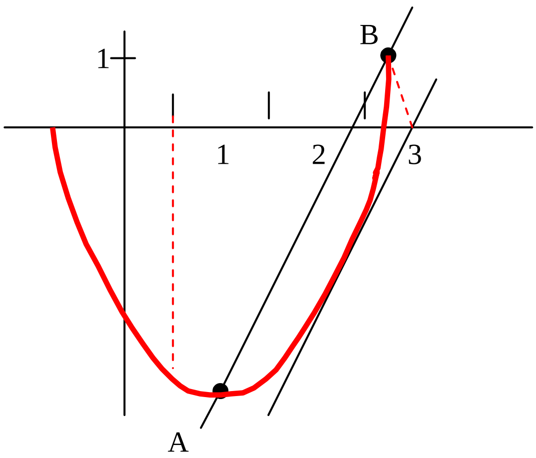
TEMA 10 Aplicaciones de la derivada

1. Recta tangente.

Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 2$ se traza la cuerda que une los puntos de la parábola de abscisas x = 1 y x = 3. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.



Hallamos los extremos de la cuerda: $\begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = -3 & A(1,-3) \\ x_2 = 3 \rightarrow y_2 = 1 & B(3,1) \end{cases}$

Pendiente de la cuerda: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4}{2} = 2$

La pendiente de la tangente $f'(x_0)$ debe ser igual a la de la cuerda:

$f'(x_0) = 2x_0 - 2 = 2 \rightarrow x_0 = 2 \rightarrow f(x_0) = -2$

La tangente en el punto (2, -2) es paralela a la cuerda que une los puntos A y B.

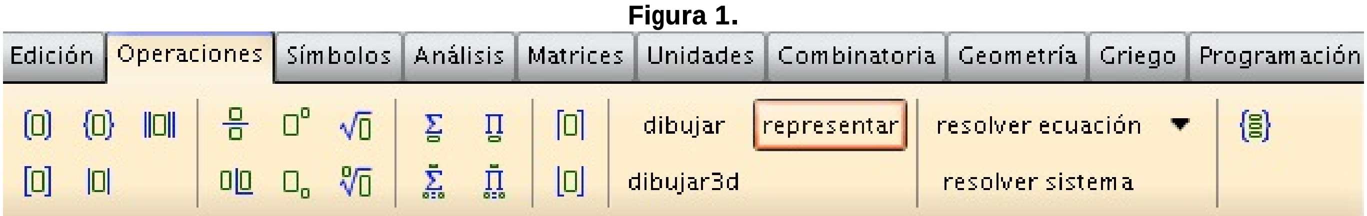
Su ecuación, en forma punto-pendiente, es: $y = -2 + 2(x-2) \rightarrow y = 2x - 6$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio representaremos la parábola y su tangente. Para ello:

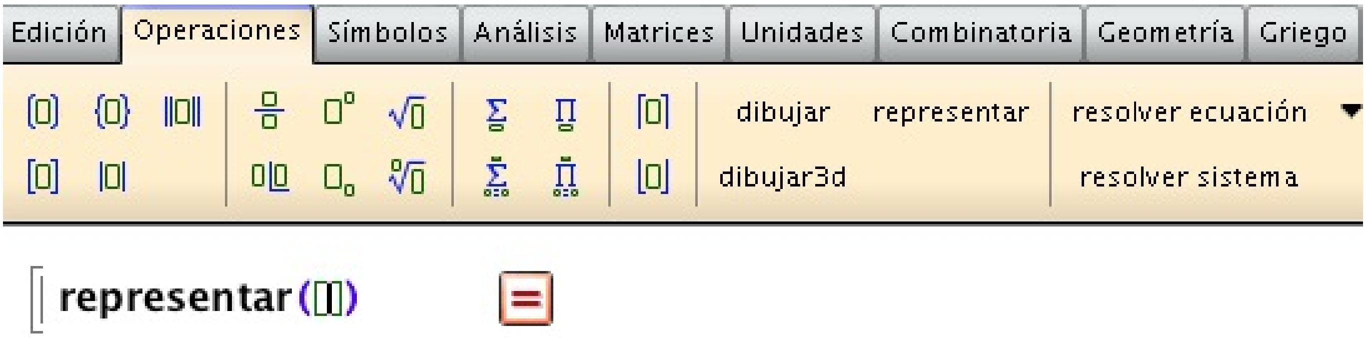
   - Pinchamos en la pestaña Operaciones, y a continuación, en Representar.

Figura 1.



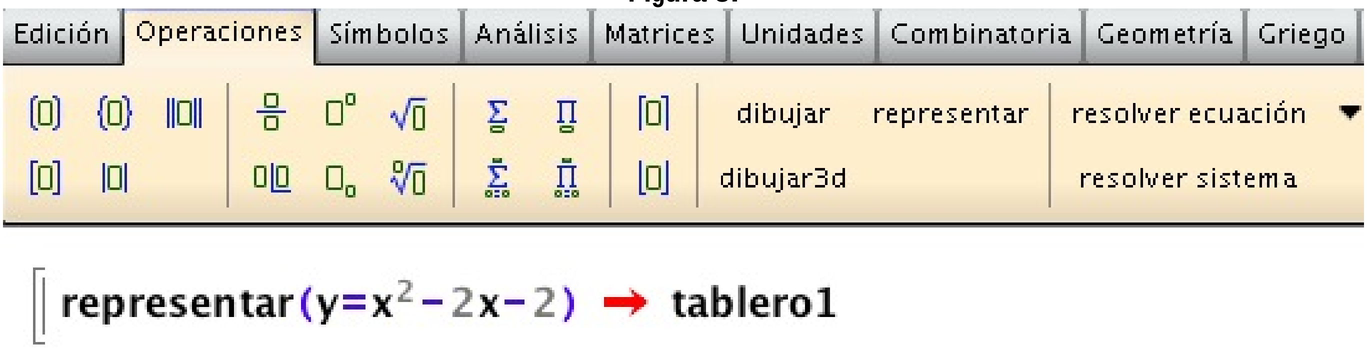
   - A continuación, obtendremos:

Figura 2.



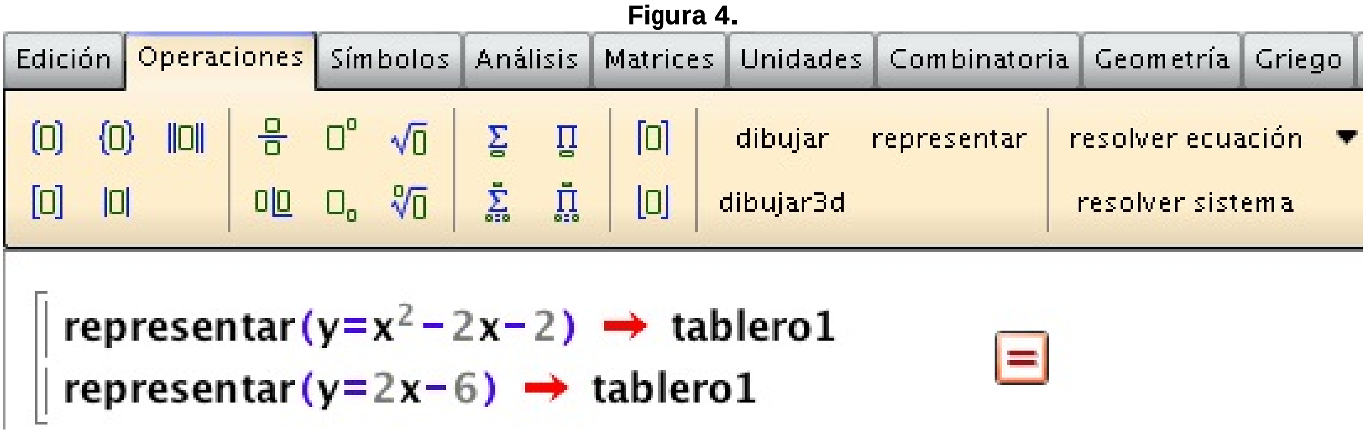
- Por último, último, escribimos la función entre los paréntesis.

Figura 3.



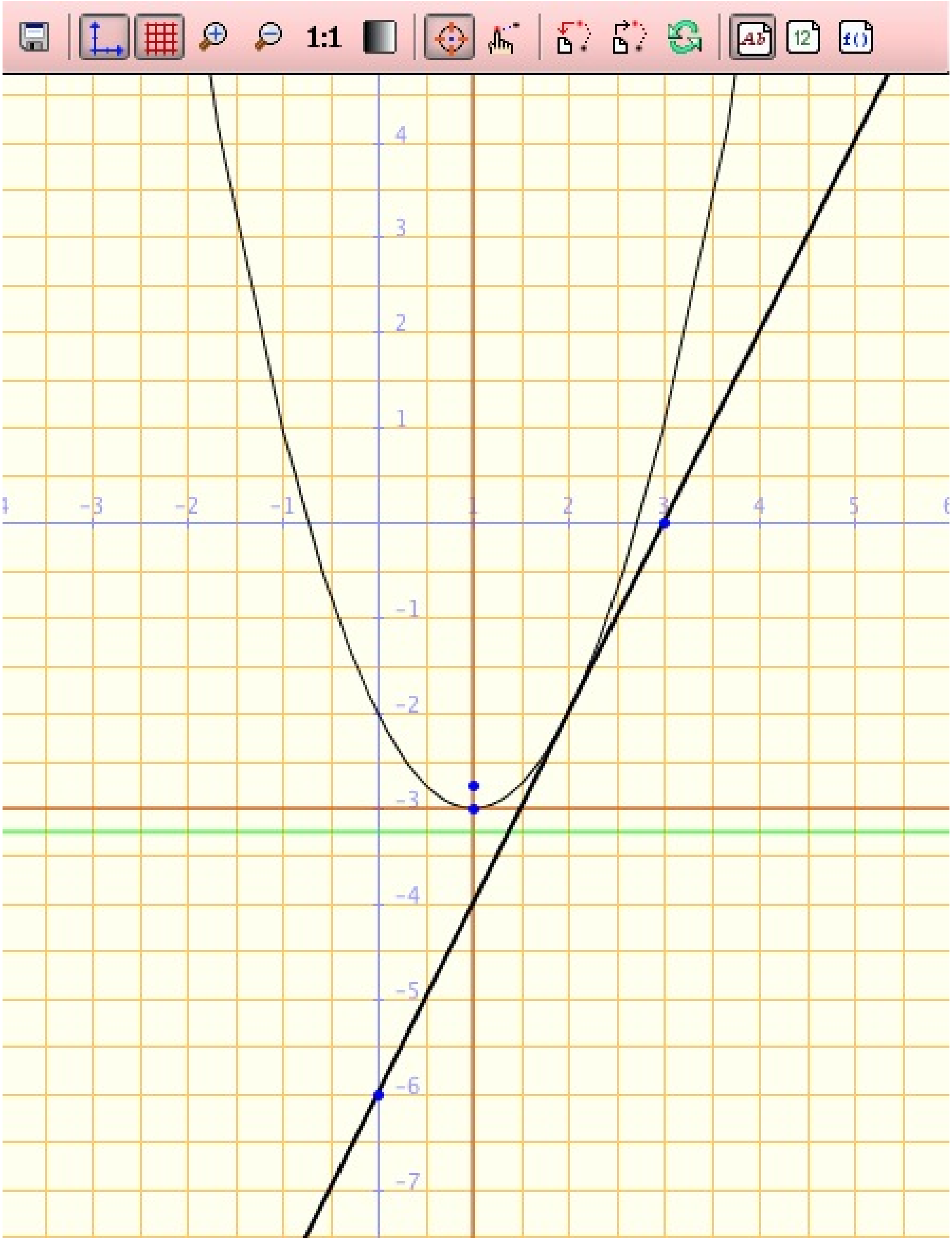
- Para adjuntar la recta tangente, seguiremos los mismos pasos que para la parábola, y pulsamos igual; para que aparezca en el tablero 1 la tenemos que escribir dentro del mismo bloque:

Figura 4.



- Por último obtenemos la representación gráfica:

Figura 5.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

2. Recta tangente.

Halla los puntos de la gráfica de $f(x)=x^3-3x^2+x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}rad$ con el eje de abscisas.

Si la recta tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}rad$ con el eje de abscisas, su pendiente es $tg\frac{\pi}{4}=1.$ Por tanto:

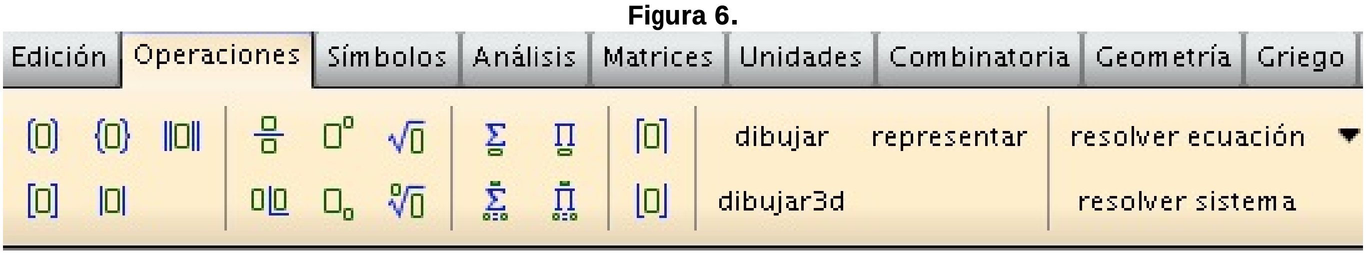
$$f'(x)=1 \rightarrow 3x^2-6x+1=1 \rightarrow 3x^2-6x=0 \rightarrow x=0, \quad x=2$$

Los puntos buscados son (0, 0) y (2, -2), y las ecuaciones de las tangentes en esos puntos, $y=x$ e $y=x-4.$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para obtener la gráfica de las tres funciones, escribimos representar y la función entre paréntesis. Para que las tres estén en la misma gráfica, las escribimos en el mismo bloque:

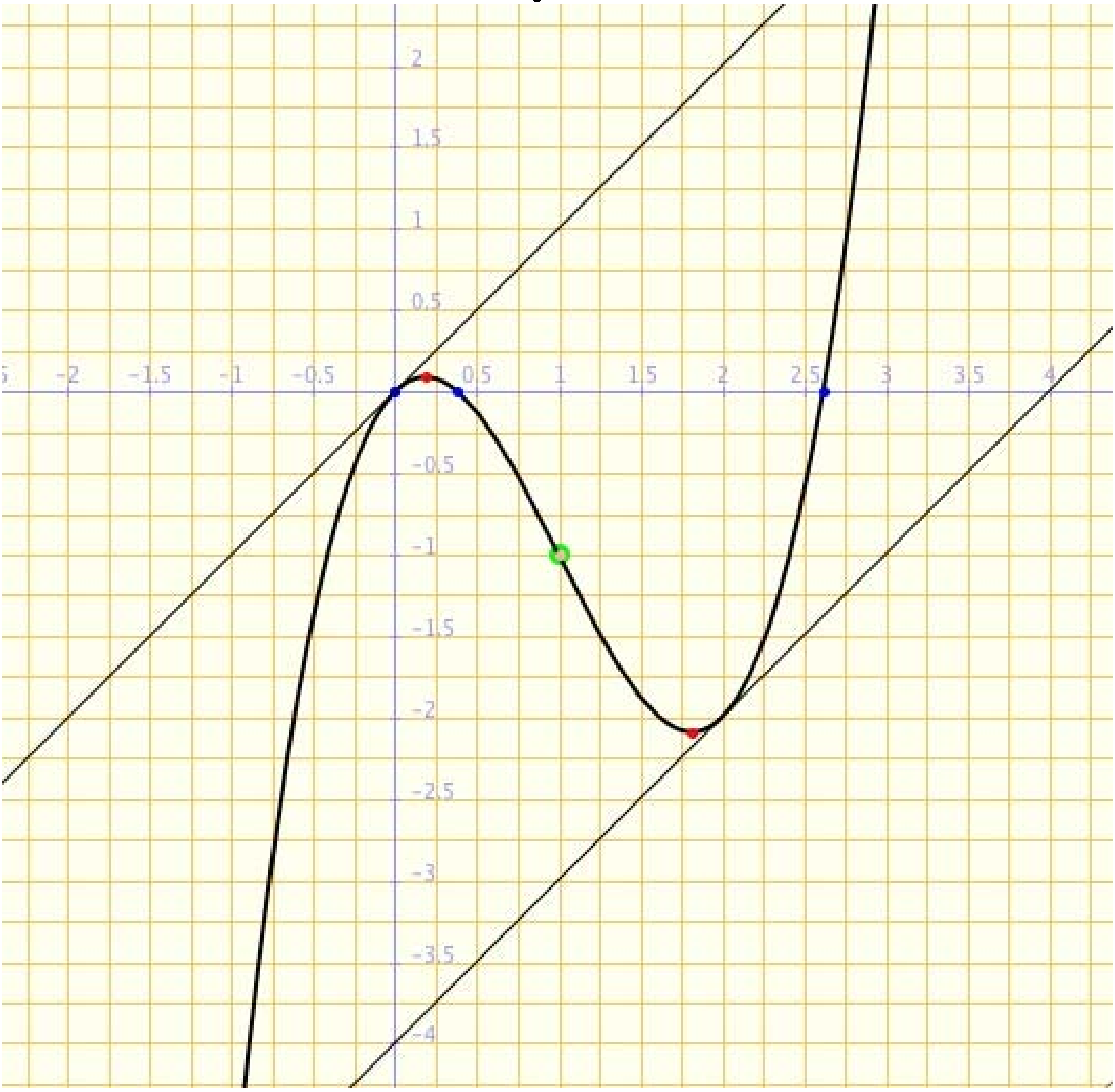
Figura 6.




```
representar(y=x^3-3x^2+x) → tablero1
representar(y=x) → tablero1
representar(y=x-4) → tablero1
```

2. Pulsamos igual y obtenemos la representación de la ecuación con sus dos tangentes:

Figura 7.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Recta tangente.

Si P es un punto cualquiera de la gráfica de $xy = 1$***, prueba que el triangulo formado por la recta OP, la tangente a esa gráfica en P y el eje y = 0 es isósceles.***

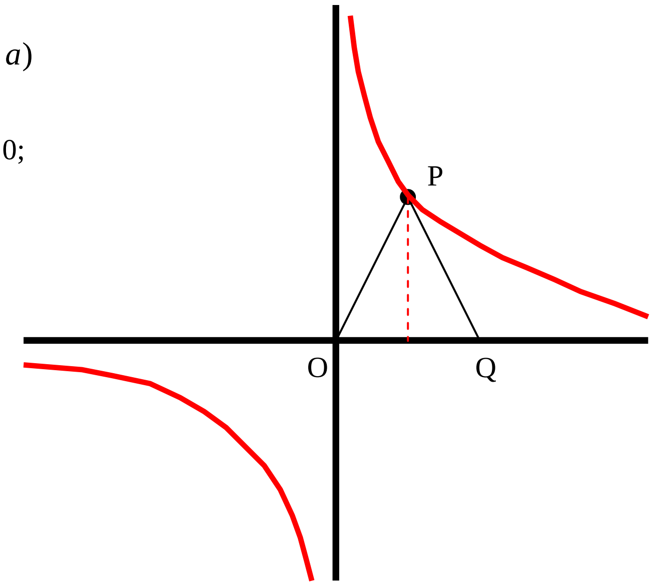
Un punto cualquiera de la curva $y = \dfrac{1}{x}$ tiene por coordenadas $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$.

- Tangente en P: $m = f'(a) = -\dfrac{1}{a^2} \rightarrow y = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}(x-a)$

- Hallamos el punto de corte de la tangente con el eje y = 0;

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) = 0 \rightarrow x = 2a \rightarrow Q = (2a,0)$$

- Calculamos la longitud de los lados de un triangulo:



$$|OP| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4+1}}{a}$$

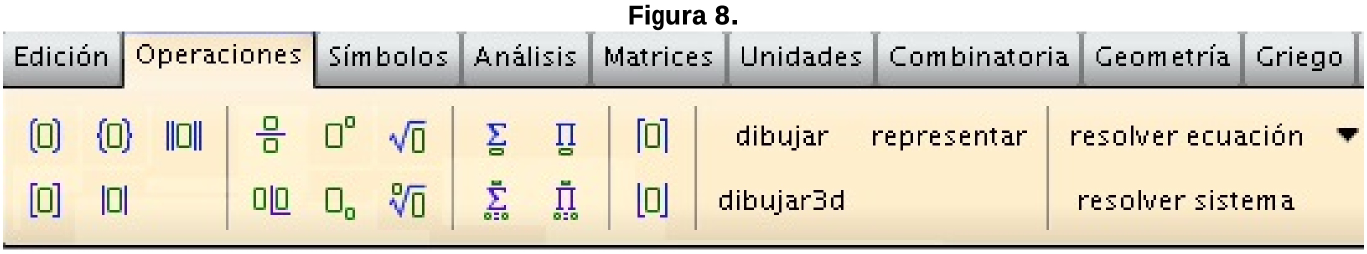
$$|PQ| = \sqrt{(2a-a)^2 + \left(0 - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4+1}}{a}$$

Como $|OP| = |PQ|$, el triángulo OPQ es isósceles.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar resolvemos las dos raíces donde calculamos la longitud de los lados del triangulo:

Figura 8.



$$\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2} \rightarrow \sqrt{\frac{a^4+1}{a^2}}$$

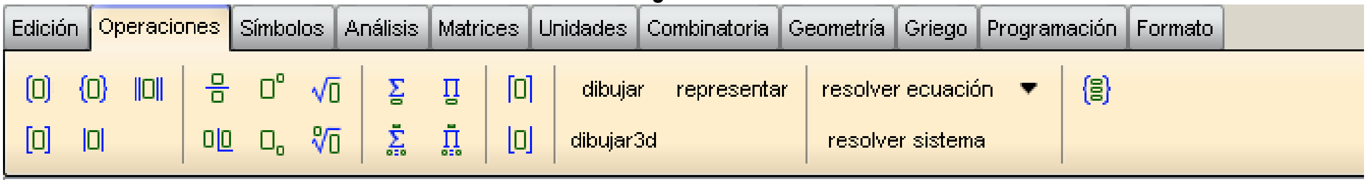
$$\sqrt{(2a-a)^2+\left(0-\frac{1}{a}\right)^2} \rightarrow \sqrt{\frac{a^4+1}{a^2}}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

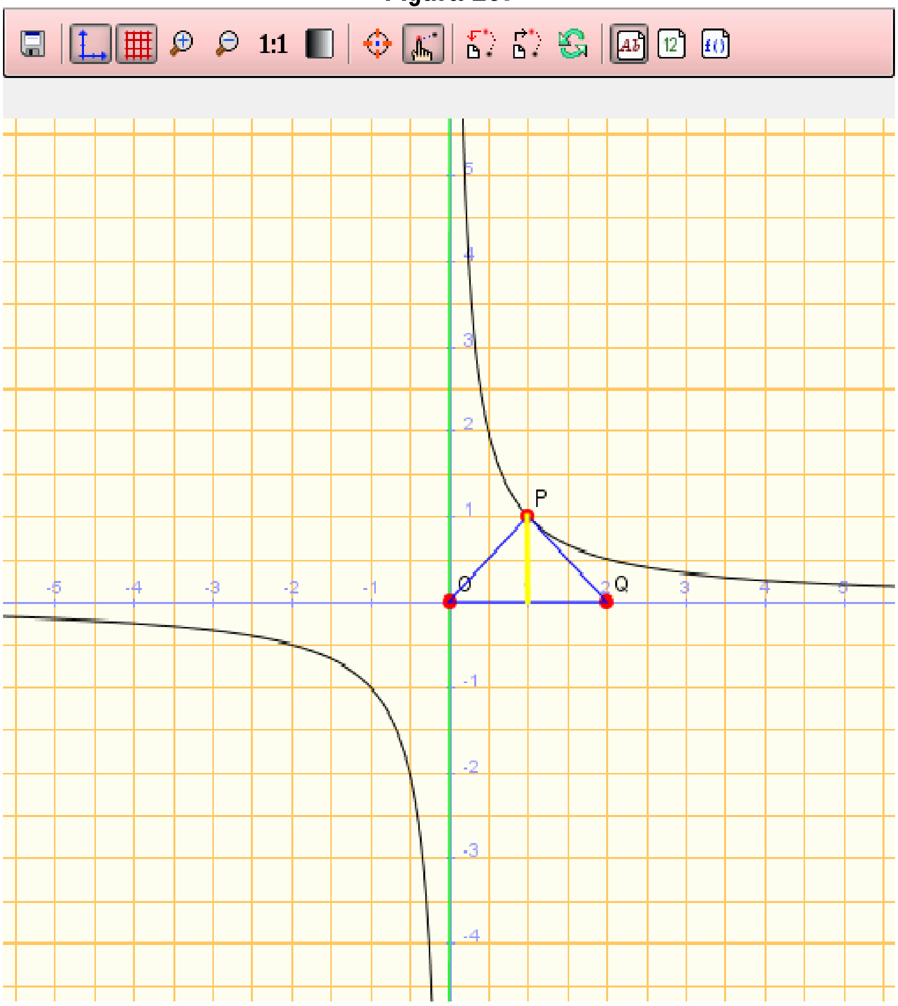
2. A continuación se representa la figura estudiada.

Figura 9.




```
representar (x·y=1)
Q:=punto(2,0)
dibujar(Q,{color=rojo,tamaño_punto=8,mostrar_etiqueta=cierto})
O:=punto(0,0)
dibujar(O,{color=rojo,tamaño_punto=8,mostrar_etiqueta=cierto})
P:=punto(1,1)
dibujar(P,{color=rojo,tamaño_punto=8,mostrar_etiqueta=cierto})
T=triangulo(P,Q,O)
dibujar(T, {color=azul})
PQ=segmento(P,punto(1,0))
dibujar(PQ,{color=amarillo,anchura_línea=3})
```

Figura 10.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

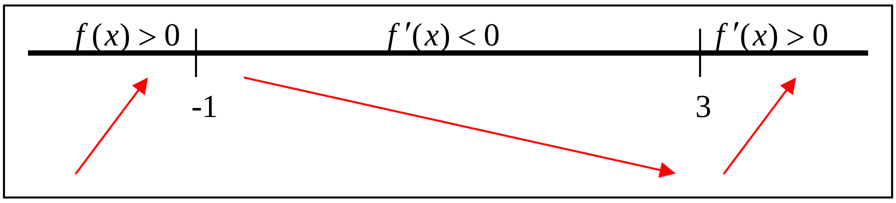
4. Intervalos de crecimiento.

Estudia los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones y di cuales son sus máximos y sus mínimos:

$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ $\qquad c)\ f(x) = e^x (x^2 - 3x + 1)$

a) f es creciente en los intervalos donde $f' > 0$ y decreciente si $f' < 0$. Buscamos los puntos donde se anula la derivada, $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3$ Estudiamos el signo de la derivada:



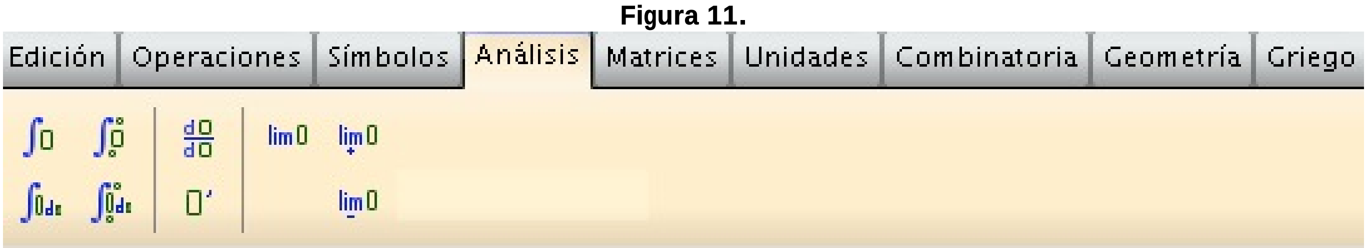
La función crece en $(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ y decrece en (-1, 3).

Tiene un máximo en x = -1 y un mínimo en x = 3. Máximo: $(-1,6)$. Mínimo: $(3,-26)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Lo primero que debemos hacer es derivar, para lo que tenemos que escribir la función entre paréntesis y escribir un apóstrofe. Después pulsamos igual y obtenemos:

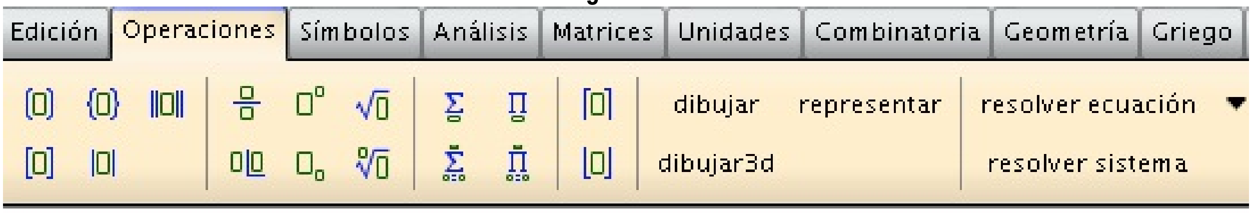
Figura 11.



$$(x^3 - 3x^2 - 9x + 1)' \rightarrow 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 9$$

2. Igualamos el resultado de la derivada a 0 y resolvemos la ecuación. Para ello escribimos ‘resolver’ y la ecuación entre paréntesis, luego pulsamos igual y obtenemos los dos resultados:

Figura 12.

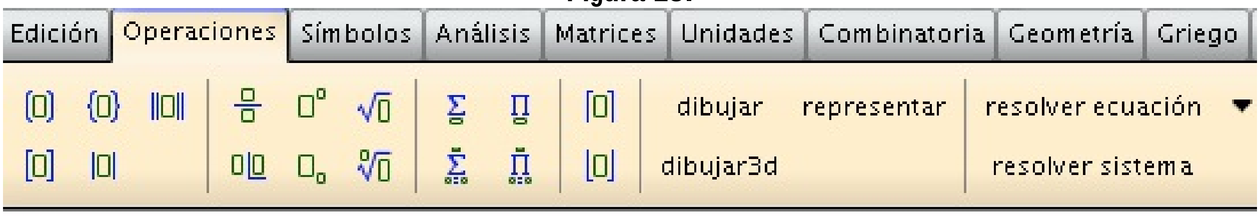


$$(x^3-3x^2-9x+1)' \rightarrow 3\cdot x^2-6\cdot x-9$$

$$\text{resolver}(3\cdot x^2-6\cdot x-9=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$$

3. Representamos la función como hemos hecho anteriormente:

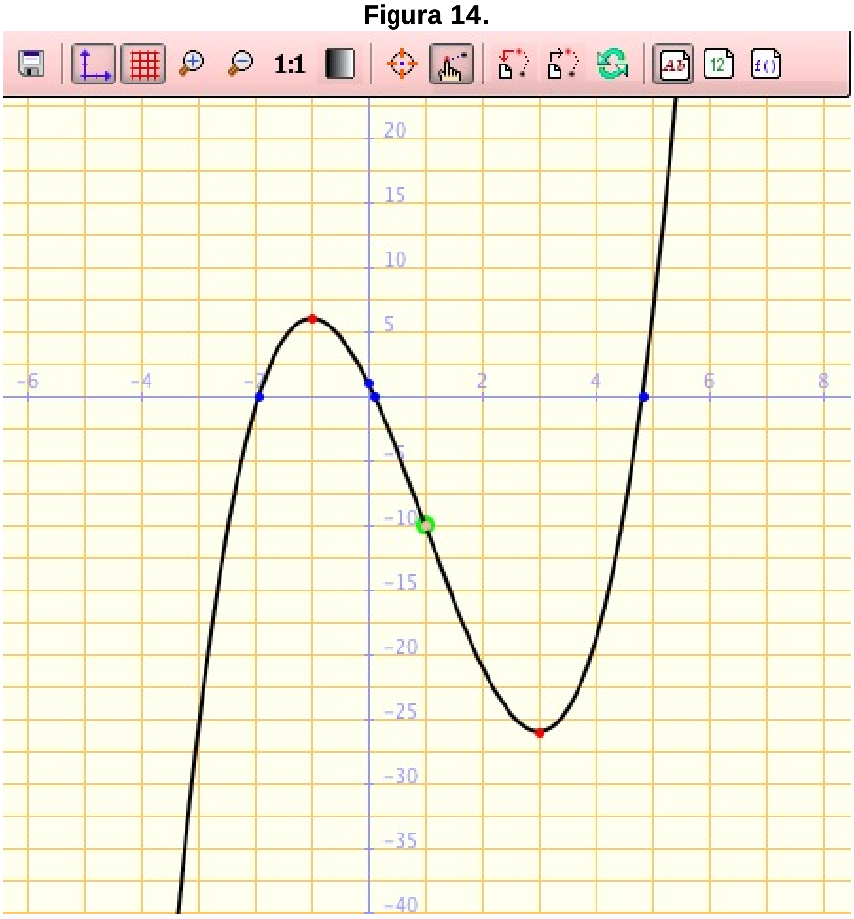
Figura 13.



$$\text{representar}(x^3-3x^2-9x+1) \rightarrow \text{tablero1}$$

4. Por último pulsamos el botón de igual y obtenemos la representación de la función:

Figura 14.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) La función no está definida en el punto x=2 y en el punto x=-2. Los puntos de derivada nula son: $f'(x)=\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=0, x=0, x=2\sqrt{3}, x=-2\sqrt{3}.$ Estudio del signo de la derivada:

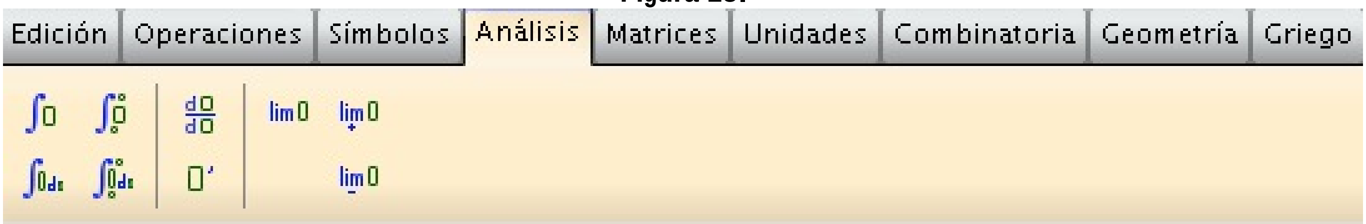
$f'(x)>0$	$-2\sqrt{3}$	$f'(x)<0$	-2	$f'(x)<0$	0	$f'(x)<0$	2	$f'(x)<0$	$2\sqrt{3}$	$f'(x)>0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Crece en $(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)$; decrece en $(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})-|-2,2|$. El punto $(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3})$ es un máximo relativo y $(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$ un mínimo relativo. En x = 0 la función no tiene máximo ni mínimo.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Derivamos la función como en el ejercicio anterior:

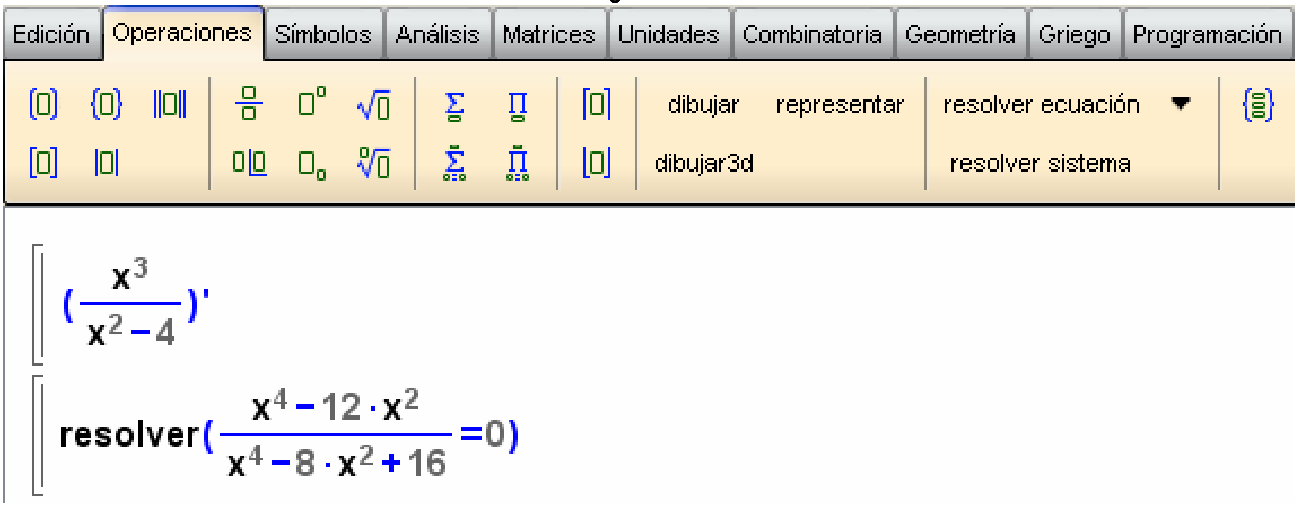
Figura 15.



$$\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)' \rightarrow \frac{x^4-12\cdot x^2}{x^4-8\cdot x^2+16}$$

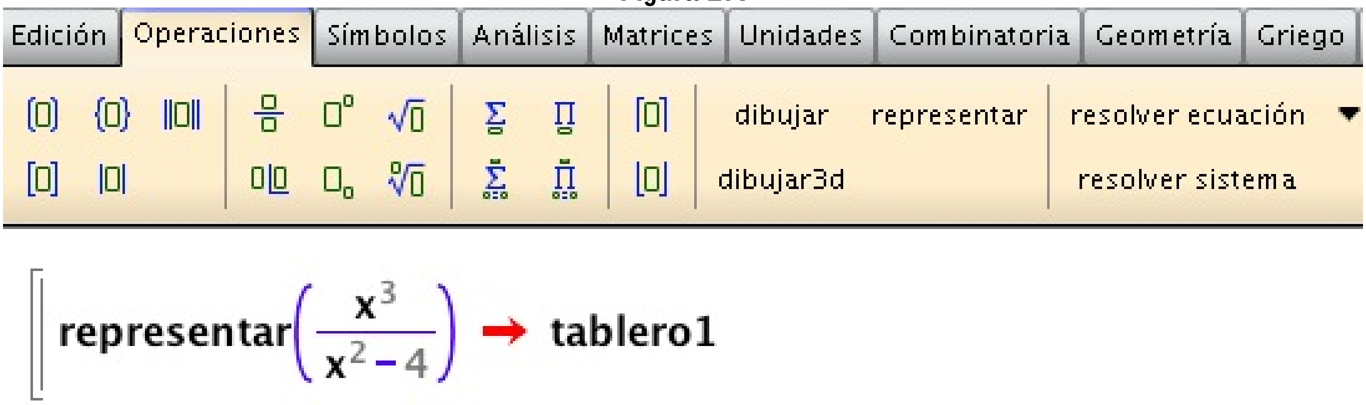
2. Resolvemos la ecuación resultante igualando la derivada a 0. Como vemos, no hemos tenido que igualar a 0, porque cuando escribimos ‘resolver’ y una función, automáticamente interpreta que está igualada a 0. Por último, pulsamos igual y obtenemos los valores:

Figura 16.



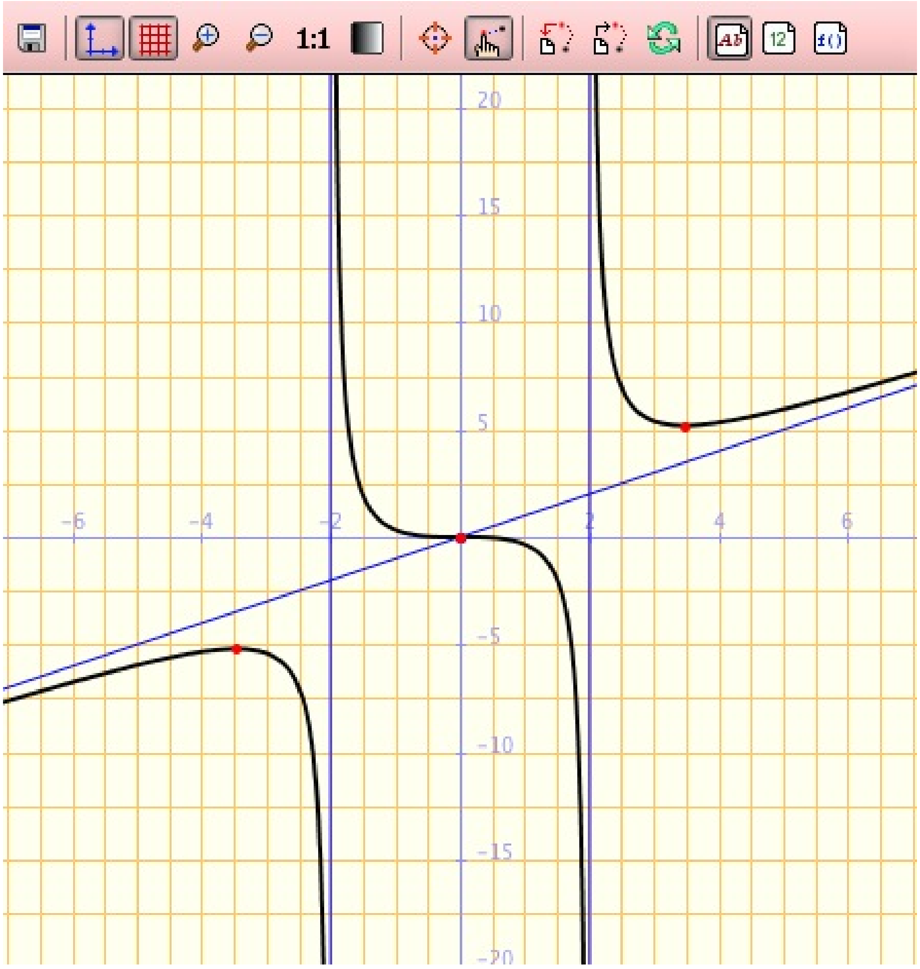
3. Representamos la función sin derivar:

Figura 17.



4. Pulsamos el botón igual y obtenemos la función representada:

Figura 18.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

c) $f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2)$ Como $e^x > 0$ para anular cualquier x, f' se anula si:

$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$

$f'(x) > 0$	-1	$f'(x) < 0$	2	$f'(x) > 0$
↗		↘		↗

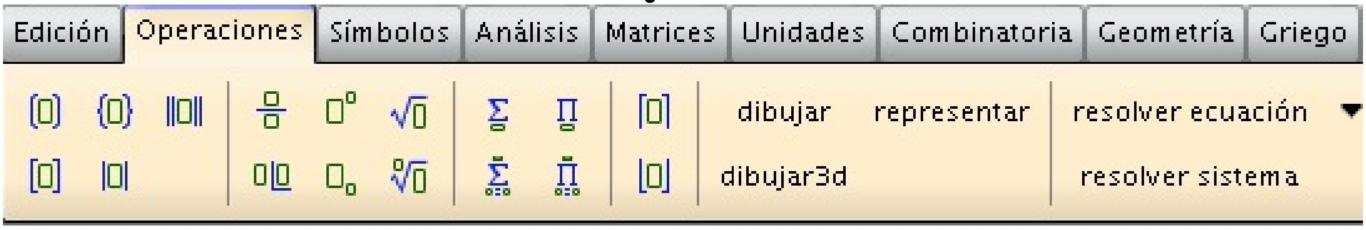
La función crece en $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
y decrece en (-1, 2).

Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{5}{e}\right)$ y un mínimo en $(2, -e^2)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Derivamos la ecuación como hemos hecho anteriormente:

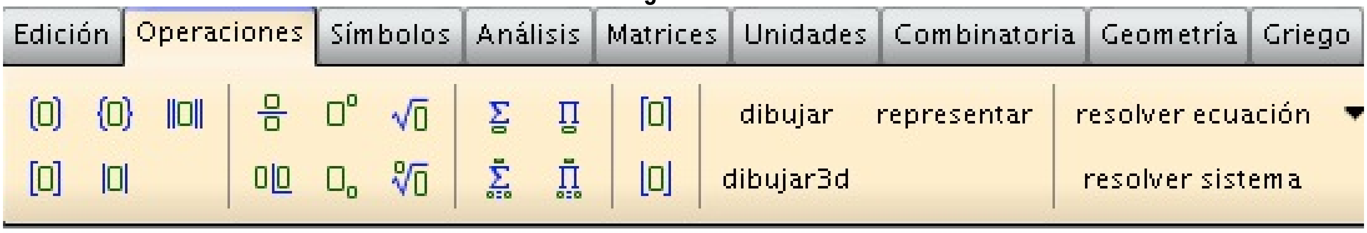
Figura 19.



$$(e^x(x^2-3x+1))' \rightarrow (2\cdot x-3)\cdot(e^x)'(x^2-3\cdot x+1)$$

2. Resolvemos la ecuación:

Figura 20.

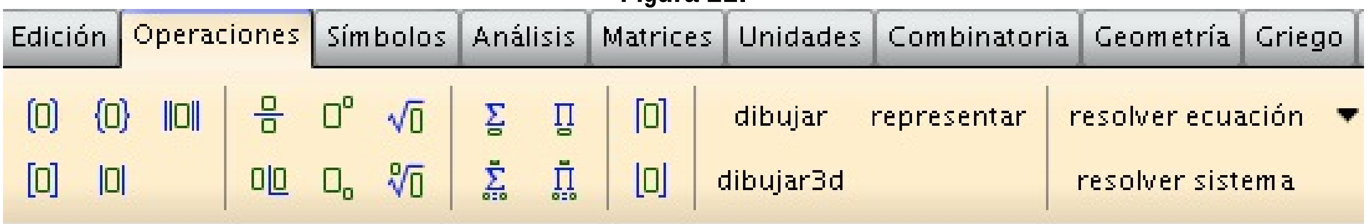


$$(e^x(x^2-3x+1))' \rightarrow (2\cdot x-3)\cdot(e^x)'(x^2-3\cdot x+1)$$

$$\text{resolver}(x^2-x-2=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=2\}\}$$

3. Escribimos ‘representar’ y la ecuación entre paréntesis:

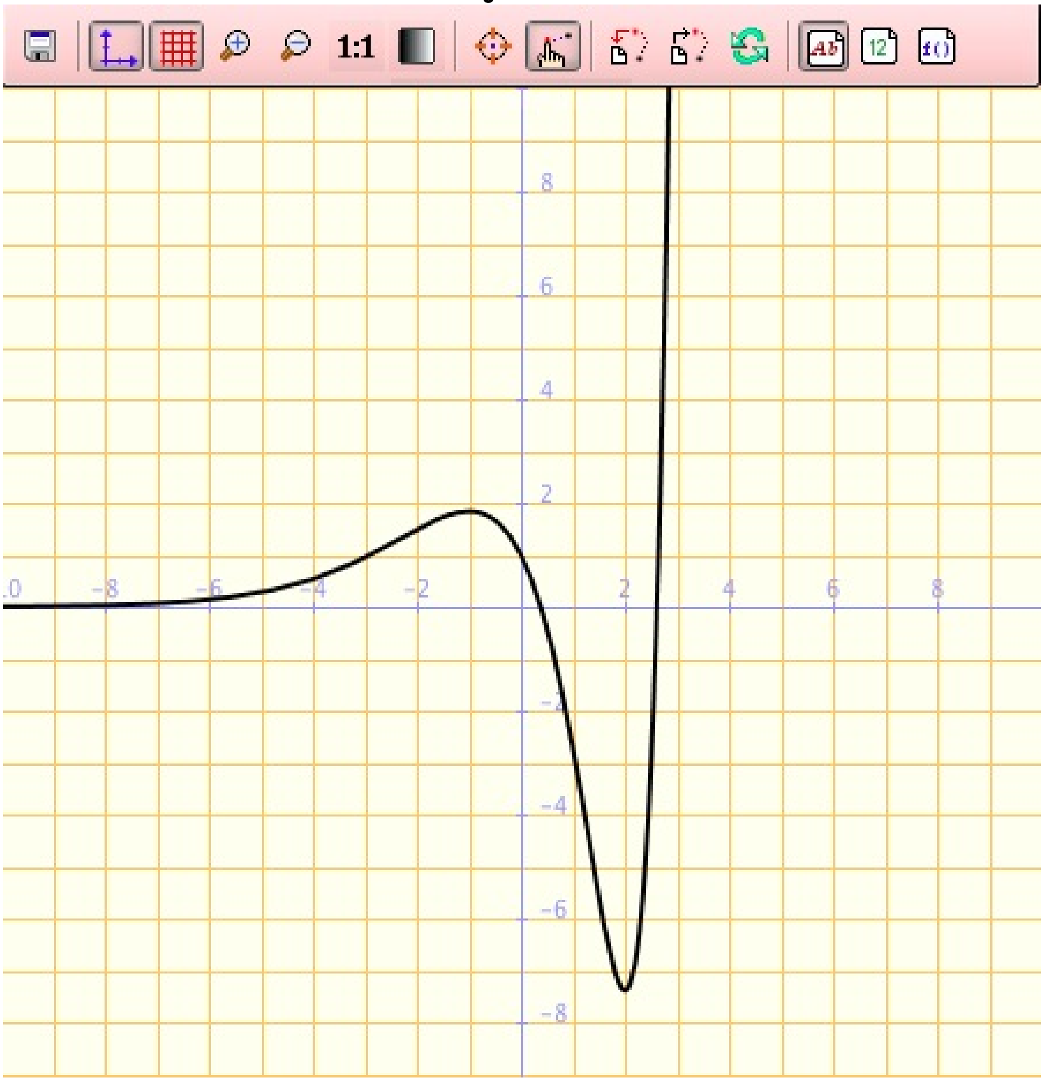
Figura 21.



$$\text{representar}(e^x(x^2-3x+1))$$

4. Después del paso 3, pulsamos el botón igual y obtenemos la representación gráfica:

Figura 22.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

5. Máximos y mínimos.

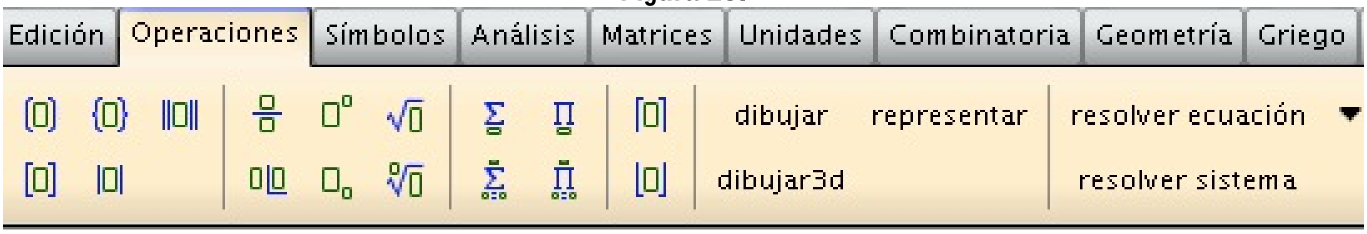
Razona por qué la gráfica de la función no puede tener extremos relativos. $f(x) = 3x - sen\, x$.

La función $f(x) = 3x - sen\, x$ es continua y derivable en $\Re$. Sus extremos relativos solo pueden estar en las soluciones de $f'(x) = 0$. Pero si $f'(x) = 3 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 3,$ lo cual es imposible. Por tanto, f no puede tener extremos relativos.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Escribimos representar y la función entre paréntesis:

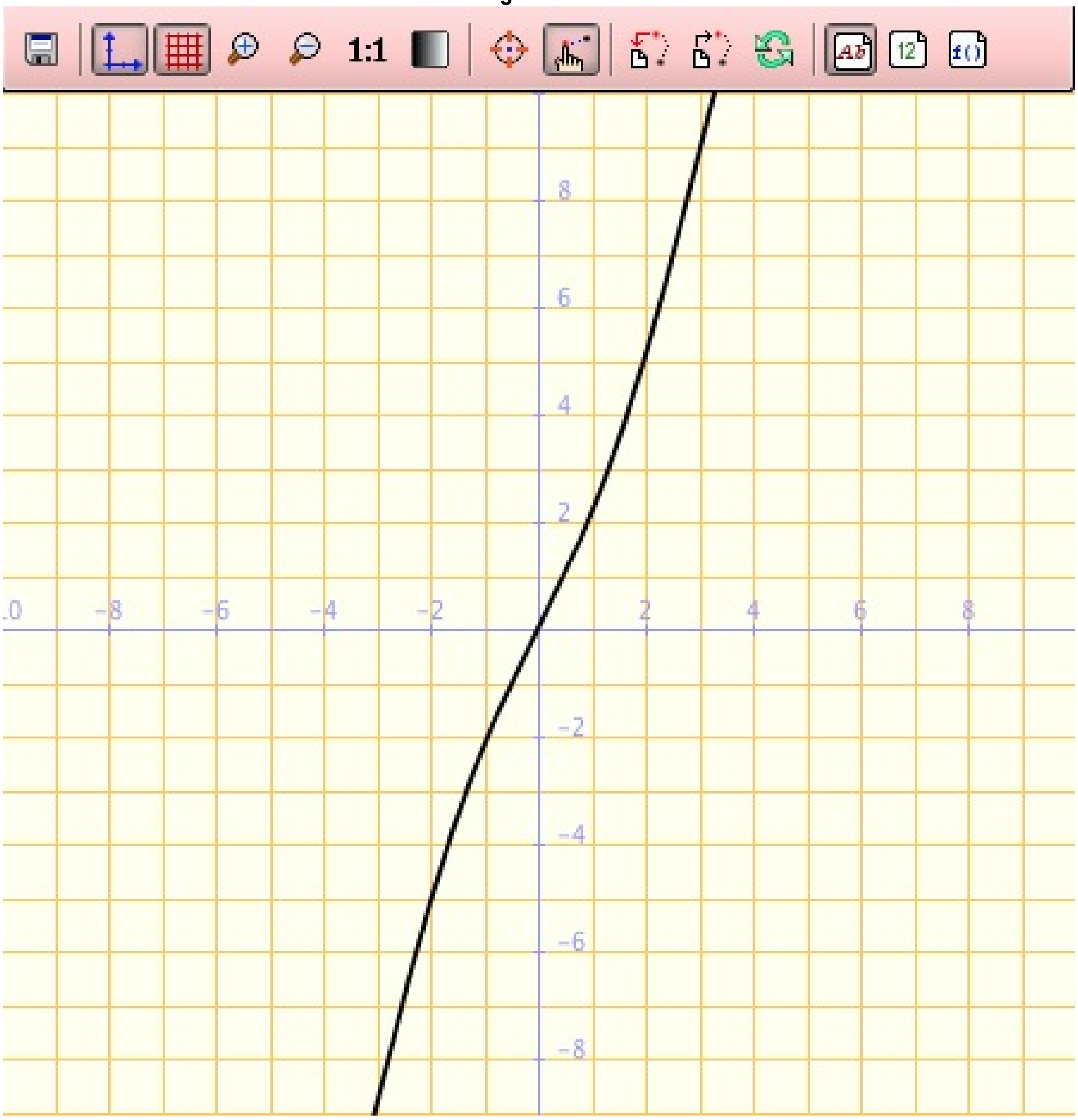
Figura 23.



representar(3x−sen(x))

2. Pulsamos igual y obtenemos en el Tablero 1 la representación gráfica:

Figura 24.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

6. Máximos y mínimos.

Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = sen\,x + \cos x$ Si $x \in [0, 2\pi]$ $\qquad b)\ f(x) = x \ln x$ $\qquad c)\ f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

a) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Sus soluciones son los posibles máximos y mínimos:

$$f'(x) = \cos x - sen\,x \to \cos x - sen\,x = 0 \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \to f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \to f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{cases}$$

El punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ es un máximo y $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ es un mínimo. Podemos confirmarlo estudiando el signo de

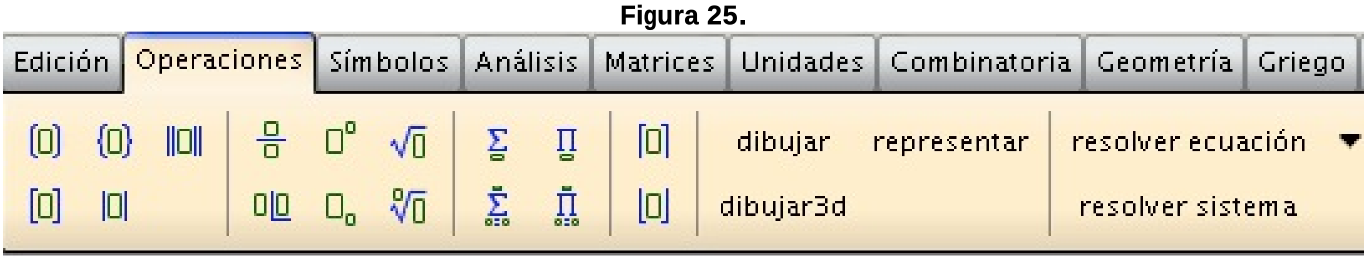
$f'' : f''(x) = -senx - \cos x.$.

- Si $x = \dfrac{\pi}{4}, y'' < 0 \to$ hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.
- Si $x = \dfrac{5\pi}{4}, y'' < 0 \to$ hay un máximo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

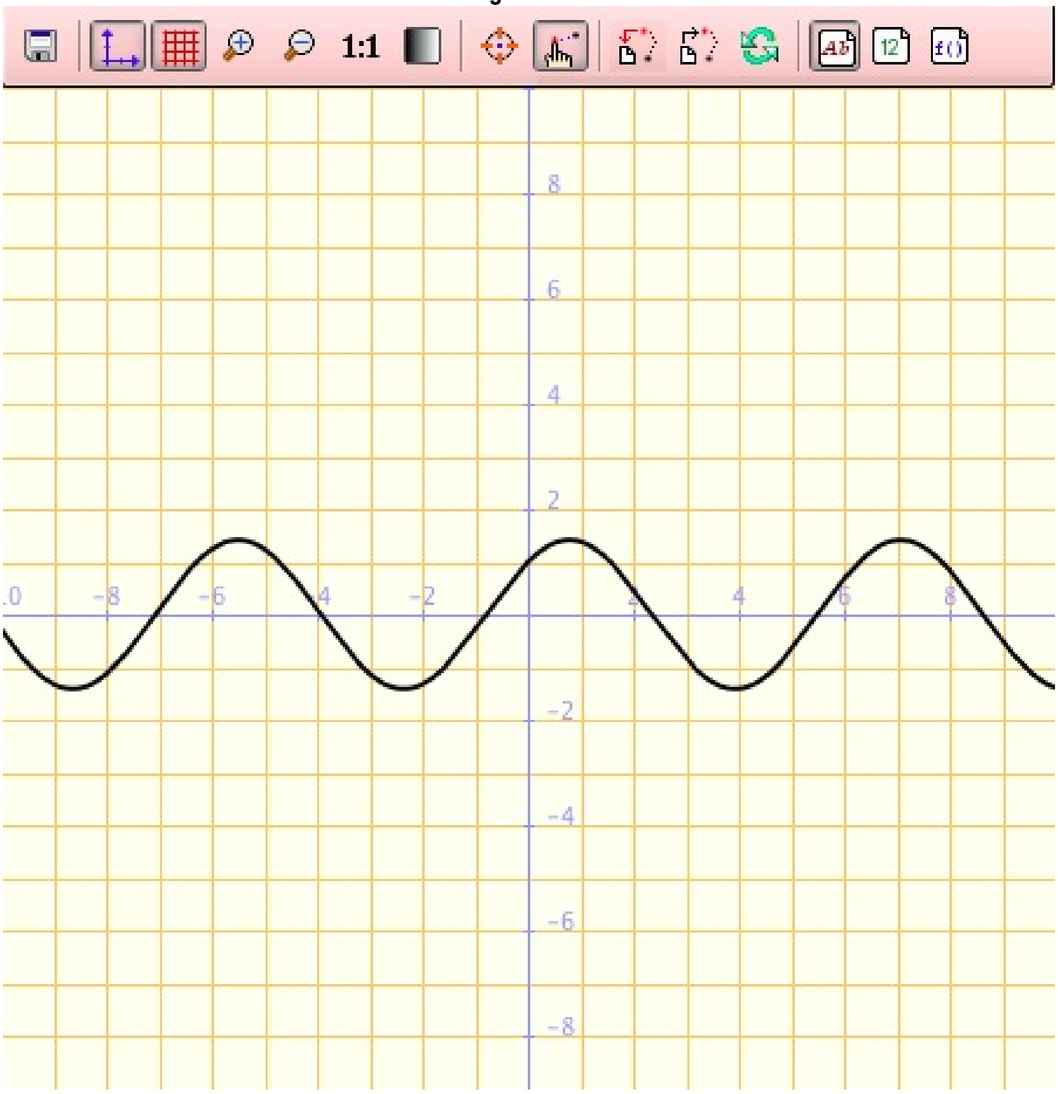
1. Escribimos la función que queremos representar entre paréntesis y escribimos delante: 'representar':

Figura 25.



2. Por último, pulsamos igual y obtenemos:

Figura 26.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

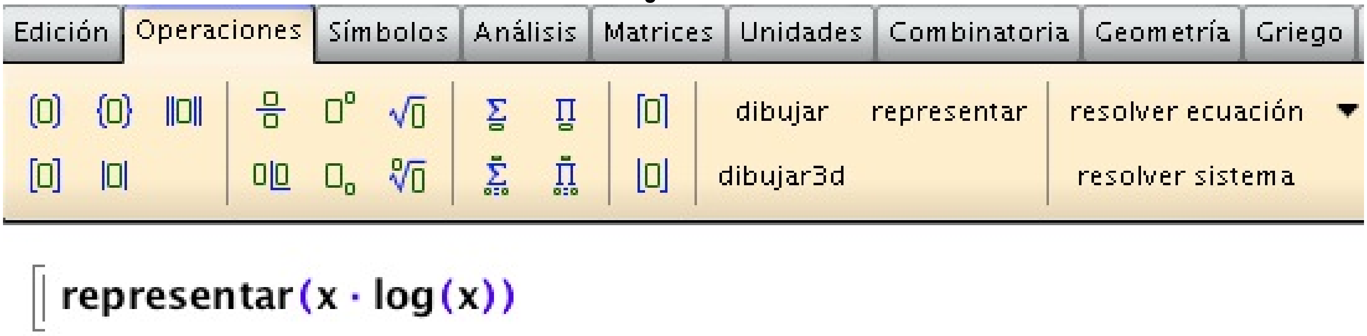
b) $f'(x)=\ln x+1;\ f'(x)=0\rightarrow \ln x+1=0; \ln x=-1, x=e^{-1}; f''(x)=\dfrac{1}{x}$. Si $x=e^{-1}\rightarrow f''(x)>0$.

En $x=e^{-1}$ hay un mínimo. Mínimo: $\left(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{e}\right)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

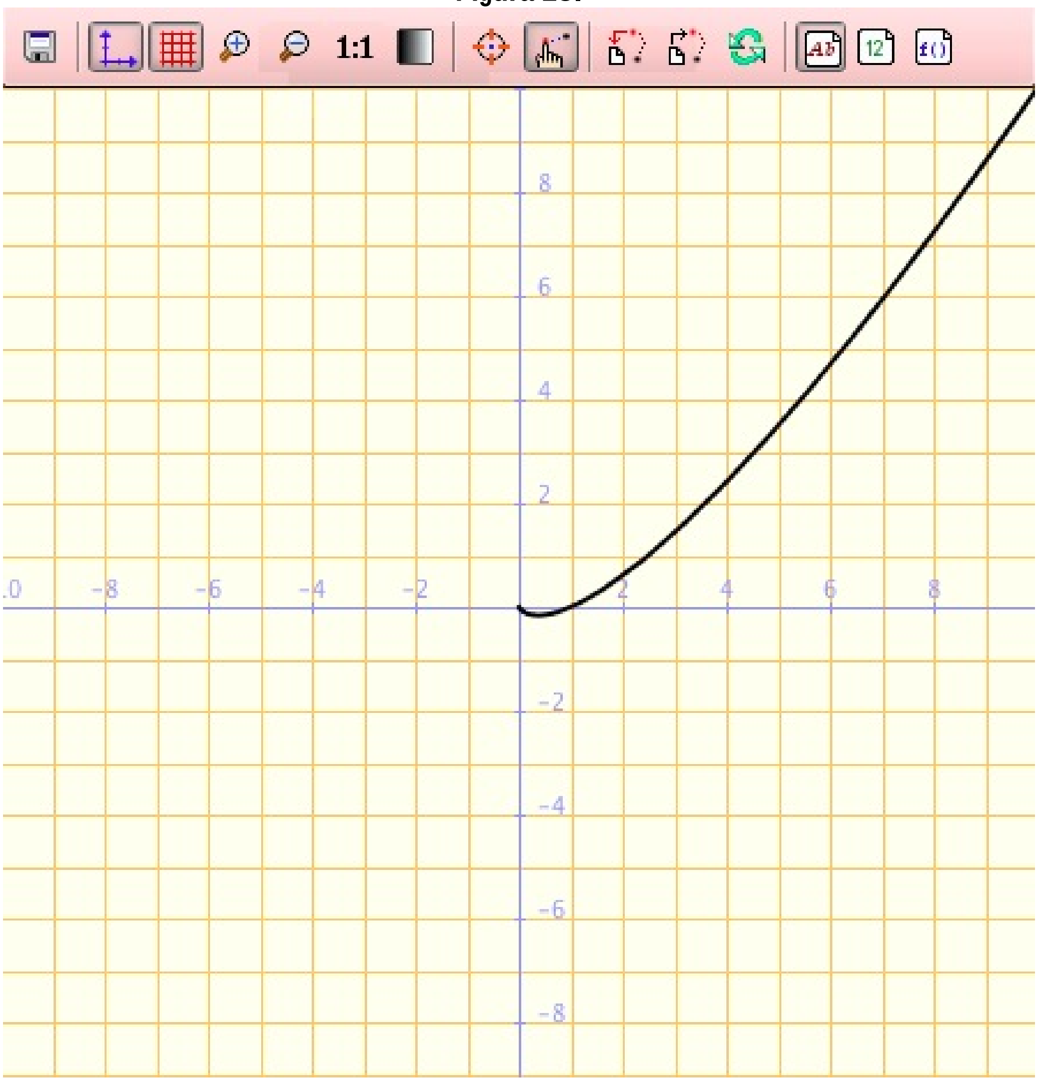
1. Idénticamente al apartado anterior escribimos ‘representar’ y después la función entre paréntesis:

Figura 27.



2. Pulsamos igual y obtenemos la representación:

Figura 28.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

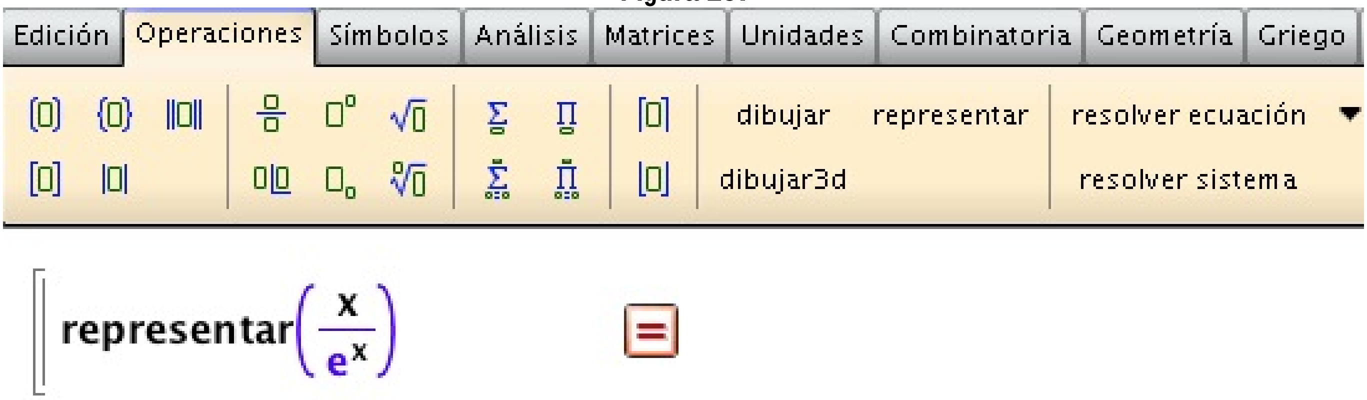
c) $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}=0 \rightarrow \dfrac{1-x}{e^x}=0, x=1$ Posible máximo o mínimo.

$f''(x)=\dfrac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-1+x}{e^x}$. Si $x=1$, $f''(x)<0$ Máximo: $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

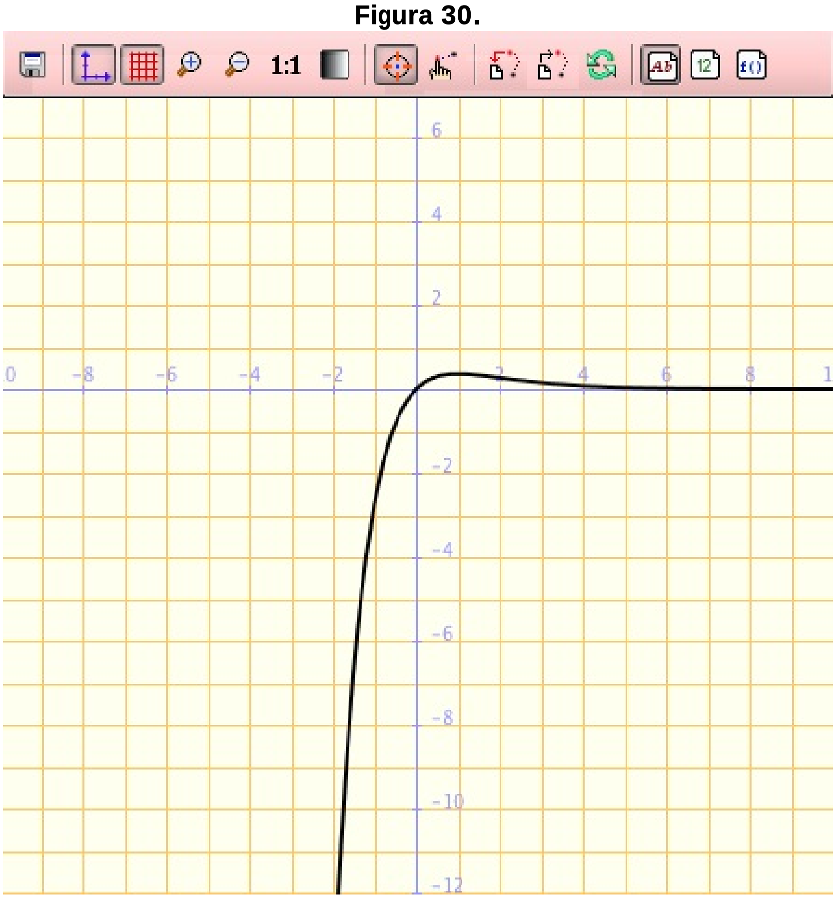
1. De la misma forma que en los ejercicios anteriores, escribimos la función entre paréntesis después de escribir 'representar':

Figura 29.



2. Pulsamos igual y en el Tablero 1 obtenemos:

Figura 30.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

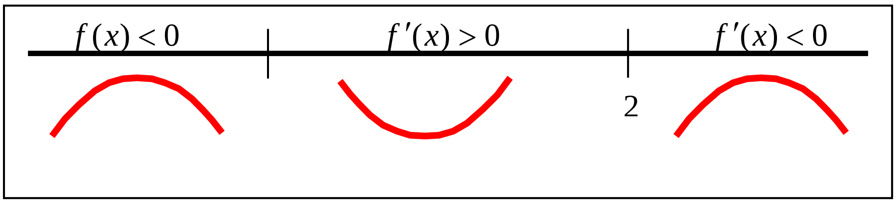
7. Puntos de inflexión.

Halla los puntos de inflexión de la función y estudia su curvatura. $f(x) = \ln(x^2+1)$

Los puntos de inflexión están entre las soluciones de la ecuación $f''(x)=0$.

$$f'' = \frac{2x}{x^2+1} \rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \rightarrow f''(x) = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de f'' en los intervalos $(-\infty,-1)(-1,1)(1,+\infty)$.



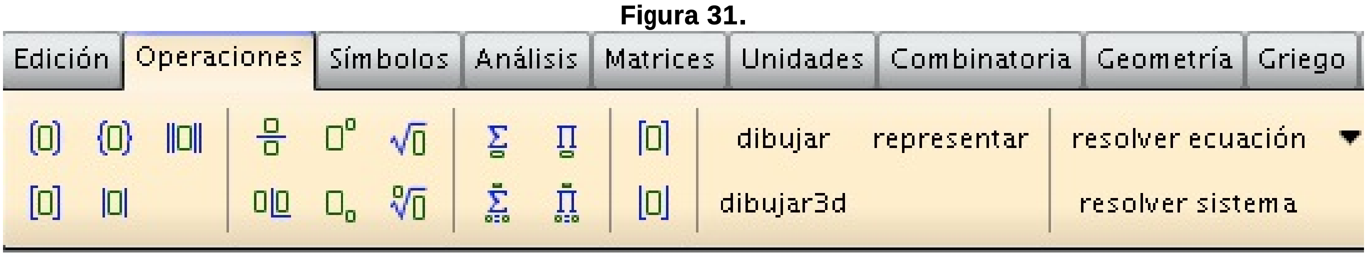
La curva es cóncava en el intervalo $(-1,1)$ y convexa en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Los puntos $(-1, \ln 2)$ $(1, \ln 2)$ son puntos de inflexión.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Representaremos la función escribiéndola entre paréntesis después de 'representar':

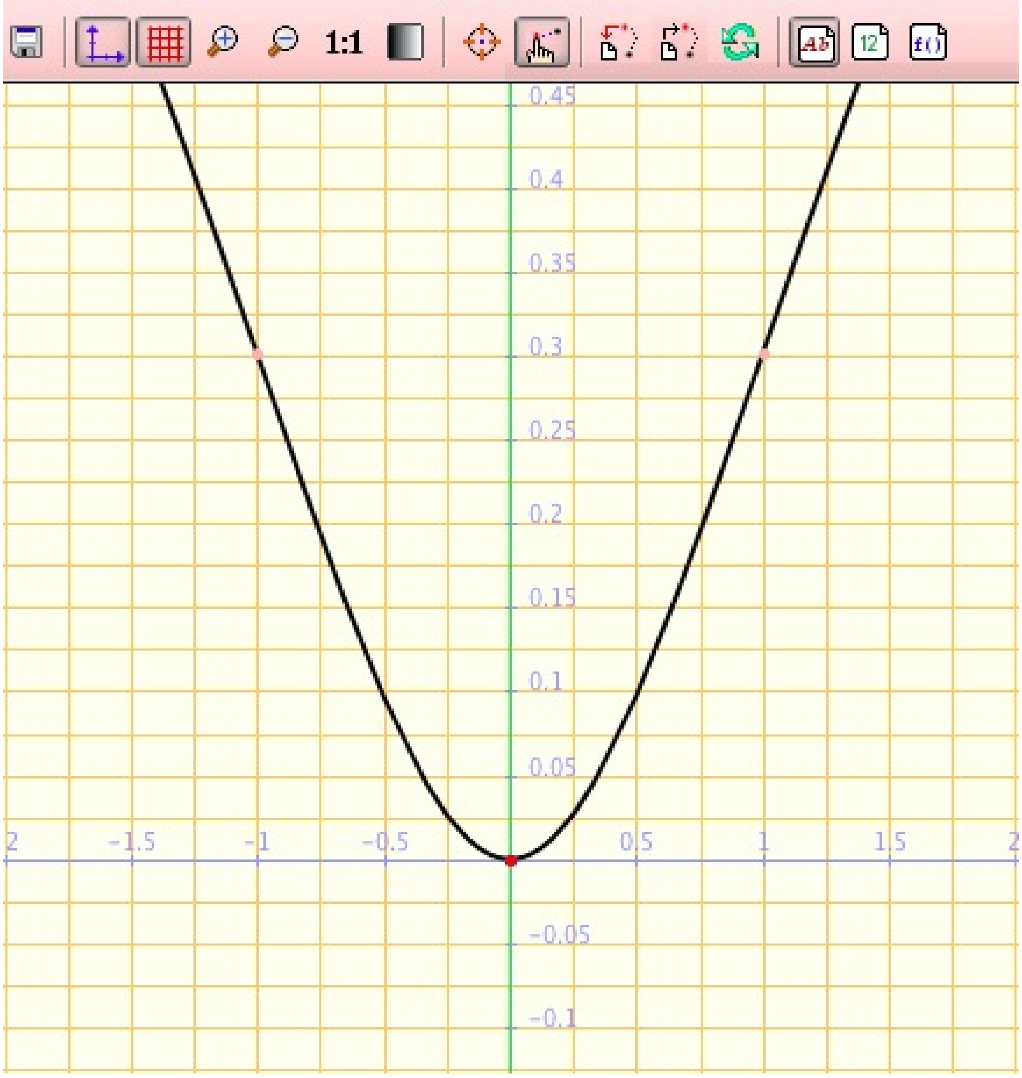
Figura 31.



representar(log(x² + 1)) → tablero1

2. Cuando pulsemos igual, obtendremos la representación gráfica:

Figura 32.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

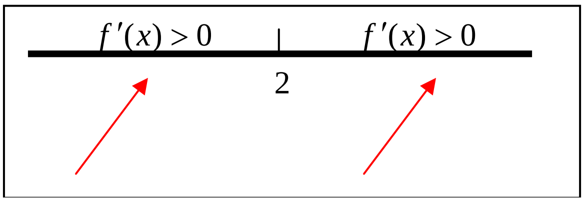
8. Derivadas nulas.

Dada $f(x) = 1-(2-x)^5$, ***comprueba que*** $f'(2)=0,\ f''(2)=0$ ***y*** $f'''(2)=0$. ***¿Tiene*** f ***máximo, mínimo. O punto de inflexión en x = 2?***

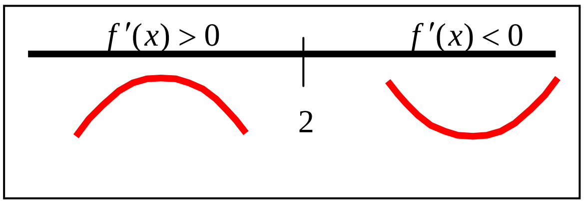
$f'(x) = 5(2-x)^4 \rightarrow f''(x) = -20(2-x)^3 \rightarrow f'''(x) = 60(2-x)^2$

Al hacer x = 2 se verifica $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$.

Estudiamos el signo de f' a la izquierda y a la derecha de x = 2: Comprobamos que tiene un punto de inflexión estudiando el signo de f'':



f crece a la izquierda y a la derecha de 2; luego f no tiene máximo ni mínimo en x = 2.



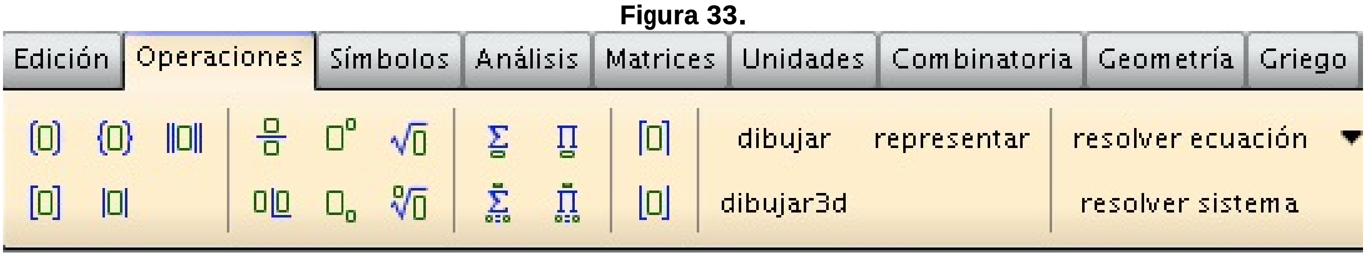
A la izquierda de x = 2, f es convexa y a la derecha de x =2, f es cóncava.

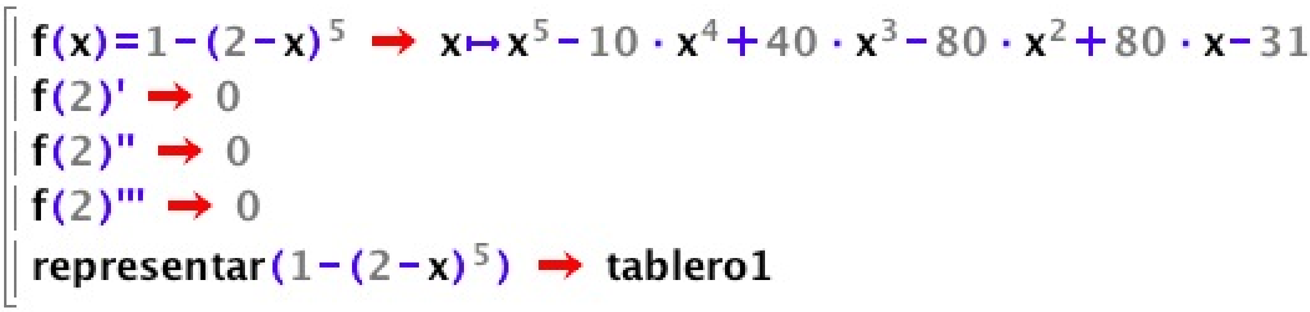
El punto (2, 1) es un punto de inflexión.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Escribimos la función. Es muy importante darle un nombre como: f(x), g(x), z(y) … Después, escribimos el nombre, sustituyendo la x por el número que queramos, en este caso el 2, y un apóstrofe para indicar que hay que sustituir el número en la primera derivada, dos apóstrofes para sustituirlo en la segunda… Por último, escribimos representar y la función entre paréntesis:

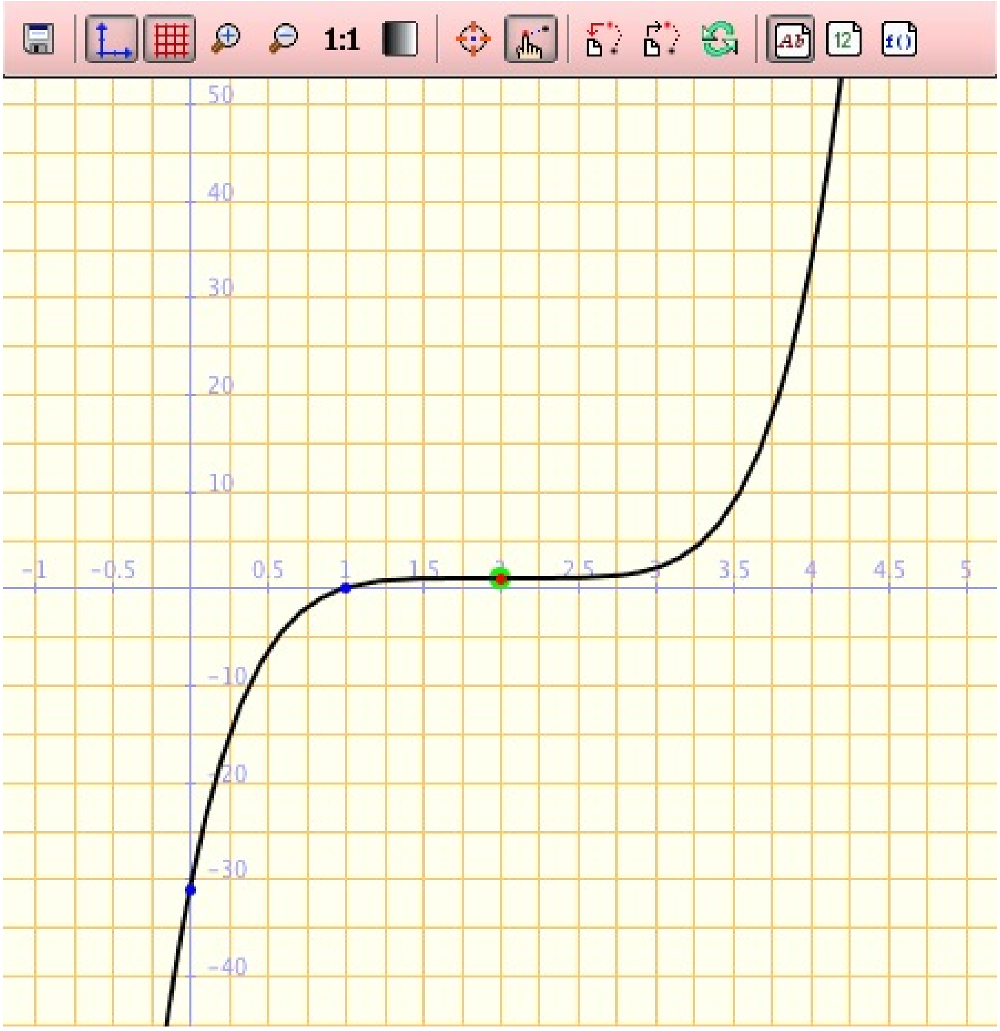
Figura 33.





2. Pulsamos el botón igual y obtenemos la representación de la función:

Figura 34.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

9. Cálculo de coeficientes de una función.

Halla los coeficientes a, b, c, d, de la función: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ***sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1,0) es*** $y = -3x + 3$, ***y que la función tiene un extremo relativo en x=0.***

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \to f''(x) = 6ax + 2b$

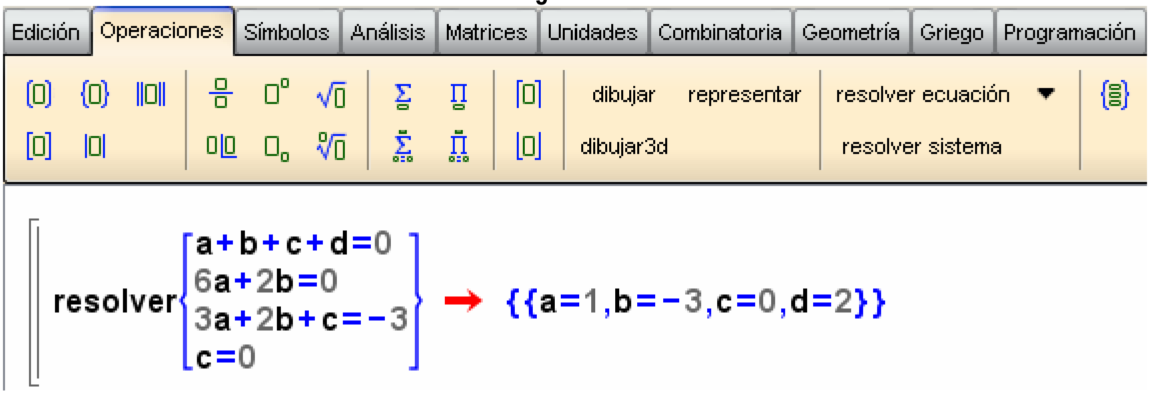
- f pasa por $(1,0) \to f(1) = 0 \to a + b + c + d = 0$ (1)
- $(1,0)$ es un punto de inflexión $\to f''(1) = 0 \to 6a + 2b = 0$ (2)
- La pendiente de la tangente en x = 1 es igual a -3 $\to f'(1) = -3 \to 3a + 2b + c = -3$ (3)

- f tiene un extremo en x = 0 $\to f(0) = 0 \to c = 0$ 4

Resolviendo el sistema formado por las 4 ecuaciones, obtenemos; $a = 1, \quad b = -3, \quad c = 0, \quad d = 2.$

1. Averiguaremos los valores de a, b, c y d resolviendo un sistema de ecuaciones. Para ello, dentro de la pestaña ‘Operaciones’, pinchamos en ‘Resolver sistema’, indicamos que tendrá cuatro ecuaciones, rellenamos con nuestros datos, y al pinchar en igual obtenemos nuestro resultado:

Figura 35.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

10. Beneficio máximo.

El propietario de un inmueble tiene alquilados cuarenta pisos a 300€ al mes cada uno. Pro cada 10€ de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso mas económico. ¿Cuál es el alquiler que mas beneficios produce al propietario?

Si aumenta x euros, cobra por cada piso $(300 + x)$€, pero alquila $\left(40 - x/10\right)$ pisos. Por tanto, el beneficio es:

$$B(x) = (300 - x)\cdot\left(40 - \frac{x}{10}\right) = 12000 + 10x - \frac{1}{10}x^2 \qquad \text{con } 0 < x < 400.$$

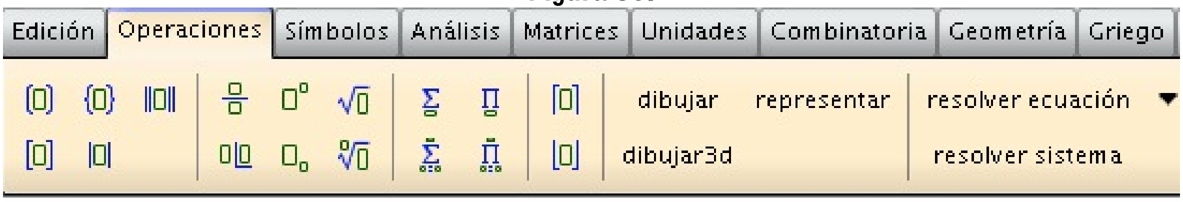
La curva y = B(x) es una parábola abierta hacia abajo y cuyo vértice es el máximo, que obtenemos haciendo $B'(x) = 0$:

$B'(x) = 10 - \frac{1}{5}x = 0 \to x = 50, B''(x) = -\frac{1}{5} < 0.$ Para que el beneficio sea máximo, debe poner el alquiler a 350 €.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Obtenemos la función y la escribimos entre paréntesis después de escribir ‘representar’:

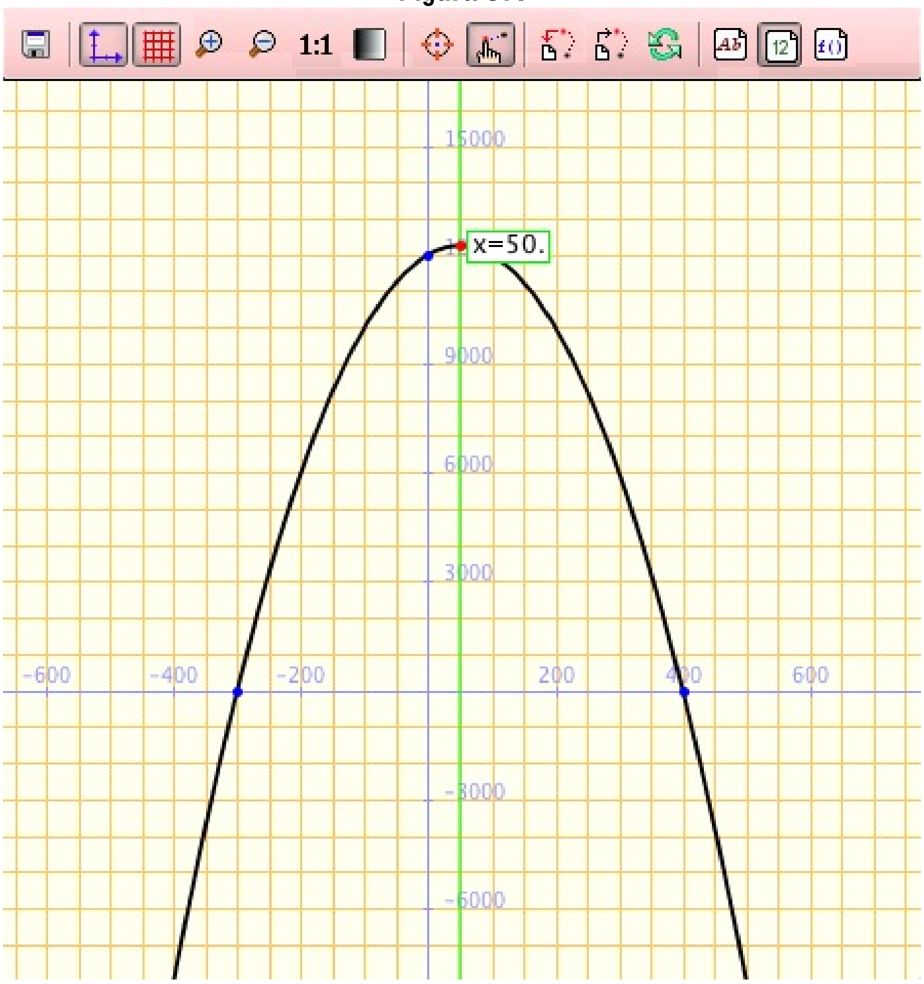
Figura 36.



$$\text{representar}\left(12000+10x-\frac{1}{10}x^2\right) \rightarrow \text{tablero1}$$

2. Pulsamos el botón igual y obtenemos la representación gráfica:

Figura 37.



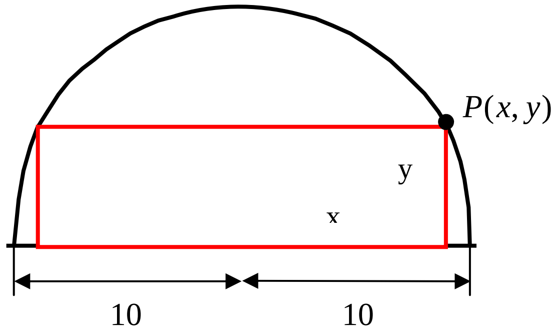
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

11. Área máxima.

En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m. se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus

extremos en la parte curva.

Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.



Tomamos como origen de coordenadas el centro de la circunferencia.

$P(x, y)$ Es un punto de la circunferencia. El área del parterre es $S = 2xy$

Como el punto P pertenece a la circunferencia, debe verificar que:

$x^2 + y^2 = 100 \to y = \sqrt{100 - x^2}$. Así pues, hay que maximizar $S(x) == 2x\sqrt{100 - x^2}$.

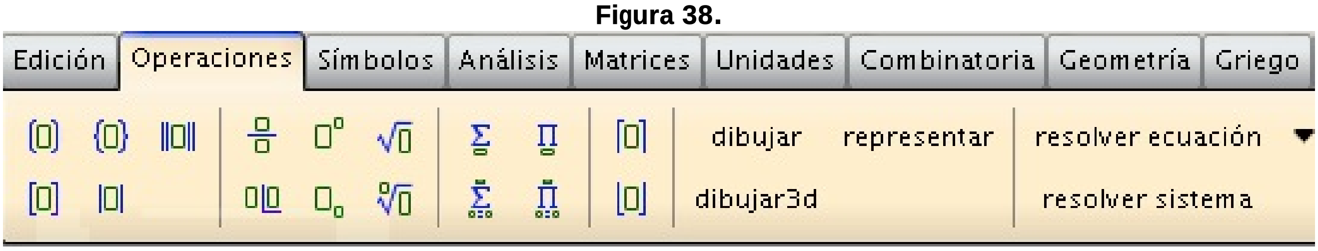
Calculamos $S'(x) = \dfrac{2(100 - 2x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$; $S'(x) = 0 \begin{cases} x = 5\sqrt{2} \\ x = -5\sqrt{2} \ (no\,vale) \end{cases}$

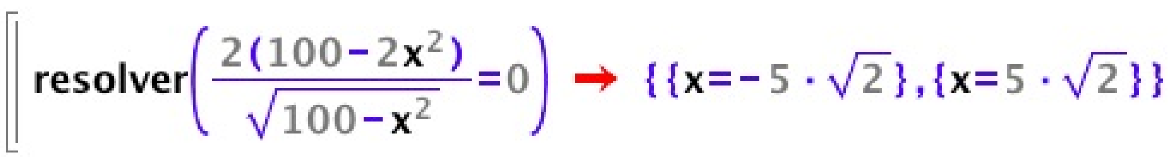
En $x = 5\sqrt{2}$ hay, efectivamente, un máximo, ya que $S'(x) > 0$ si $x < 5\sqrt{2}$, y $S'(x) < 0$ si $x > 5\sqrt{2}$. Las dimensiones del parterre serán $10\sqrt{2}$ m y $5\sqrt{2}$ m, y su área máxima será $100\,m^2$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para este ejercicio, tenemos que resolver la función igualada a 0, pulsamos igual y obtenemos dos soluciones, aunque nos quedamos sólo con el positivo.

Figura 38.



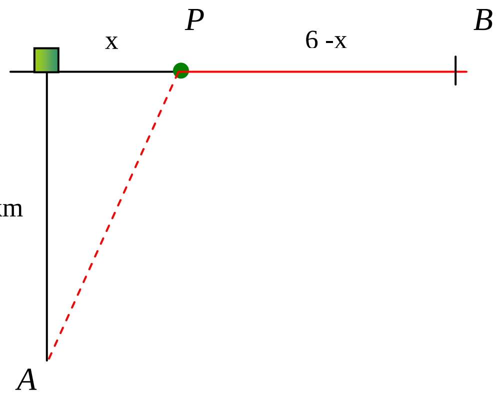


Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

12. Problema de tiempo mínimo.

Un nadador, A, se encuentra a 3 Km. de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km. de la caseta. Sabiendo que nada a 3km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.



Llamamos x a la distancia de la caseta al punto P al que debe llegar a nado.

Tiene que recorrer: $\overline{AP} = \sqrt{x^2+9}$ a 3 km/h y $\overline{PB} = 6 - x$ a 5km/h

el tiempo empleado es $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \dfrac{6-x}{5} \rightarrow t'(x) = \dfrac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{5}$

$$t'(x) = 0 \rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 = 9(x^2+9) \rightarrow 16x^2 = 81 \quad \begin{cases} x = 9/4 = 2{,}25 \ \ km \\ x = -9/4 \ \ (no\,vale) \end{cases}$$ comprobamos que:

- Si $x < 2{,}25 \quad t'(x) < 0$
- Si $x > 2{,}25 \quad t'(x) > 0$

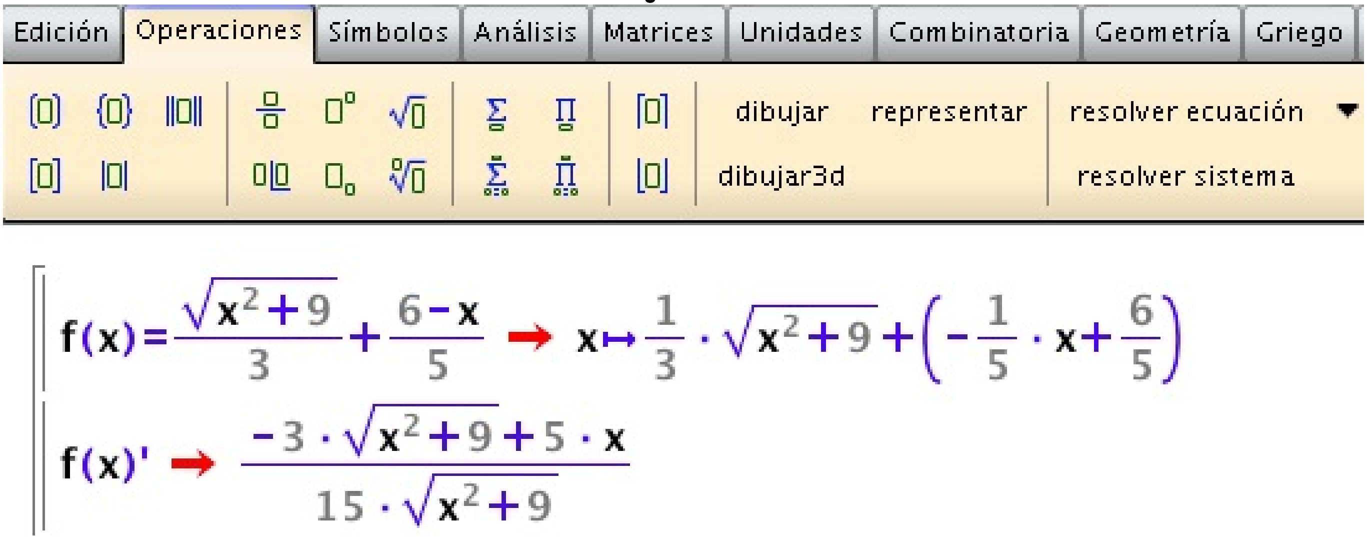
Debe dirigirse a nado a un punto que diste 2,25 km de la caseta. El tiempo que tardará en llegar a B es:

$$t = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 1{,}25 + 0{,}75 = 2\,horas.$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

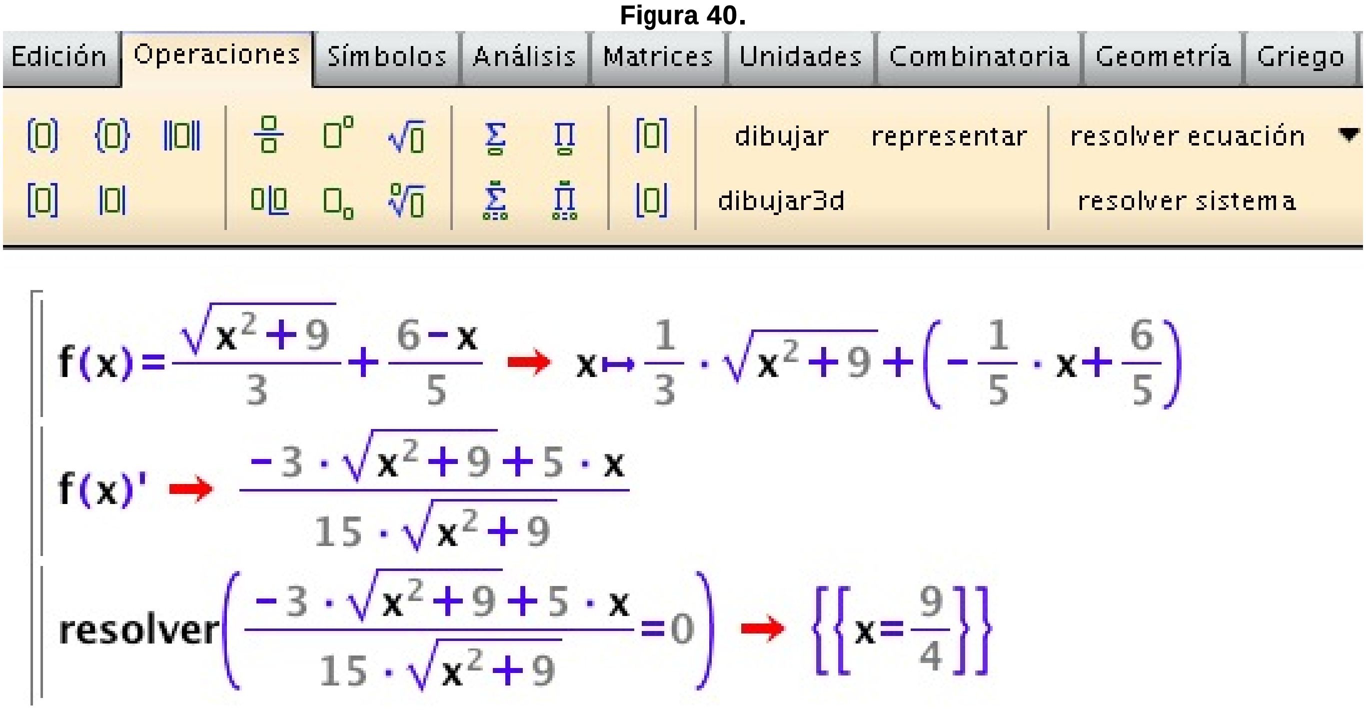
1. Primero escribimos la función y después escribimos f(x)’, para indicar que queremos que derive la función.

Figura 39.



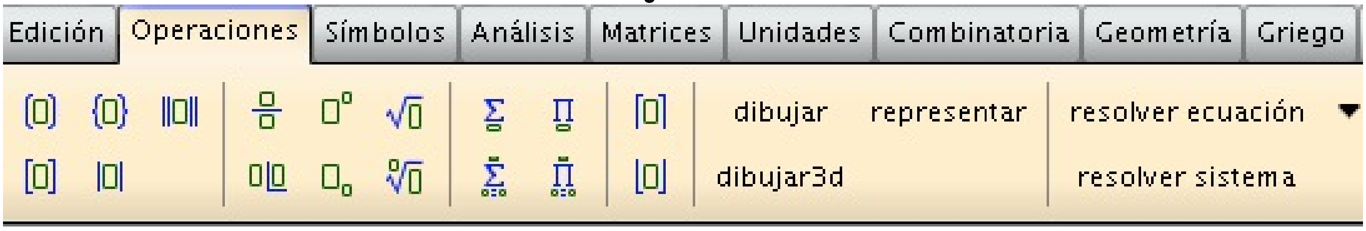
2. Resolvemos la ecuación formada por la igualación de la derivada a 0.

Figura 40.



3. Sustituimos el punto obtenido en la función:

Figura 41.



$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5} \rightarrow x\mapsto\frac{1}{3}\cdot\sqrt{x^2+9}+\left(-\frac{1}{5}\cdot x+\frac{6}{5}\right)$$

$$f(x)' \rightarrow \frac{-3\cdot\sqrt{x^2+9}+5\cdot x}{15\cdot\sqrt{x^2+9}}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{-3\cdot\sqrt{x^2+9}+5\cdot x}{15\cdot\sqrt{x^2+9}}=0\right) \rightarrow \left[\left\{x=\frac{9}{4}\right\}\right]$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) \rightarrow 2$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

13. Regla de L´Hopital.

Calcula estos límites: $a)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ $b)\ \lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x^2}$ $c)\ \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/e^x}$

a) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty$

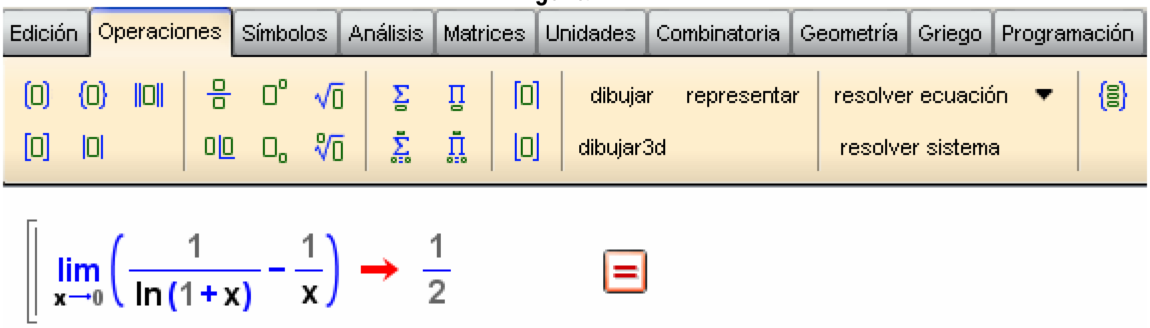
efectuamos la resta $\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$ (aplicamos la regla de L´Hopital)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-1/(1+x)}{\ln(1+x)+x/(1+x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ \lim_{x\to0}\frac{1(1+x)^2}{1/(1+x)+1/(1+x)^2}=\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para este apartado, iremos a la pestaña Análisis, y luego pulsaremos el botón de límite, y sustituimos para escribir nuestro límite. Luego pulsamos el botón igual y obtenemos el resultado.

Figura 42.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

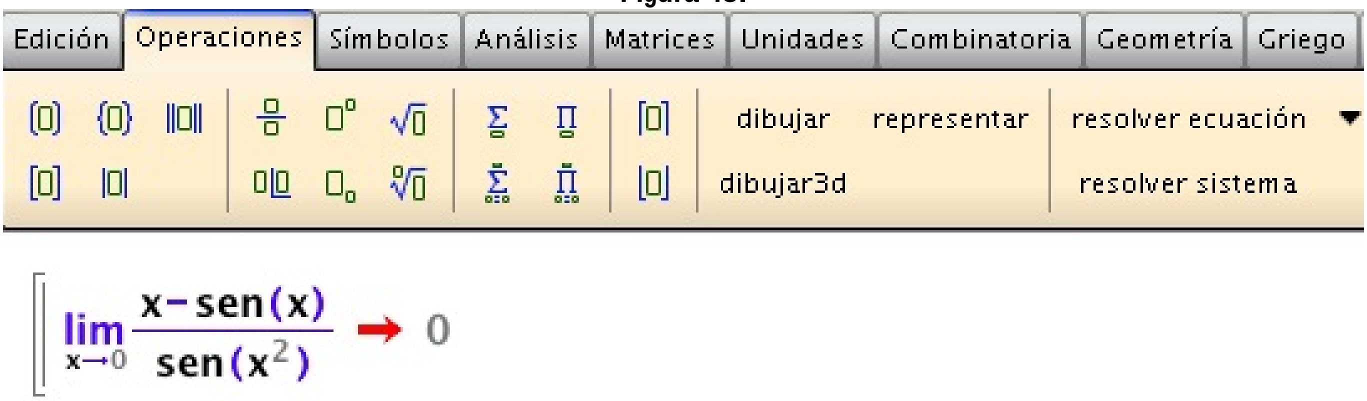
WIRIS

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sen\,x}{sen\,x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\,\cos\,x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2\,\cos\,x^2-4x^2\,sen\,x^2}=0$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para este apartado seguiremos los mismos pasos que en el anterior y escribiremos el límite y pulsaremos igual.

Figura 43.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

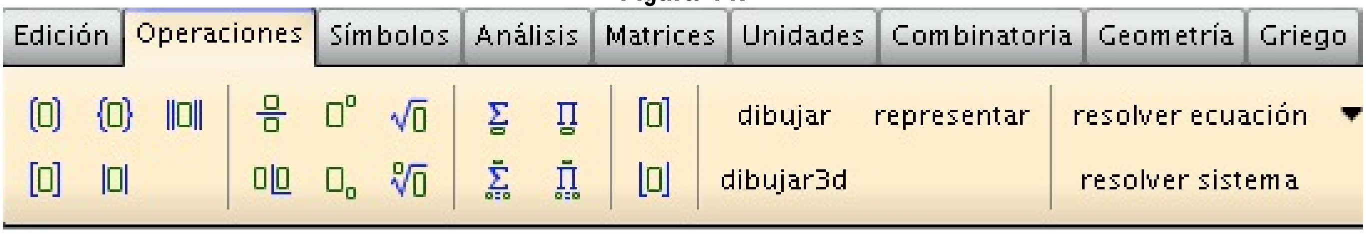
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/e^x}=\infty^0$ Tomamos logaritmos: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/e^x}\ =\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}\ln\,(\ln x)=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/(x\ln x}{e^x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln x\,e^x}=0\rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/e^x}\ =e^0\ =1$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolvemos el límite escribiendo el logaritmo y pulsando igual.

Figura 44.



$$\lim_{x \to +\infty} \log(x)^{\frac{1}{e^x}} \rightarrow 1.$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

14. Regla de L´Hopital.

Determina k para que exista y sea finito: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen\, x}$ ***Calcula ese límite para ese valor de k.***

El límite es del tipo (0/0). Por regla de L´Hopital: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} + kx}{x - sen\, x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} + k}{1 - \cos x}$

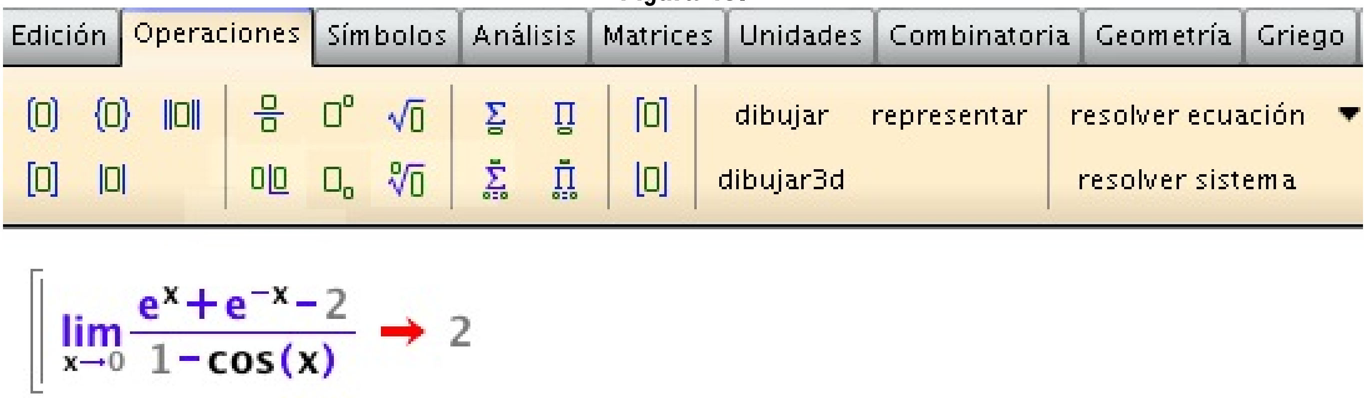
Para poder seguir aplicando la regla, es necesario que el numerador sea igual a 0 en x = 0, es decir: $e^0 + e^0 + k = 0 \rightarrow k = -2.$ Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Igual que en el ejercicio anterior, escribimos el límite y lo resolvemos:

Figura 45.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

15. Regla de L´Hopital.

Calcula: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-(1/3)x^3}{x-tg\,x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-(1/3)x^3}{x-tg\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-x^2}{1-1/\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x\frac{4x^3-x^2}{\cos^2 x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x^3}{sen^2\,x}\overset{(2)}{=}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-12x^2}{2sen\,x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-24x}{2(\cos^2 x-sen^2\,x)}=1$$

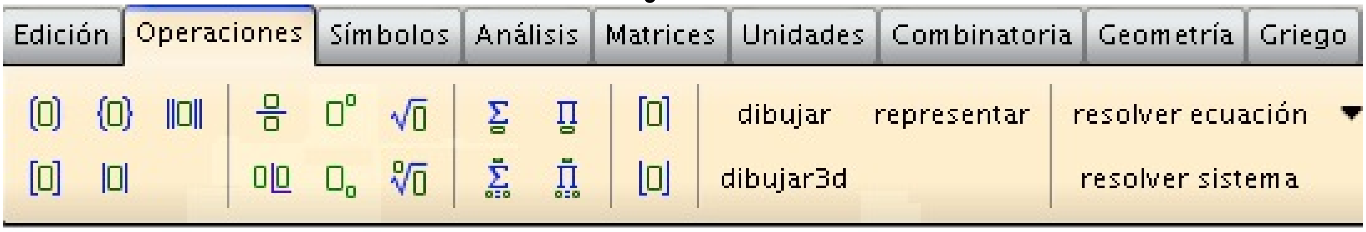
(1) Hemos transformado el límite del producto en el producto de los límites y hemos cambiado el signo del numerador y del denominador.

(2) Aplicamos que $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para este último ejercicio, como en los anteriores, dentro de la pestaña ‘Análisis’, pinchamos en límite, lo rellenamos y pulsamos igual:

Figura 46.



$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-\frac{1}{3}x^3}{x-\tan(x)} \rightarrow 1$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS