PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2014	CONVOCATORIA: JULIO 2014
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El valor del determinant de la matriu $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 *punts*), i la matriu S^{-1}, sent S^{-1} la matriu inversa de S (2 *punts*). Indiqueu la relació entre el fet que el valor del determinant d'una matriu S siga nul o no i el fet que aquesta matriu admeta matriu inversa S^{-1}. (1 *punt*).

b) El determinant de la matriu $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabent que T és una matriu quadrada de 3 files i que 20 és el valor del determinant d'aquesta matriu T. (3 *punts*).

c) La solució a de l'equació $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$. (2 *punts*).

Solució: a) $|S|=20\neq 0$, $S^{-1}=\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, en ser $|S|\neq 0$ la matriu S té inversa.

b) $\left|4\left(T^2\right)\right|^{-1}=\left(4^3\times 20^2\right)^{-1}=3{,}90625\times 10^{-5}$. c) $a=2$.

Problema A.2. Tenim els punts $A=(1,\ 5,\ 7)$ i $B=(3,\ -1,\ -1)$. Es demana obtenir **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Les equacions dels plans π_1 i π_2, que són perpendiculars a la recta r que passa pels punts A i B, sabent que el pla π_1 passa pel punt A, i el pla π_2 passa pel punt mitjà del segment els extrems del qual són els punts A i B. (4 *punts, distribuïts en* 2 *punts per cada pla*).

b) La distància entre els plans π_1 i π_2. (2 *punts*).

c) Les equacions de la recta r que passa pels punts A *i* B (2 *punts*), i els punts de la recta r que estan a distància 3 del punt $C=(1,\ 0,\ 1)$. (2 *punts*).

Solució: a) $\pi_1: x-3y-4z+42=0$; el punt mitjà és $(2,\ 2,\ 3)$ i $\pi_2: x-3y-4z+16=0$ b) $\sqrt{26}$. c) $(x,y,z)=(2+\lambda,\ 2-3\lambda,\ 3-4\lambda)$; $(3,-1,-1)$ i $(2,\ 2,\ 3)$.

Problema A.3. Siga *f* la funció real definida per $f(x)=xe^x-3x$.

Es demana l'obtenció **raonada**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**, de:

a) Els punts de tall de la corba $y=f(x)$ amb l'eix *X*. (2 *punts*).

b) El punt d'inflexió de la corba $y=f(x)$, (2 *punts*), i també la **justificació raonada** que la funció *f* és creixent quan $x>2$. (2 *punts*).

c) L'àrea limitada per l'eix *X* i la corba $y=f(x)$, quan $0\le x\le \ln 3$, on ln significa logaritme neperià. (4 *punts*).

Solució: a) $(0,0)$; $(\ln 3, 0)$; b) $f''(x)=(2+x)e^x$, d'ací que el punt d'inflexió siga $(-2,\ 6-2e^2)$; $f'(x)=e^x(1+x)-3$, per això $f'(x)>e^2(3)-3>0$, si $x>2$. c) De $\int -(xe^x-3x)dx=e^x-xe^x+\frac{3x^2}{2}$ es dedueix que $\int_0^{\ln 3}-(xe^x-3x)dx=\frac{3}{2}\ln^2 3-3\ln 3+2=0{,}51459.$

OPCIÓ B

Problema B.1. Tenim el sistema d'equacions lineals $\begin{cases}(1-\alpha)x+2y+z=4\\ x+y-2z=-4\\ x+4y-(\alpha+1)z=-2\alpha\end{cases}$ on α és un paràmetre real. **Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és incompatible. (3 *punts*).

b) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és compatible i determinat. (3 *punts*).

c) Totes les solucions del sistema quan $\alpha=2$. (4 *punts*).

Solució: a) $\alpha=4$. b) $2\ne\alpha\ne 4$. c) $x=\frac{5\lambda}{3}-4,\ y=\frac{\lambda}{3},\ z=\lambda,$ sent λ un nombre real.

Problema B.2. Es donen les rectes $r\begin{cases}x-y=0\\ z=10\end{cases}$ i $s\begin{cases}x+y=8\\ x+y+z=13\end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Un vector director de cada recta (2 *punts*) i la posició relativa de les rectes *r* i s . (2 *punts*).

b) L'equació del pla que conté la recta *s* i és paral·lel a la recta *r*. (3 *punts*).

c) La distància entre les rectes *r* i s . (3 *punts*).

Solució: a) Vectors direcció són $(1,1,0)$ i $(1,-1,0)$. Les rectes s'encreuen, ja que no es tallen i no són paral·leles. b) z = 5. c) 5 (n'hi ha prou amb observar que coincideix amb la distància 5 entre els dos plans paral·lels que les contenen, $z=10$ i $z=5$).

Problema B.3. Un club esportiu lloga a l'empresa VR un avió de 80 places per a fer un viatge. Hi ha 60 membres del club que han reservat bitllet. En el contracte de lloguer, s'indica que el preu d'un bitllet serà 800 euros si només viatgen 60 persones, però que el preu per bitllet disminueix en 10 euros per cada viatger addicional a partir d'aquests 60 viatgers que ja han reservat el bitllet.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El total que cobra l'empresa VR si viatgen 61, 70 i 80 passatgers. (1 *punt*).

b) El total que cobra l'empresa VR si viatgen $60+x$ passatgers, sent $0\le x\le 20$. (4 *punts*).

c) El nombre de passatgers entre 60 i 80 que maximitza el que cobra en total l'empresa VR. (5 *punts*).

Solució: a) 48190; 49000; 48000. b) $(60+x)(800-10x)$. c) La derivada de l'expressió obtinguda en b) és $200-20x$, que és positiva en $[0,10[$ i negativa en $]10,20]$. Per tant, el nombre de passatgers que maximitza la quantitat abonada a la companyia és 60+10 = 70 passatgers.

OPCIÓN A

Problema A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 *puntos*) y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz S. (2 *puntos*). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz *S* sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. (1 *punto*).

b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que *T* es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz *T*. (3 *puntos*).

c) La solución *a* de la ecuación $\begin{vmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{vmatrix}$. (2 *puntos*).

Solución: a) $|S|=20\neq 0$, $S^{-1}=\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, al ser $|S|\neq 0$ la matriz S tiene inversa.

b) $\left|4\left(T^2\right)\right|^{-1}=\left(4^3\times 20^2\right)^{-1}=3{,}90625\times 10^{-5}$. c) $a=2$.

Problema A.2. Se dan los puntos $A=(1,\ 5,\ 7)$ y $B=(3,\ -1,\ -1)$.

Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta *r* que pasa por los puntos A y B, sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto A y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A y B. (4 *puntos distribuidos en* 2 *puntos por cada plano*).

b) La distancia entre los planos π_1 y π_2. (2 *puntos*).

c) Las ecuaciones de la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, (2 *puntos*), y los puntos de la recta r que están a distancia 3 del punto $C=(1,\ 0,\ 1)$. (2 *puntos*).

Solución: a) $\pi_1: x-3y-4z+42=0$; el punto medio es $(2,\ 2,\ 3)$ y $\pi_2: x-3y-4z+16=0$ b) $\sqrt{26}$. c) $(3,-1,-1)$ y $(2,\ 2,\ 3)$.

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x)=xe^x-3x$.

Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con el eje *X*. (2 *puntos*).

b) El punto de inflexión de la curva $y=f(x)$, (2 *puntos*), así como la **justificación razonada** de que la función *f* es creciente cuando $x>2$. (2 *punto*).

c) El área limitada por el eje *X* y la curva $y=f(x)$, cuando $0\le x\le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

Solución: a) $(0,0)$; $(\ln 3, 0)$; b) $f''(x)=(2+x)e^x$, luego el punto de inflexión es $(2,\ 2e^2-6)$; $f'(x)=e^x(1+x)-3$, por lo que $f'(x)>e^2(3)-3>0$, si $x>2$. c) De $\int -(xe^x-3x)dx = e^x - xe^x + \dfrac{3x^2}{2}$ se deduce que $\int_0^{\ln 3} -(xe^x-3x)dx=\dfrac{3}{2}\ln^2 3-3\ln 3+2=0{,}51459$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. (3 *puntos*).

b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*).

c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 2$. (4 *puntos*).

Solución: a) $\alpha = 4$. b) $2 \neq \alpha \neq 4$. c) $x = \frac{5\lambda}{3} - 4,\ y = \frac{\lambda}{3},\ z = \lambda,$ siendo λ un número real.

Problema B.2. Se dan las rectas $r \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 10 \end{cases}$ y $s \begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + z = 13 \end{cases}$.

<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Un vector director de cada recta (2 *puntos*) y la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (2 *puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r*. (3 *puntos*).

c) La distancia entre las rectas *r* y *s*. (3 *puntos*).

Solución: a) Vectores dirección son $(1, 1, 0)$ y $(1, -1, 0)$. Las rectas se cruzan, pues no se cortan y no son paralelas. b) $z = 5$. c) 5 (es suficiente con observar que coincide con la distancia 5 entre los dos planos paralelos que las contienen, $z = 10$ y $z = 5$).

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

<u>Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 *punto*).

b) El total que cobra la empresa VR si viajan $60 + x$ pasajeros, siendo $0 \leq x \leq 20$. (4 *puntos*).

c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 *puntos*).

Solución: a) 48190; 49000; 48000. b) $(60 + x)(800 - 10x)$. c) La derivada de la expresión obtenida en b) es $200 - 20x$, que es positiva en $[0, 10[$ y negativa en $]10, 20]$. Por tanto el número de pasajeros que maximiza la cantidad abonada a la compañía es 60+10 = 70 pasajeros.