frac{31}{5}$

2. Resuelve dos de las siguientes ecuaciones:

a) $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

b) $\log_2 x=4\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 27$

c) $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

d) $\log_2 x=4\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 27$

e) $2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=28$

$$2^x\cdot 2+2^x+\frac{2^x}{2}=28$$

$$2^x\left(2+1+\frac{1}{2}\right)=28$$

$$2^x\cdot\frac{7}{2}=28 \qquad 2^x=2^3 \qquad x=3$$

f) $2-3^{-x}+3^{x+1}=0$

$$2-\frac{1}{3^x}+3\cdot 3^x=0$$

$$3^x=t$$

$$2-\frac{1}{t}+3\cdot t=0$$

$$3t^2+2t-1=0$$

$t_1 = -1 \qquad 3^x = -1 \qquad$ sin solución

$t_2 = \frac{1}{3} \qquad 3^x = \frac{1}{3} \qquad x = -1$

g) $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$

$2^{2x-2} + 2^{x+2} = 48 \qquad \frac{2^{2x}}{4} + 4 \cdot 2^x - 48 = 0 \qquad t = 2^x$

$t^2 + 16t - 192 = 0 \qquad \begin{cases} t = 8 \\ t = -24 \end{cases}$

$8 = 2^x \qquad x = 3$

h) $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$

$e^x - \frac{5}{e^x} + \frac{4}{e^{3x}} = 0 \qquad e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0 \qquad e^{2x} = t$

$t^2 - 5t + 4 = 0 \qquad t_1 = 1 \qquad e^{2x} = 1 \qquad x = 0$

$t_2 = 4 \qquad e^{2x} = 4 \qquad \ln e^{2x} = \ln 4 \qquad x = \frac{\ln 4}{2}$

i) $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

$2^{2x} = t$

$t^2 - t - 12 = 0 \qquad t_1 = 4 \qquad 2^{2x} = 4 \qquad x = 1$

$t_2 = -3 \qquad 2^{2x} = -3 \qquad \nexists$

j) $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$

$\log[x(x+3)] = \log(x+1)^2$

$$x(x+3)=(x+1)^2$$

$$x^2+3x=x^2+2x+1 \qquad x=1$$

k) $$2\log x-2\log(x+1)=0$$

$$\log x^2-\log(x+1)^2=\log 1$$

$$\log\frac{x^2}{(x+1)^2}=\log 1 \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2}=1$$

$$2x+1=0 \qquad x=-\frac{1}{2} \qquad \text{Sin solución}$$

l) $$\log_5 x+\frac{\log_5 125}{\log_5 x}=\frac{7}{2}$$

$$(\log_5 x)^2-\frac{7}{2}\log_5 x+\log_5 125=0$$

$$2(\log_5 x)^2-7\log_5 x+6=0 \qquad \log_5 x=t$$

$$2t^2-7t+6=0 \qquad t=2 \qquad t=\frac{3}{2}$$

$$\log_5 x=2 \qquad x=25$$

$$\log_5 x=\frac{3}{2} \qquad x=\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}$$

3. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 16}$

b) $y = \sqrt{1+2x}$

Solución:

a) $x^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 16 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \;\rightarrow\;$ Dominio $= \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

b) $1 + 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; 2x \geq -1 \;\Rightarrow\; x \geq \dfrac{-1}{2} \;\rightarrow\;$ Dominio $= \left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right)$

4. Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

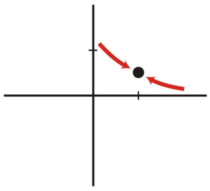
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 5}{x + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

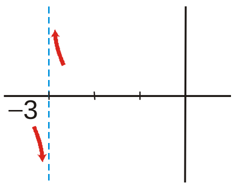


b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 5}{x + 3}$

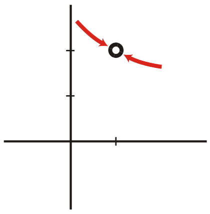
Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x + 5}{x + 3} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x + 5}{x + 3} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{4}{2} = 2$



5. Calcula el limite $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^3 - 2x^2}{x}$

6. Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

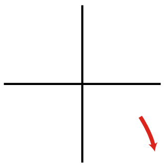
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}$

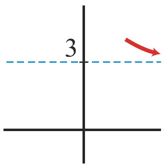
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x + 1}$

Solución:

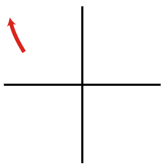
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - x)^3 = -\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1} = 3$



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x + 1} = +\infty$



7. Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 1 \\ 4-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

8. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } -1<x<2 \\ \dfrac{3-x}{2} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Solución:

1.^{er} tramo: $y=x^2+1$ (parábola) $\to$ función continua en todo dominio.

2.° tramo: $y=\dfrac{1}{x}$ $\to$ no existe en $x=0$ $\to$ Discontinua en $x=0$, ya que 0 está en el intervalo $-1<x<2$ (asíntota vertical en $x=0$).

3.^{er} tramo: $y=\dfrac{3-x}{2}$ (recta) $\to$ función continua en el dominio en que está definida.

Estudiamos la continuidad en los puntos de ruptura:

– En $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+1\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x}=-1 \end{array}\right\} \to \lim_{x\to -1^-} f(x)\ne \lim_{x\to -1^+} f(x) \to \text{no existe } \lim_{x\to -1} f(x)$$

La función es discontinua en $x=-1$.

– En $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to f(2)=\lim_{x\to 2} f(x) \to f(x) \text{ es continua en 2.}$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x=0$ y $x=-1$.

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplifica al máximo

a) $f(x)=\dfrac{-3x^5+2x}{7}+\sqrt{6x}$

b) $f(x)=x^4\,arccos\,x$

c) $f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{-15x^4+2}{7}+\dfrac{6}{2\sqrt{6x}}=\dfrac{-15x^4+2}{7}+\dfrac{3}{\sqrt{6x}}$

b) $f'(x)=4x^3 arccos\,x+x^4\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=4x^3 arccos\,x-\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $f'(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\dfrac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\cdot\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

10. Deriva las siguientes funciones, simplificando al máximo

a) $y=\dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$ **b)** $y=\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)$ **c)** $y=(2x+10)\cdot e^{x^2-10x-5}$

11. Asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2-2x}$ **y sitúa la curva respecto de ellas**

12. Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$$

b) Sobre la gráfica anterior, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* (*x*).

Solución:

a) • Dominio $=\mathbb{R}-\{0,2\}$

· Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \ \to \ y=0 \ \to \ x^2-2x-3=0 \ \to \ x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \ \to$

$$\to \begin{cases} x=-1 \ \to \ \text{Punto } (-1,0) \\ x=3 \ \to \ \text{Punto } (3,0) \end{cases}$$

Con el eje *Y:* No corta al eje *Y*, pues $x=0$ no está en el dominio.

· Asíntotas verticales: $x=0$ y $x=2$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x-3}{x(x-2)}=-\infty; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x-3}{x(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x-3}{x(x-2)}=+\infty; \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x-3}{x(x-2)}=-\infty$$

· Asíntota horizontal: $y=1$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1; \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

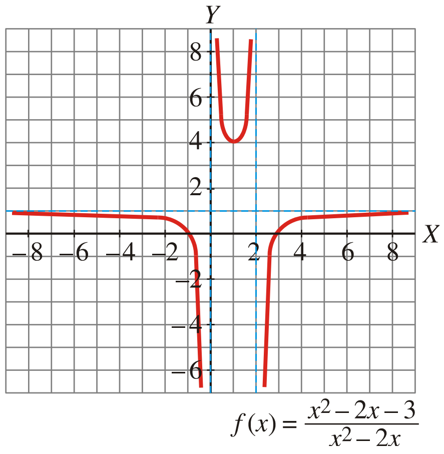
· Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x)-(x^2-2x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=$$

$$=\frac{(2x-2)(x^2-2x-x^2+2x+3)}{(x^2-2x)^2}=\frac{3(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{6(x-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=0 \ \Rightarrow \ x=1 \ \to \ \text{Punto}(1,4)$$

· Gráfica:



b) · Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 2$, es continua.
Es discontinua en $x = 0$ y en $x = 2$, pues presenta dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

- Decreciente en $(-\infty, 0)\cup(0, 1)$ y creciente en $(1, 2)\cup(2, +\infty)$.

13. Dada la función:

$$f(x) = 4x^3 - 6x + 1$$

a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?
b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

- $f'(x) = 12x^2 - 6$

a) $f'(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Decreciente en $x = 0$
$f'(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ Creciente en $x = 1$

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 12x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 12x^2 - 6 < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La función es decreciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\infty\right)$. Tiene un mínimo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y un máximo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Averigua cuáles son las asíntotas de la siguiente función y representa gráficamente la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$

Solución:

· Asíntota horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0$$

- Asíntotas verticales: $x = -3$; $x = 3$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty; \quad \lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty; \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = +\infty$$

· Representación: