TEMA 1 Sistemas de Ecuaciones. Método de Gauss

1. Sistemas con más incógnitas que ecuaciones.

Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+y-2z=3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y-z+w=1 \\ 2x+y+2z-w=2 \end{cases}$

Para convertir cada sistema en otro con el mismo numero de ecuaciones que de incógnitas, pasaremos al segundo miembro tantas incógnitas como sea necesario.

Cada sistema se resuelve en función de esas incógnitas, a las que llamamos parámetros (variable que puede tomar cualquier valor real). Para cada valor que demos a los parámetros obtendremos una solución.

Estos sistemas nunca tienen solución única. Pueden tener infinitas soluciones o no tener ninguna.

a) Pasamos la z al segundo miembro para que el sistema tenga tantas ecuaciones como incógnitas y llamamos $z=\lambda$:

$$\begin{cases} x+3y=1+z \\ 2x+y=3+2z \end{cases} \xrightarrow[(2^a)]{-2\cdot(1^a)} \begin{cases} -2x-6y=-2-2\lambda \\ 2x+y=3+2\lambda \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos: $y=-\dfrac{1}{5}$

Sustituimos z e y en la primera ecuación para obtener x: $\longrightarrow$ $x+3\left(-\dfrac{1}{5}\right)=1+\lambda$

$$x=1+\frac{3}{5}+\lambda=\frac{8}{5}+\lambda$$

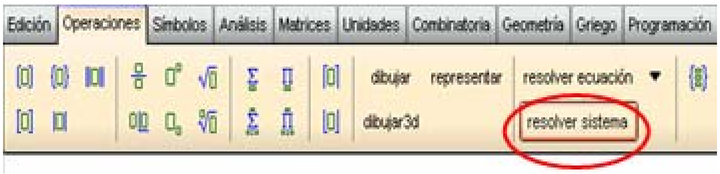
Las soluciones del sistema son $\left(\dfrac{8}{5}+\lambda,-\dfrac{1}{5},\lambda\right)$. Para cada valor de λ obtenemos una solución.

Comprobación: $$\begin{cases} \dfrac{8}{5}+\lambda+3\left(-\dfrac{1}{5}\right)-\lambda=\dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{5}=1 \\ 2\left(\dfrac{8}{5}+\lambda\right)+\left(-\dfrac{1}{5}\right)-2\lambda=\dfrac{16}{5}-\dfrac{1}{5}=3 \end{cases}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

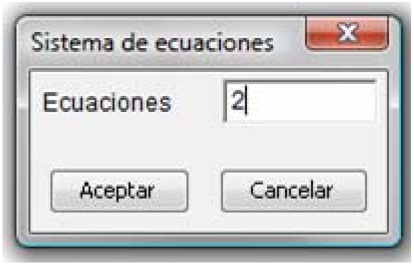
1. Hacemos “clic” sobre el botón <<resolver sistema>> tal y como aparece en la Figura 1:

Figura 1.



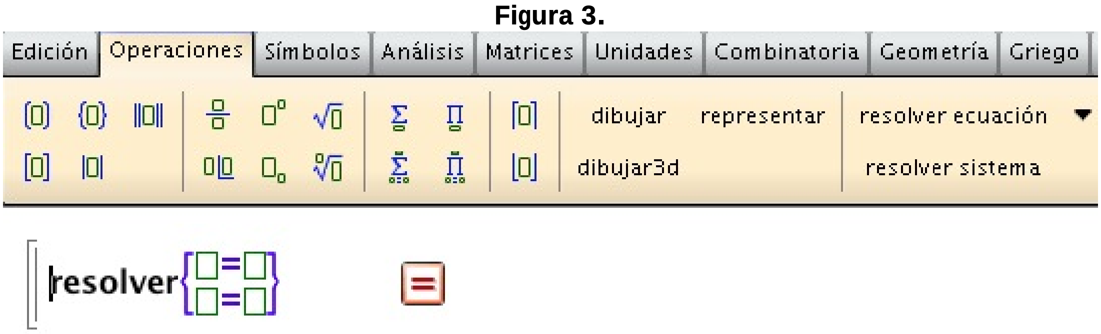
2. Indicamos el número de ecuaciones de nuestro sistema y hacer “clic” en aceptar. En nuestro ejemplo indicamos que el sistema tiene dos ecuaciones:

Figura 2.



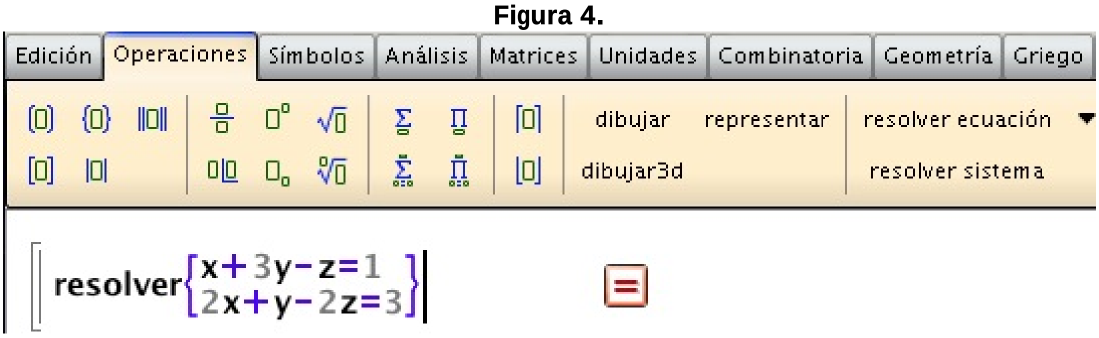
3. Tras pulsar aceptar, nos saldrá lo que aparece en la Figura 3:

Figura 3.



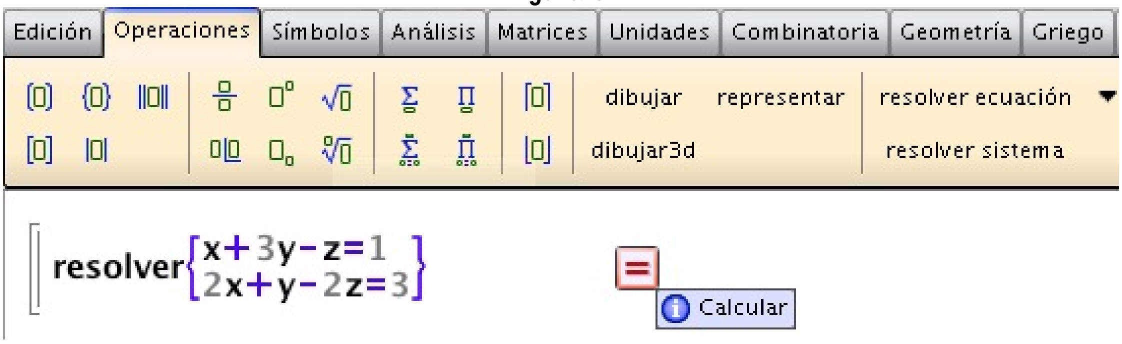
4. Pasamos a rellenar los rectángulos con los datos de nuestro sistema:

Figura 4.



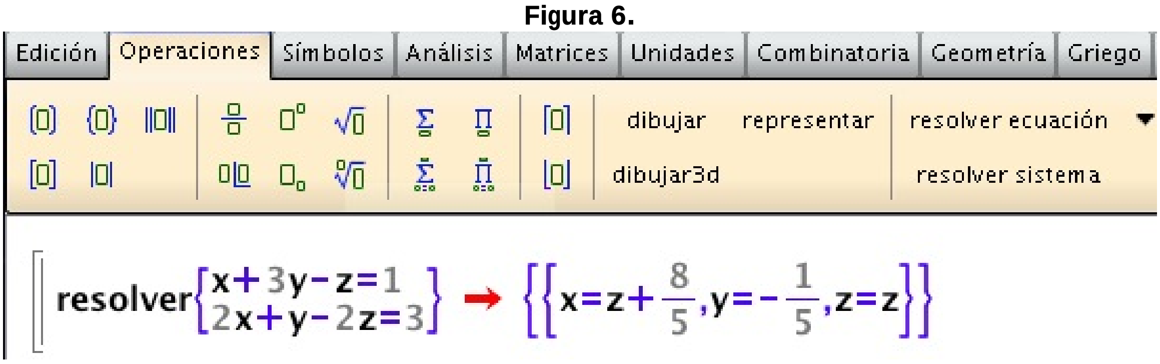
5. Para obtener el resultado de nuestro sistema hacemos "clic" en el igual:

Figura 5.



6. Hecho todo esto obtendremos la solución:

Figura 6.



Al resolver este sistema con Wiris la solución es la misma, solamente indicar que en vez de expresar el resultado en función del parámetro landa queda expresado en función de z.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

b) Para resolver el sistema, es necesario pasar dos incógnitas al segundo miembro:

$$\begin{cases} x+y=1+z-w \\ 2x+y=2-2z+w \end{cases}$$

Hacemos $z=\lambda, w=\mu$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} -x-y=-1-\lambda+\mu \\ 2x+y=2-\lambda+\mu \end{cases}$

Sumando, obtenemos:

$x=1-3\lambda+2\mu$ $\qquad$ $y=1+\lambda-\mu-1+3\lambda-2\mu=4\lambda-3\mu$

Por lo que las soluciones son: $(1-3\lambda+2\mu, 4\lambda-3\mu, \lambda, \mu)$

Dando valores a λ y μ, obtenemos las soluciones del sistema, por ejemplo si $\lambda = 1$ y $\mu = 0$, la solución es $(-2,4,1,0)$

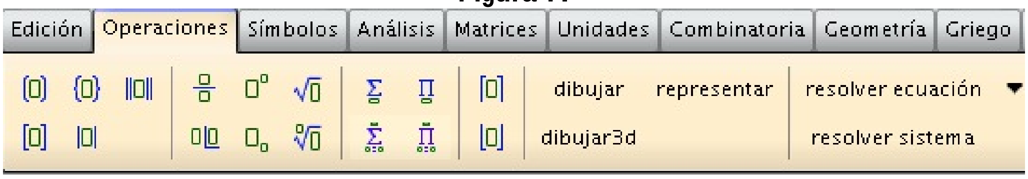
$$Comprobación: \begin{cases} 1-3\lambda+2\mu+4\mu-3\mu-\lambda+\mu=1 \\ 2(1-3\lambda+2\mu)+4\lambda-3\mu+2\lambda-\mu=2 \end{cases}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

Los pasos para resolver este sistema son los mismo que para el apartado a).

1. Hacemos "clic" sobre la pestaña <<resolver sistema>>:
2. Indicamos el número de ecuaciones de nuestro sistema y hacer "clic" en aceptar.
3. Rellenamos los rectángulos con los datos de nuestro sistema:

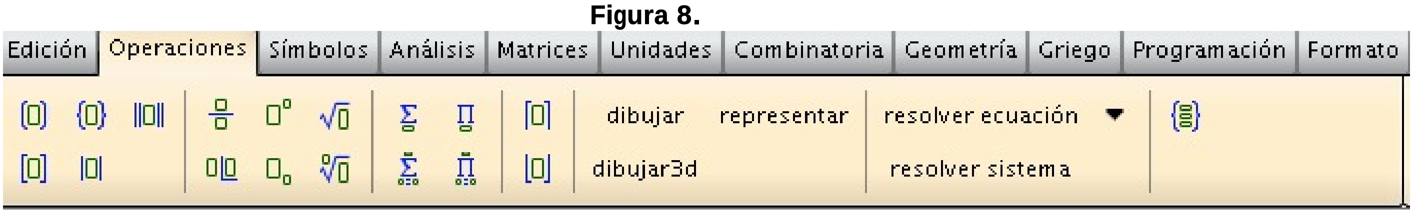
Figura 7.



$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+y-z+w=1 \\ 2x+y+2z-w=2 \end{Bmatrix}$$

4. Pulsamos el igual y obtener la solución:

Figura 8.



$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x+y-z+w=1 \\ 2x+y+2z-w=2 \end{Bmatrix} \rightarrow \left\{\left\{w=\frac{4}{3}\cdot z-\frac{1}{3}\cdot y, x=-\frac{1}{3}\cdot z-\frac{2}{3}\cdot y+1, y=y, z=z\right\}\right\}$$

En la resolución de este ejercicio con Wiris el programa despeja las incógnitas x e y en vez de las incógnitas z y w, algo que da exactamente igual, y es por ello que las soluciones vienen expresadas en función de estas dos variables x e y, sin necesidad de darle a estas variables nombres de letras griegas y teniendo en cuenta que estas soluciones son para todos los valores reales de x e y.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

2. Método de Gauss.

Resuelve e interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y + z = o \\ 2x - y - z = 5 \\ x + 2y + z = -3 \\ 2x - 4y - z = 8 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \\ 5x + 2y + 14z = -9 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

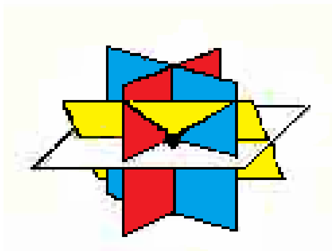
a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a)-2\cdot(1^a) \\ (3^a)-(1^a) \\ (4^a)-2\cdot(1^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-3\cdot(2^a) \\ (4^a)+2\cdot(2^a)\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a)-2\cdot(1^a) \\ (3^a)-(1^a) \\ (4^a)-2\cdot(1^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 5 \\ 9z = -18 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = y - z = -1 + 2 = 1 \\ y = 5 + 3(-2) = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

El sistema representa 4 planos que tienen un punto en común.



La solución es por tanto: $(1, \quad -1, \quad -2)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

Los pasos para resolver este sistema son los mismos que los utilizados en el ejercicio 1. *Sistemas con mas incógnitas que ecuaciones*”:

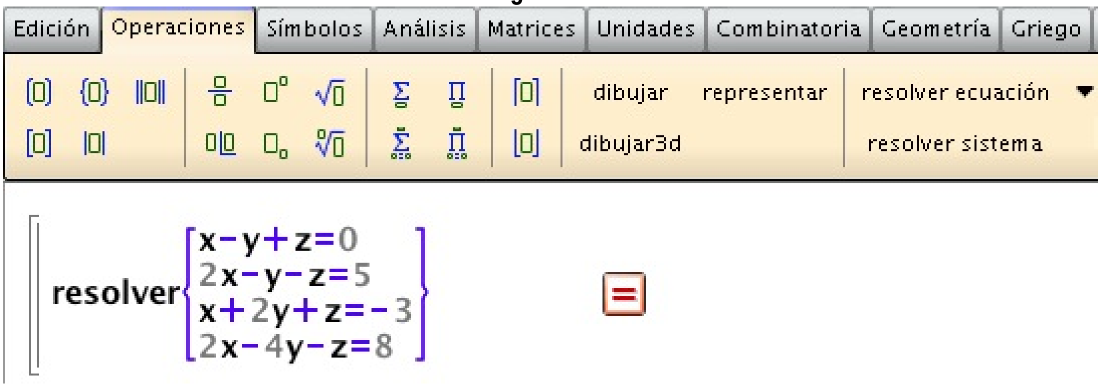
1. Hacemos “clic” sobre la pestaña <<resolver sistema >>:

2. Indicamos el número de ecuaciones de nuestro sistema y hacer “clic” en aceptar. En este caso serían cuatro:

Figura 9.

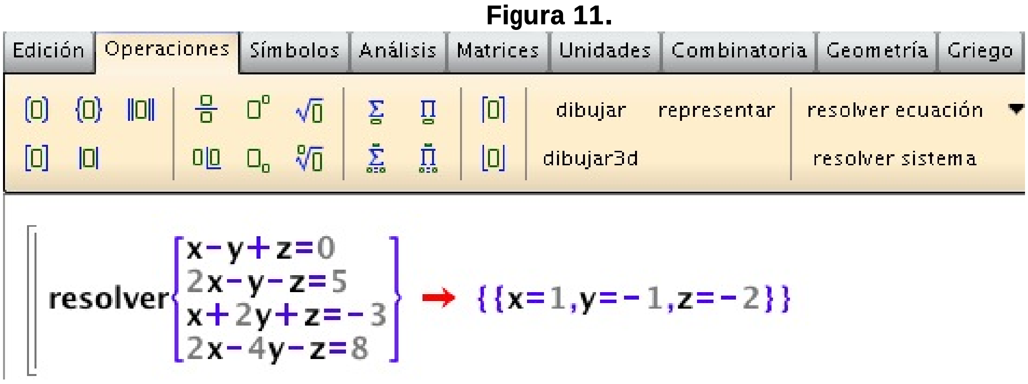
3. Rellenamos los rectángulos con los datos de nuestro sistema:

Figura 10.



4. Pulsamos el botón de igual y obtenemos la solución:

Figura 11.



Es evidente que mediante Wiris solo podemos conocer la solución final del sistema, esto nos permite comprobar que la solución del problema mediante el método de Gauss coincide exactamente con la solución que nos aporta Wiris.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

b) Como ninguno de los coeficientes de las incógnitas es igual a 1, tomamos la primera educación como referencia:

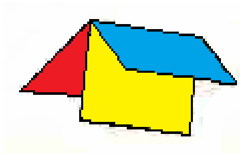
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 14 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c} (1^a) \\ 2\cdot(2^a)-3\cdot(1^a) \\ 2\cdot(3^a)-5\cdot(1^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -13 & 13 \\ 0 & 4 & 13 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)+(2^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ -4y - 13z = 13 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Resolvemos pasando la tercera columna (z) al segundo miembro.

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} z \\ y = -\frac{13}{4} - \frac{13}{4} z \end{array}\right\} \quad \textit{Soluciones:} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda, -\frac{13}{4} - \frac{13}{4}\lambda, \lambda \right)$$

El sistema representa 3 planos que tienen una recta en común.



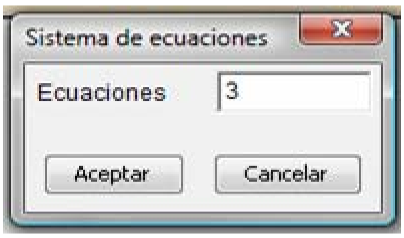
Ahora resolveremos el problema con Wiris:

Los pasos para resolver este sistema son los mismos que venimos utilizando:

1. Hacemos “clic” sobre la pestaña <<resolver problema>>:

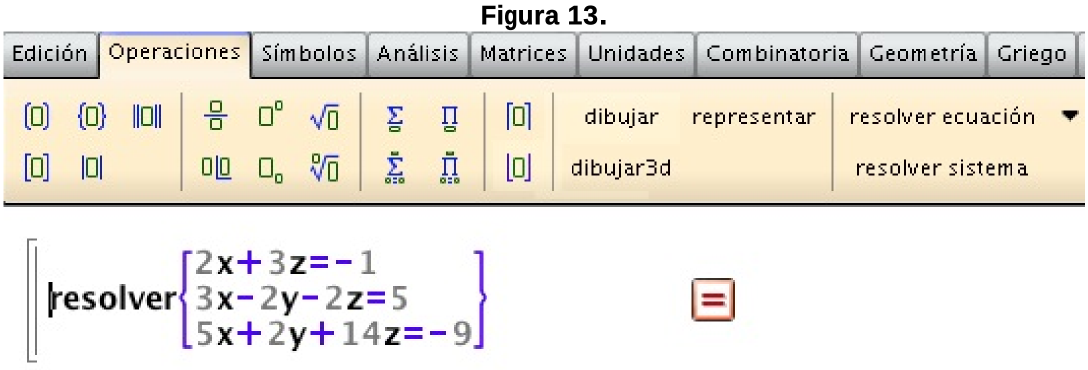
2. Indicamos el número de ecuaciones de nuestro sistema y hacer “clic” en aceptar. En este caso serían tres:

Figura 12.



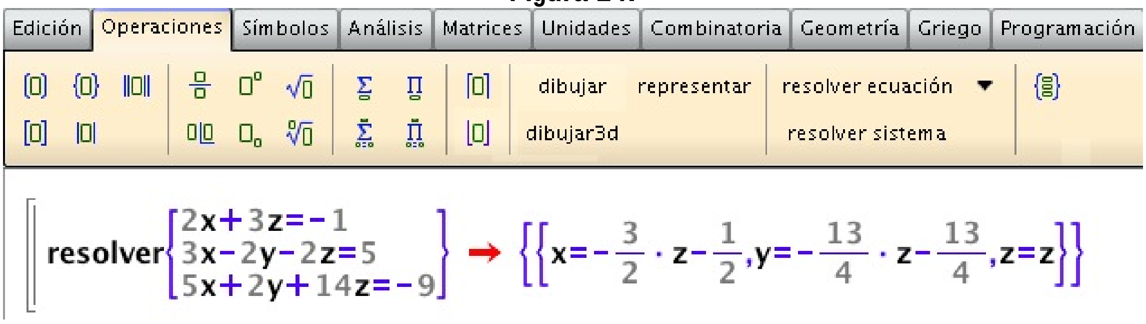
3. Rellenamos los rectángulos con los datos de nuestro sistema:

Figura 13.



4. Pulsamos el igual y obtener la solución:

Figura 14.



Comprobamos que las soluciones de este sistema coinciden tanto con Wiris como mediante el método de Gauss, solo que las soluciones con Wiris vienen expresadas en función de z, con lo cual se considera a z como el parámetro landa.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

c) La primera y la tercera ecuación son contradictorias. El sistema es incompatible. Lo comprobamos aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(1^a) \\ 3\cdot(2^a)-(1^a) \\ (3^a)-(1^a)}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} 3x+2y=6 \\ y=-3 \\ 0x+0y=-6 \end{cases}$$

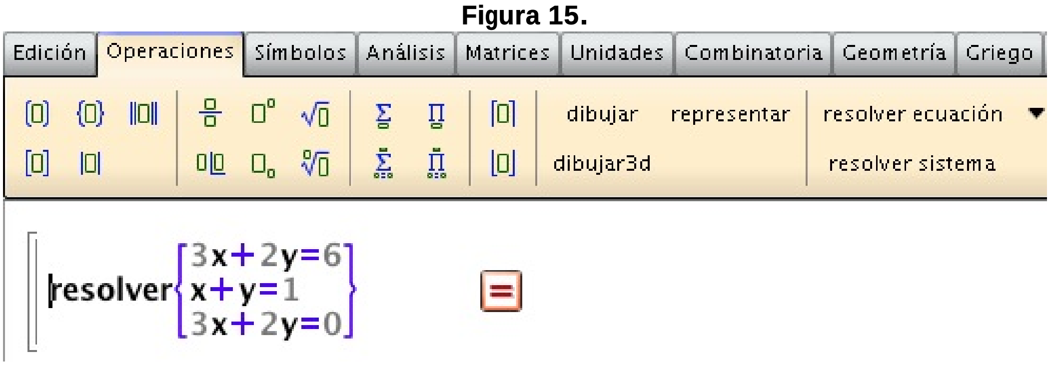
La tercera ecuación no se puede cumplir nunca. El sistema no tiene solución; representa dos rectas paralelas y otra que las corta.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

Los pasos para resolver este sistema son los mismos que venimos utilizando:

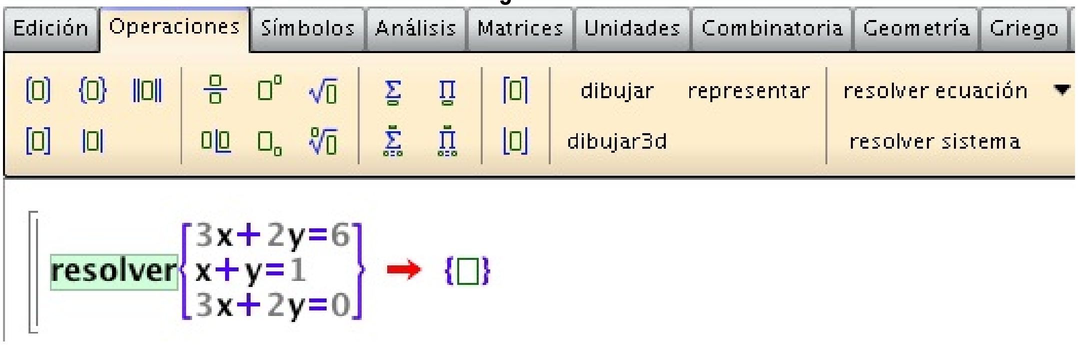
1. Hacemos "clic" sobre la pestaña <<resolver problema>>:
2. Indicamos el número de ecuaciones de nuestro sistema y hacemos "clic" en aceptar.
3. Rellenamos los rectángulos con los datos de nuestro sistema:

Figura 15.



4. Pulsamos el botón de igual y obtenemos la solución:

Figura 16.



Como el sistema es incompatible, Wiris no arroja ninguna solución y solo aparece un rectángulo en blanco.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Discusión de sistemas lineales.

Discute y resuelve estos sistemas en función del parámetro que aparece en ellos:

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+mz=7 \end{array}\right.$ ***b)*** $\left\{\begin{array}{l} x+my=m-1 \\ mx+y=2-2m \end{array}\right.$ ***c)*** $\left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ x-y+az=0 \\ x+ay+z=0 \end{array}\right.$

Pasamos a resolver el primer apartado

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & m & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a)-(1^a) \\ (3^a)-(1^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-2\cdot(2^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 4$, la última fila se puede suprimir. El sistema es *compatible indeterminado*:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ y=2-z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x=3-(2-z)-2z=1-z \\ y=2-z \end{array} \quad \textit{Soluciones: } (1-\lambda, 2-\lambda, \lambda)$$

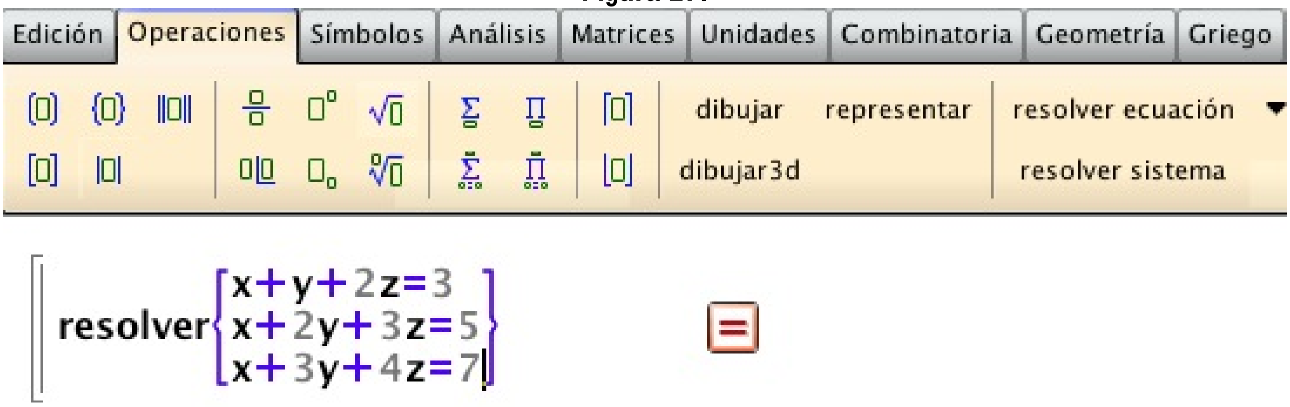
- Si m $\neq 4$, el sistema es *compatible determinado*: $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ (m-4)z=0 \end{array}\right\}$ *Solución* $(1,2,0)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

Este problema hay que hacerlo con Wiris para m=4 y para otro u otro valor de m distinto de 4.

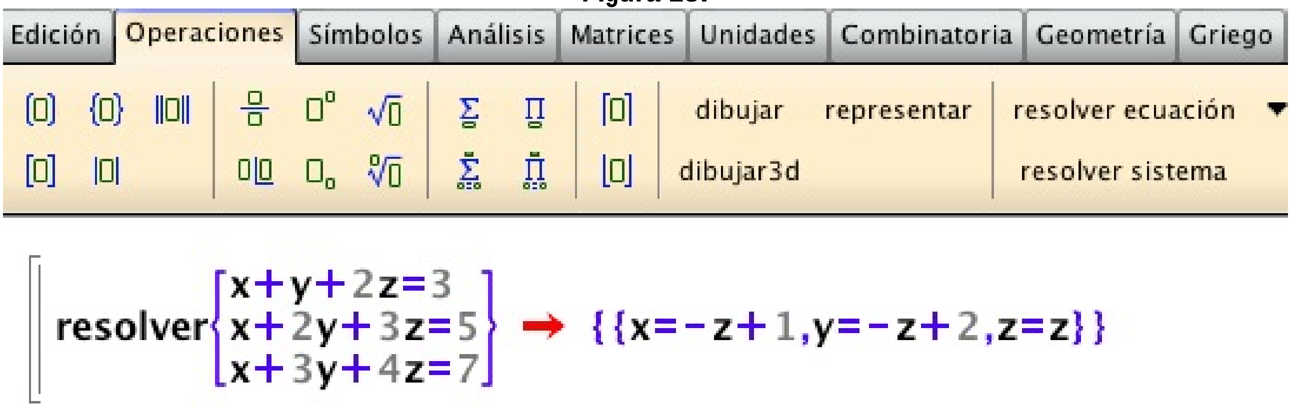
1. De manera análoga a los ejercicios anteriores haremos llegamos a la introducción de los datos del sistema:

Figura 17.



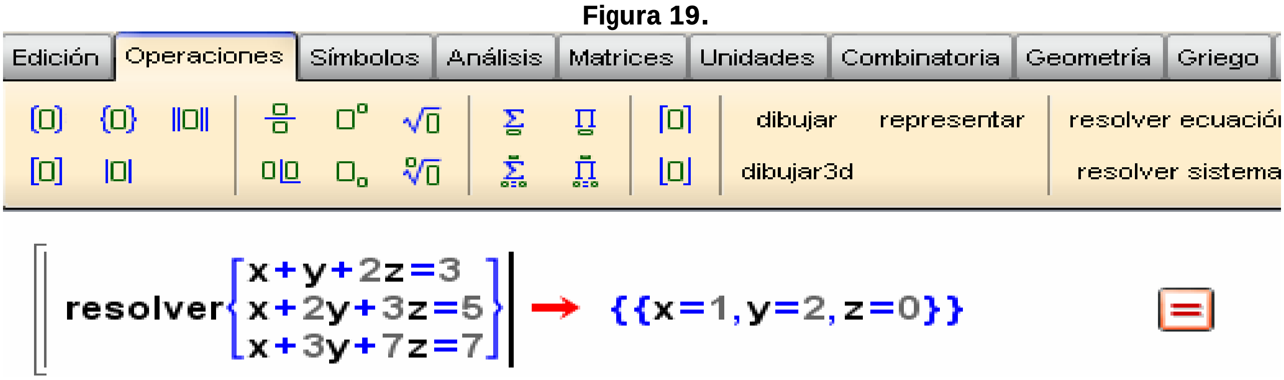
2. Obteniendo la siguiente solución:

Figura 18.



3. Ahora cambiamos el valor de m por 7 en lugar de 4, por ejemplo, de manera que la solución es:

Figura 19.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & m & m & -1 \\ m & 1 & 2 & -2m \end{array}\right) \xrightarrow[(2^a)-m\cdot(1^a)]{(1^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & m & m & -1 \\ 0 & 1-m^2 & -m^2-m & +2 \end{array}\right)$

Hallamos los valores que anulan el coeficiente de la y en la segunda ecuación: $1-m^2=0$ y se obtiene que se cumple para el caso de $m=\pm 1$

- Si $m=-1$, la segunda ecuación será $0\cdot y=2$. El sistema es *incompatible*
- Si $m=1$, la segunda ecuación será $0\cdot y=0$. Se puede suprimir. El sistema es *compatible indeterminado*. Solo nos queda la ecuación $x+y=0$. Que resolvemos considerando la y como parámetro. Las soluciones son: $(-\lambda,\lambda)$
- Si $m\neq\pm 1$, el sistema es *compatible determinado*. Para cada valor de m tenemos un sistema distinto con solución única:

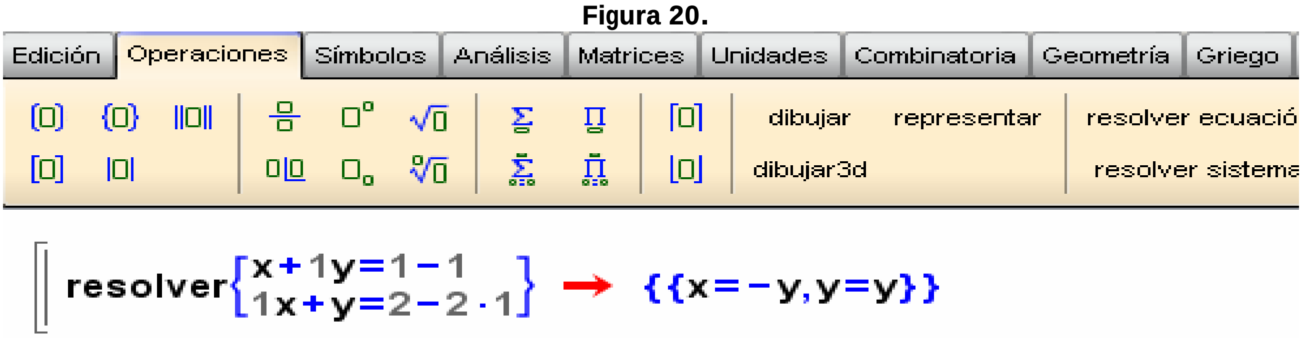
$$\left(\frac{2m^2-m-1}{1-m^2}, \quad \frac{-m^2-m+2}{1-m^2}\right)$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este apartado, calcularemos los resultados, para tres valores de m. Esto lo haremos sustituyendo el valor donde aparezca la incógnita y entonces, dentro de la pestaña 'Operaciones' pincharemos en 'Resolver sistema', indicaremos en este caso que nuestro sistema tiene dos ecuaciones, las rellenaremos y pulsaremos el botón de igual para obtener nuestro resultado:

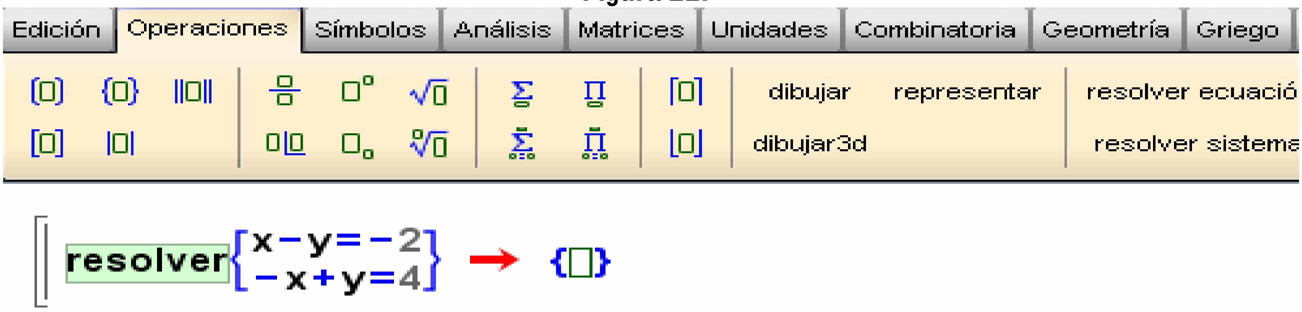
***Sustituimos m por 1:**

Figura 20.



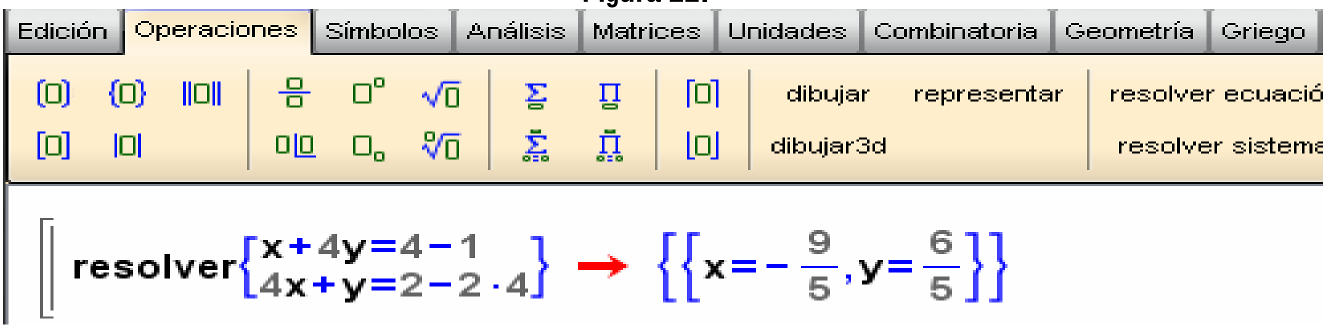
*** Sustituimos m por -1:**

Figura 21.



*** Sustituimos m por un número distinto de 1 y -1:**

Figura 22.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a)-(1^a) \\ (3^a)-(1^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)+a\cdot(2^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+a+2 & 0 \end{array}\right)$

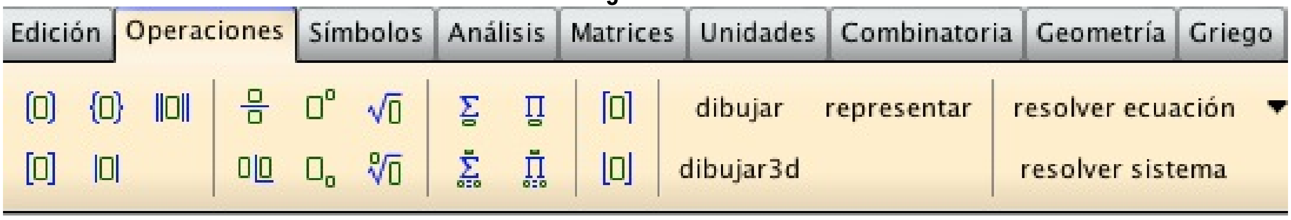
Como la ecuación $a^2+a+2=0$ no tiene solución, el sistema siempre es *compatible determinado*. Para cada valor de a tenemos un sistema distinto con solución única, que es $(0,0,0)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Tomaremos dos valores para a, que sustituiremos en el sistema, y con ellos veremos que soluciones obtenemos.

*** Para a= 1:**

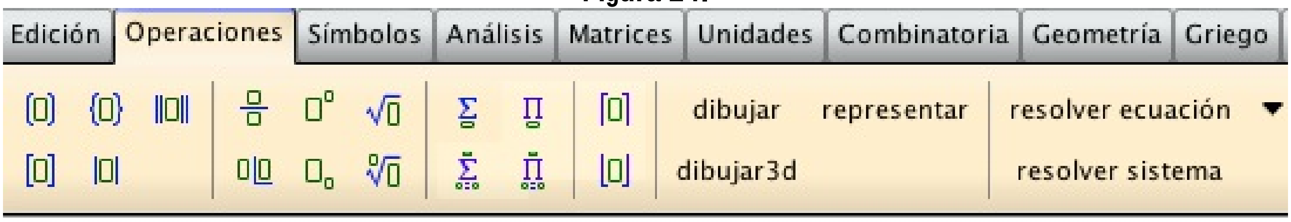
Figura 23.



$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=0, y=0, z=0\}\}$$

*** Para a= -1:**

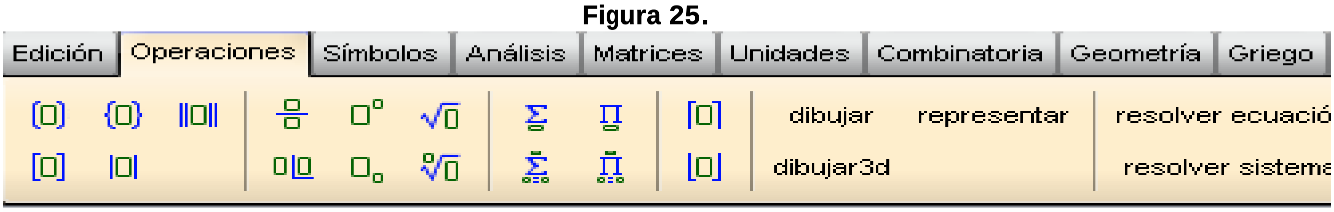
Figura 24.



$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=0, y=0, z=0\}\}$$

*** Para a= 2:**

Figura 25.



$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=0, y=0, z=0\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

4. Problema de enunciado.

	A	B	C
P	5	3	4
Q	2	5	5
R	4	3	6

Una compañía tiene tres camiones (P, Q y R), en los que caben exactamente un número de contenedores de tres tipos (A, B y C) de acuerdo con la tabla siguiente:

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿Cuántos viajes han de hacer cada camión si todos los viajes los hacen completamente llenos?

Sean X, Y, Z el número de viajes que hacen los camiones P, Q, R, respectivamente:

$$\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 3x + 5y + 3z = 44 \\ 4x + 5y + 6z = 58 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 3 & 5 & 3 & 44 \\ 4 & 5 & 6 & 58 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ 5(2^a) - 3(1^a) \\ 5(3^a) - 4(1^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 17 & 14 & 110 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ 19(3^a) - 17(2^a)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 0 & 215 & 645 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 19y + 3z = 85 \\ 215z = 645 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema escalonado:

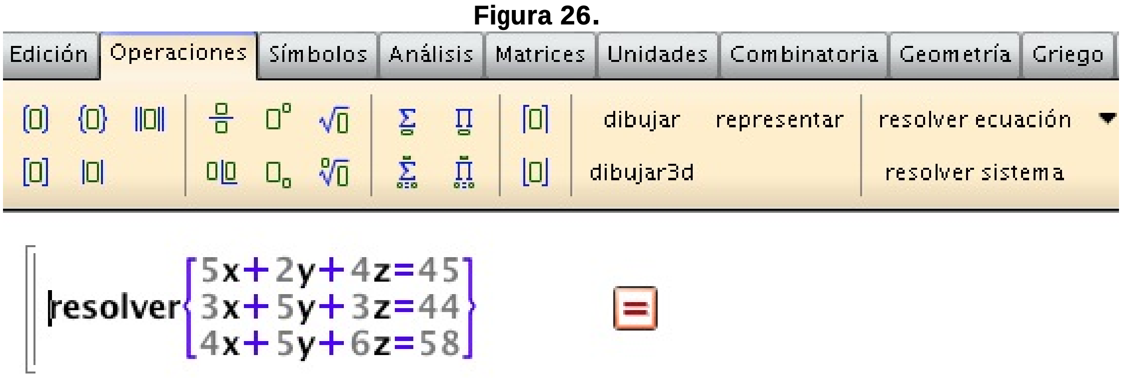
$$\begin{cases} z = 3 \\ y = \dfrac{85 - 3z}{19} = \dfrac{85 - 9}{19} = 4 \\ x = \dfrac{45 - 2y - 4z}{5} = \dfrac{45 - 8 - 12}{5} = 5 \end{cases}$$

Por tanto, el camión P debe hacer 5 viajes, el camión Q debe hacer 4 viajes y el camión R debe hacer 3 viajes.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

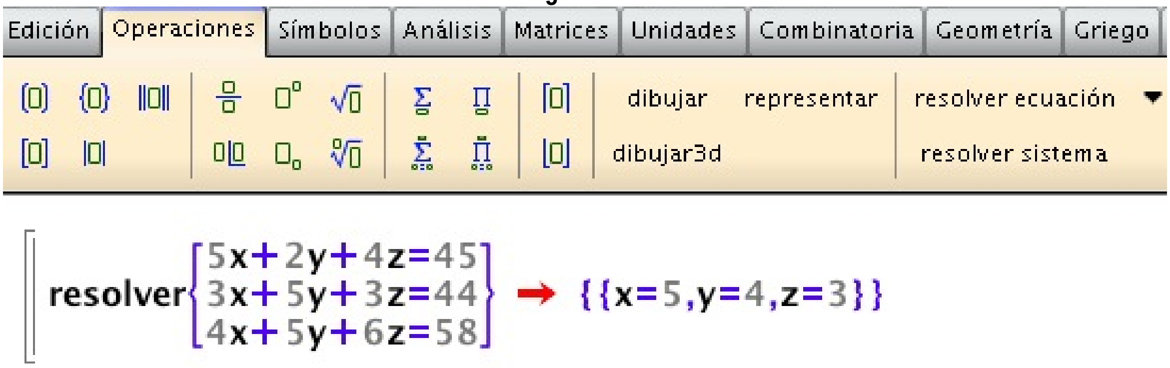
1. Al igual que con los ejercicios anteriores, pinchamos en resolver sistema e introducimos los datos:

Figura 26.



2. De esta forma, pinchando en botón de igual, obtenemos el resultado que coincide con el ejercicio resuelto

Figura 27.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

5. Añadir una ecuación a un sistema de ecuaciones.

Dado el sistema: $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$

a) ¿Cómo ha de ser la ecuación que hay que añadirle para que sea incompatible?

b) ¿Y para que sea compatible indeterminado?

a) Una ecuación que haga el sistema incompatible ha de ser de la forma:

$a(2x - y + 2z) + b(x + y - z) = k$ con $k \neq a + 3b$ Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$: $3x + z = 7$

b) un sistema será compatible indeterminado si la ecuación es de la forma:

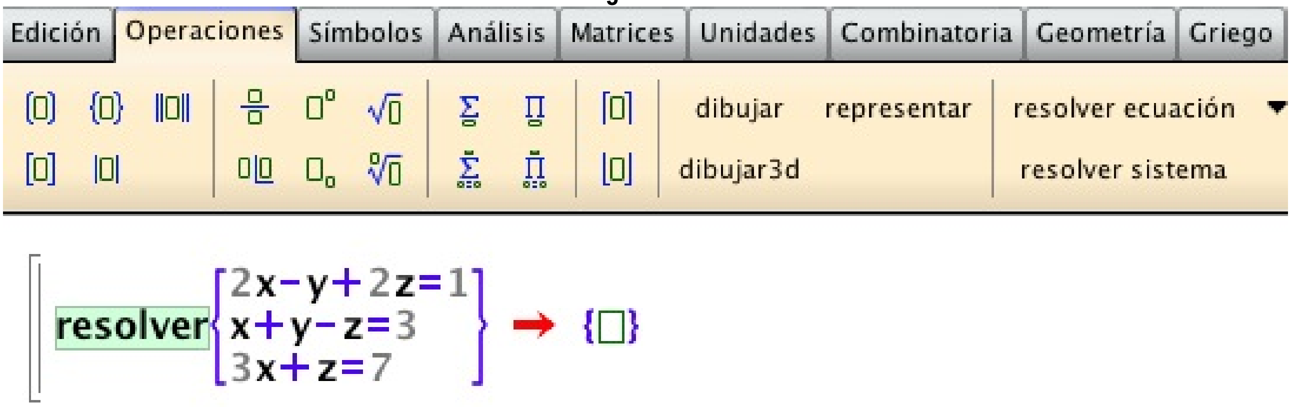
$a(2x - y + 2z) + b(x + y - z) = a + 3b$ Por ejemplo, $(a = 1, b = 1)$: $3x + z = 4$

Para ello se resolverá con Wiris añadiéndole la ecuación $3x + z = 7$ y la ecuación $3x + z = 4$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

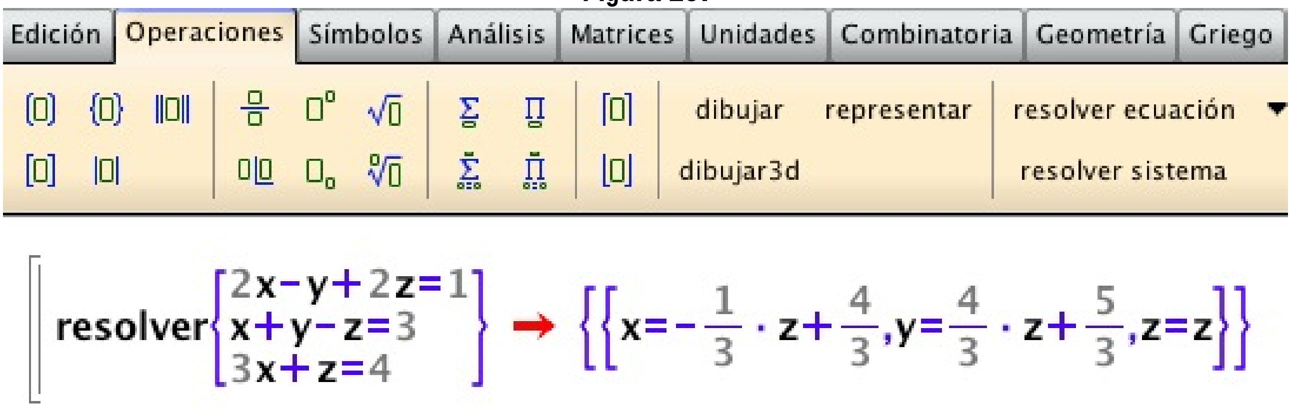
1. Para comprobar que al añadir la ecuación $3x + z = 7$, nuestro sistema sea incompatible, lo planteamos como ya hemos visto y pulsamos igual, obteniendo:

Figura 28.



2. Ahora, para comprobar que al añadir la ecuación $3x + z = 4$, el sistema es compatible indeterminado, y ver qué soluciones obtenemos, lo resolveremos en Wiris como en la figura 29:

Figura 29.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web: