1TEMA 11 Representación de funciones

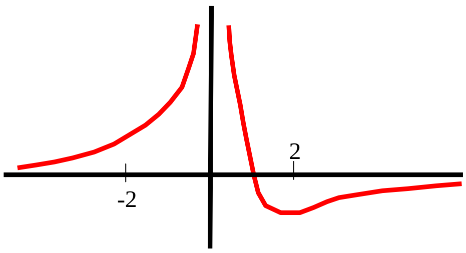
1. Del estudio a la gráfica.

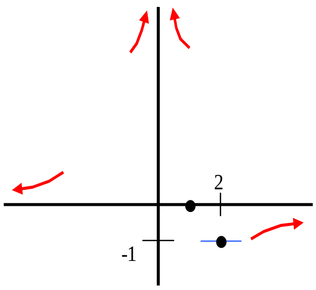
a) Representa una función $y = f(x)$ ***sabiendo que:***

- ***Dominio:*** $\Re - |0|$
- ***Corta a OX en x = 1.***
- ***Asín. horizontal y = 0:*** $\begin{matrix} Si\ \ x \to +\infty, y < 0 \\ Si\ \ x \to -\infty, y > 0 \end{matrix}$
- ***Asín. vertical x = 0:*** $\begin{matrix} Si\ \ x \to 0^-, y \to +\infty \\ Si\ \ x \to 0^+, y \to +\infty \end{matrix}$
- ***Mínimo en (2,-1)***

b) Di dónde crece y donde decrece.

a) Dibujamos las tendencias que nos señala el enunciado y los puntos por los que pasa la curva:





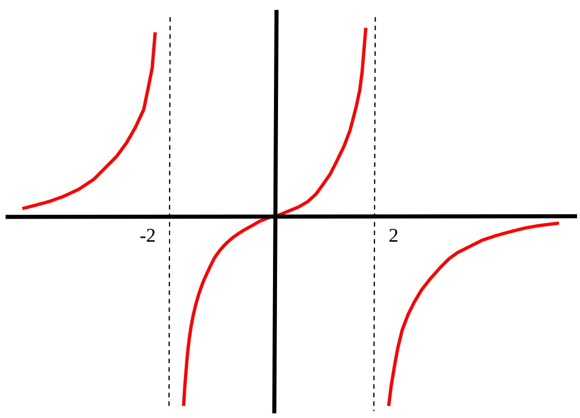
b) Crece en $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$. Decrece en $(0,2)$.

Estos ejercicios no serán resueltos con Wiris, pero consideramos que son de interés para el alumno.

2. Descripción de una gráfica.

Describe esta gráfica de una función:

- Su dominio es $\Re - [-2,2]$.
- x = -2 es asíntota vertical: $\begin{cases} si\ x \to -2^-, & y \to +\infty \\ si\ x \to -2^+, & y \to -\infty \end{cases}$
- x = 2 es asuntota vertical: $\begin{cases} si\ x \to 2^-, & y \to +\infty \\ si\ x \to 2^+, & y \to -\infty \end{cases}$

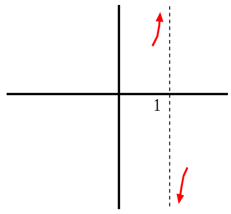


- y = 0 es asíntota horizontal: $\begin{cases} si\ x \to -\infty, & y > 0 \\ si\ x \to +\infty, & y < 0 \end{cases}$
- Es creciente. Tiene un punto de inflexión en (0, 0).
- No tiene máximos ni mínimos.

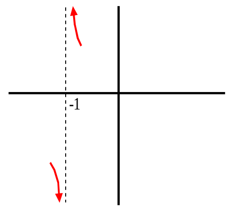
Estos ejercicios no serán resueltos con Wiris, pero consideramos que son de interés para el alumno.

3. Estudio de una función.

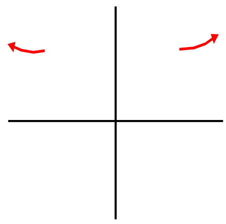
Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$ ***estudia su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Represéntala gráficamente.***



- Su dominio es $\Re - [-1,1]$.
- Es simétrica respecto al eje Y porque $f(-x) = f(x)$.



- x = 1 es asíntota vertical porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$ $\begin{cases} si\ \ x \to 1^-, & f(x) \to +\infty \\ si\ \ x \to 1^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$
-
- x = -1 es asíntota vertical porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$ $\begin{cases} si\ \ x \to -1^-, & f(x) \to -\infty \\ si\ \ x \to -1^+, & f(x) \to +\infty \end{cases}$



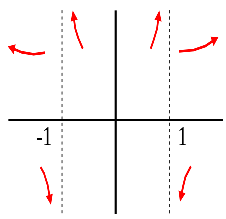
- No tiene asuntotas horizontales ni oblicua porque:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

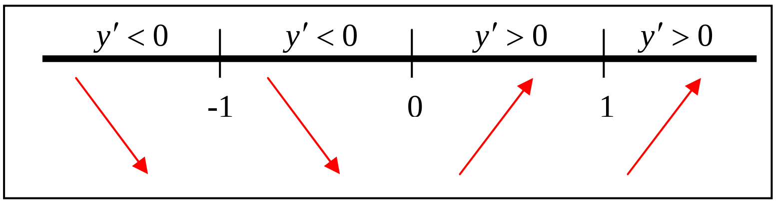
Reuniendo la información anterior, observamos que la curva debe tener un mínimo entre las asíntotas x = 1 y x =-1.

- Buscamos los puntos singulares $(f'(x) = 0)$:

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} \to f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



Estudio del signo de la derivada: $(x^2 - 1)^2$ y $(x^4 - 2x^2 - 2)$ son siempre positivos. El signo de la derivada solo depende del x.

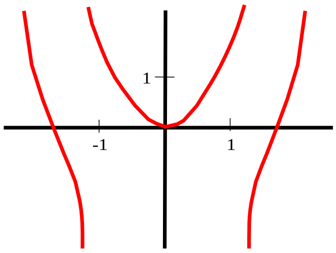


Crece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Decrece en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

Tiene un mínimo en (0, 0): x = 0, $f(0) = 0$

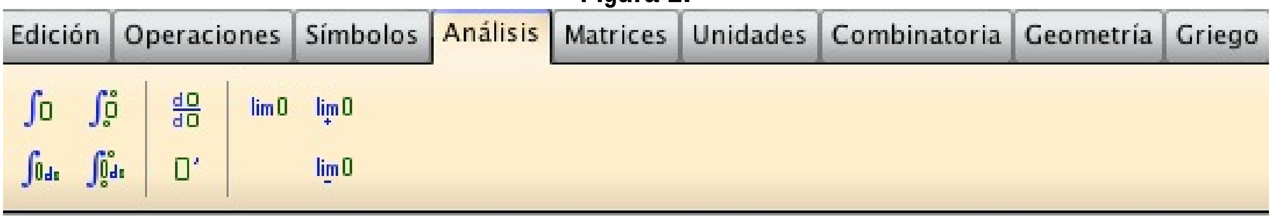
La representación gráfica es:



Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, comprobamos la simetría de la función, escribiéndola con su nombre y luego, escribiendo f(-x), para cambiar el signo a todos los coeficientes de las incógnitas:

Figura 1.

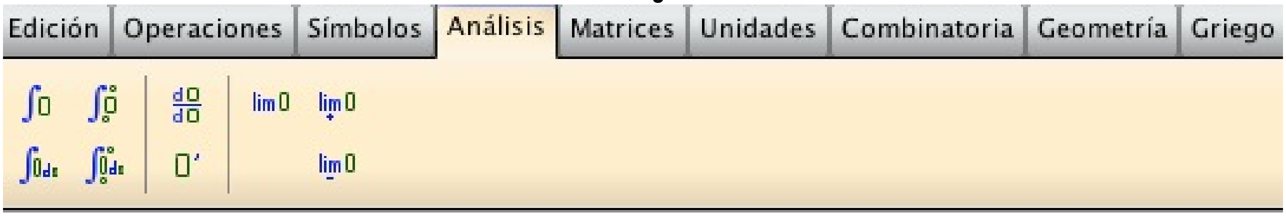


$$f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^2-1} \rightarrow x\mapsto\frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

$$f(-x) \rightarrow \frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

2. Ahora calcularemos el límite de 1 en el punto, por la izquierda y por la derecha:

Figura 2.



$$f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^2-1} \;\rightarrow\; x\mapsto\frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

$$f(-x) \;\rightarrow\; \frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

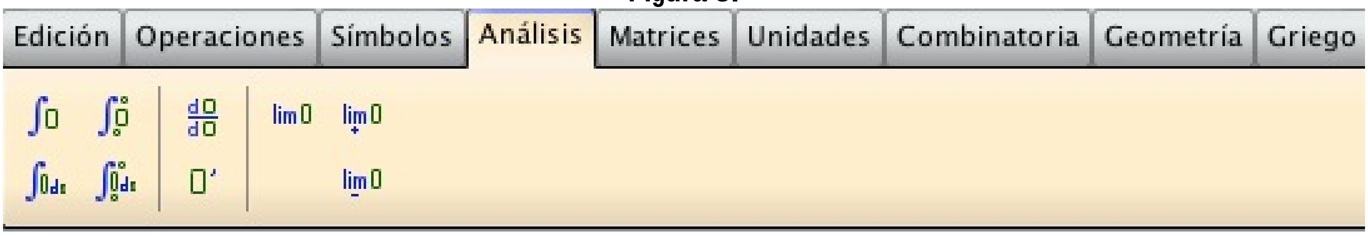
$$\lim_{x\to 1} f(x) \;\rightarrow\; \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \;\rightarrow\; +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \;\rightarrow\; -\infty$$

3. Después calcularemos igual que en el paso anterior, el límite en el punto, por la izquierda y por la derecha, pero esta vez, de -1:

Figura 3.



$$f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^2-1} \;\rightarrow\; x\mapsto\frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

$$f(-x) \;\rightarrow\; \frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \;\rightarrow\; \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \;\rightarrow\; +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \;\rightarrow\; -\infty$$

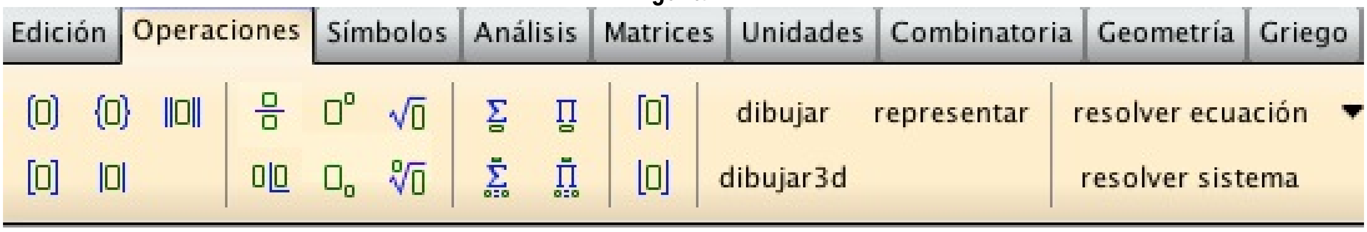
$$\lim_{x\to -1} f(x) \;\rightarrow\; \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \;\rightarrow\; -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \;\rightarrow\; +\infty$$

4. Ahora calcularemos dos límites para comprobar si hay asíntotas horizontales u oblicuas:

Figura 4.



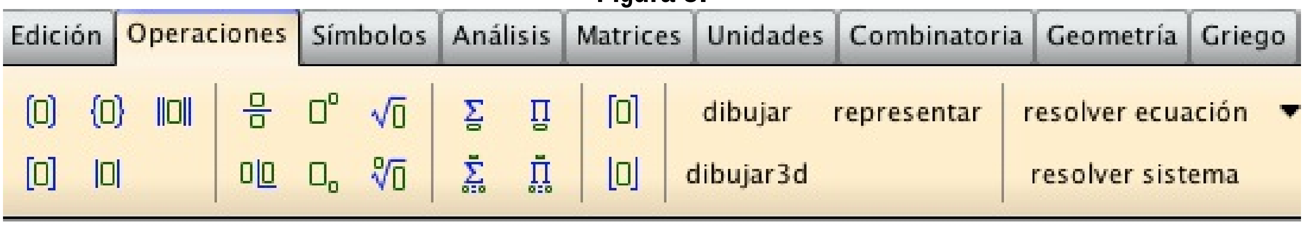
$$f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^2-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$$

5. En este paso, derivaremos la función y luego la resolveremos para conocer los puntos singulares:

Figura 5.



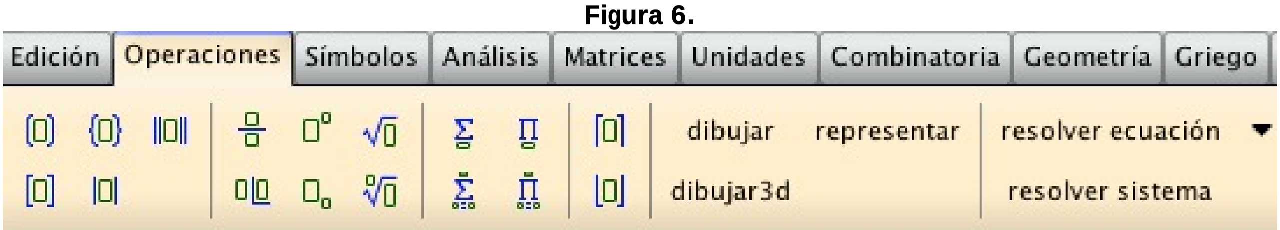
$$f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^2-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^4-2\cdot x^2}{x^2-1}$$

$$f'(x) \rightarrow \frac{2\cdot x^5-4\cdot x^3+4\cdot x}{x^4-2\cdot x^2+1}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{2\cdot x^5-4\cdot x^3+4\cdot x}{x^4-2\cdot x^2+1}=0\right) \rightarrow \{\{x=0\}\}$$

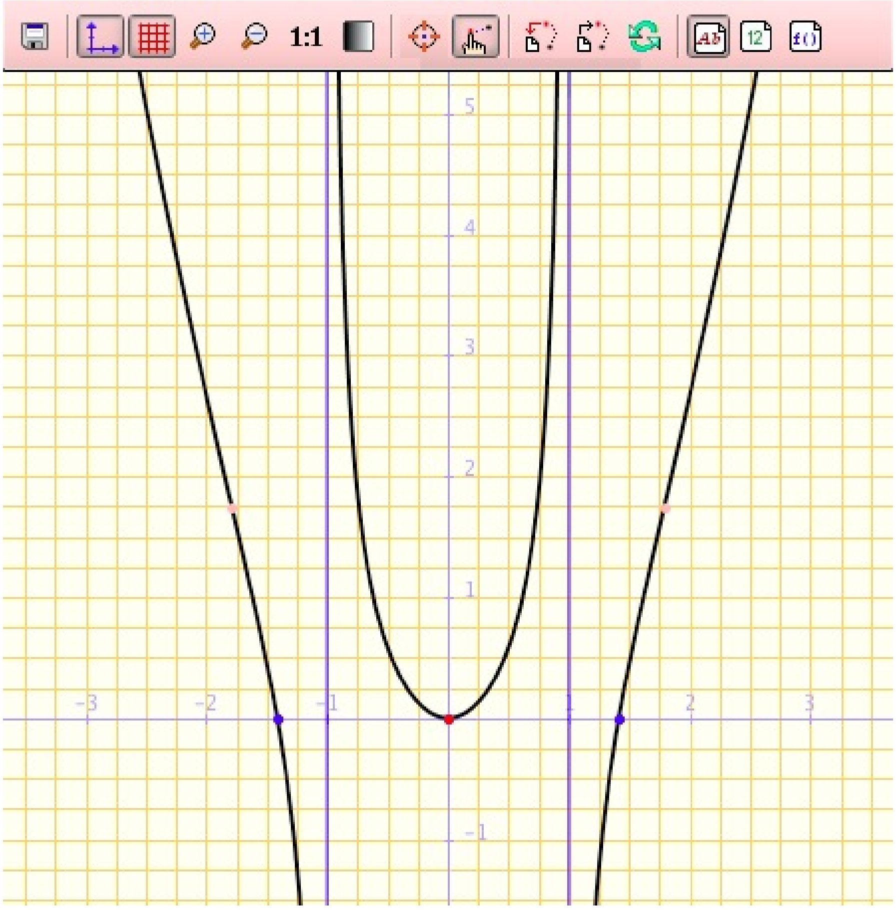
6. Por último, representaremos la función:

Figura 6.



$$\text{representar}\left(\frac{x^4-2x^2}{x^2-1}\right) \rightarrow \text{tablero1}$$

Figura 7.

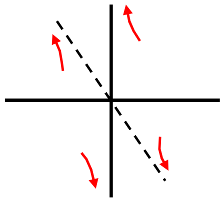


Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

4. Estudio de una función.

Estudia el dominio, las asíntotas, la simetría y los puntos singulares de esta función y haz su gráfica. $y = \dfrac{4-2x^2}{x}$

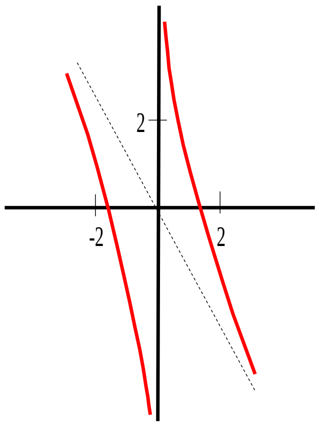


- Simetría $f(-x) = \dfrac{4-2(-x)^2}{-x} = -\dfrac{4-2x^2}{x} = -f(x)$

  Es una función impar y, por tanto, simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Asíntota vertical : x = 0: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4-2x^2}{x} = -\infty, \ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4-2x^2}{x} = +\infty$

- Asíntota oblicua y = -2x. La obtenemos escribiendo la función así: $y = \dfrac{4}{x} - 2x$



$$f(x) - (-2x) = \frac{4}{x}\begin{cases} si\ x \to +\infty, \ f(x) > -2x \\ si\ x \to -\infty, \ f(x) < -2x \end{cases}$$

- Del estudio de las asíntotas deducimos que la curva no va a tener máximos ni mínimos. Lo comprobamos estudiando la derivada:

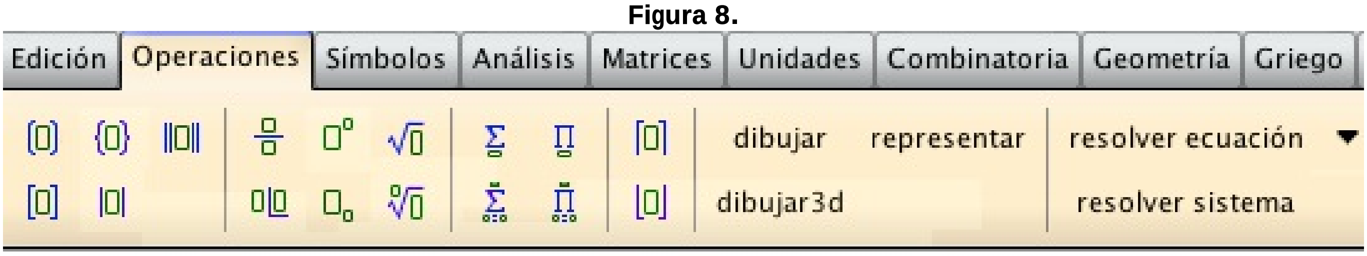
$$y' = \frac{-2x^2 - 4}{x^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 4 = 0 \qquad \text{No tiene solución.}$$

La derivada es negativa para cualquier valor de x, luego la función es decreciente en todo su dominio.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, comprobamos la simetría de la función, escribiéndola con su nombre y luego, escribiendo f(-x), para cambiar el signo a todos los coeficientes de las incógnitas:

Figura 8.

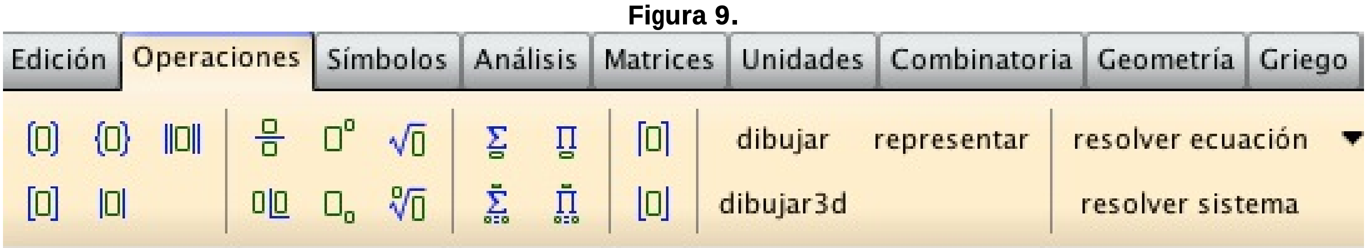


$$f(x) = \frac{4-2x^2}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{2 \cdot x^2 - 4}{-x}$$

$$f(-x) \rightarrow \frac{2 \cdot x^2 - 4}{x}$$

2. Ahora calcularemos el límite de 0 en el punto, por la izquierda y por la derecha:

Figura 9.



$$f(x) = \frac{4-2x^2}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{2 \cdot x^2 - 4}{-x}$$

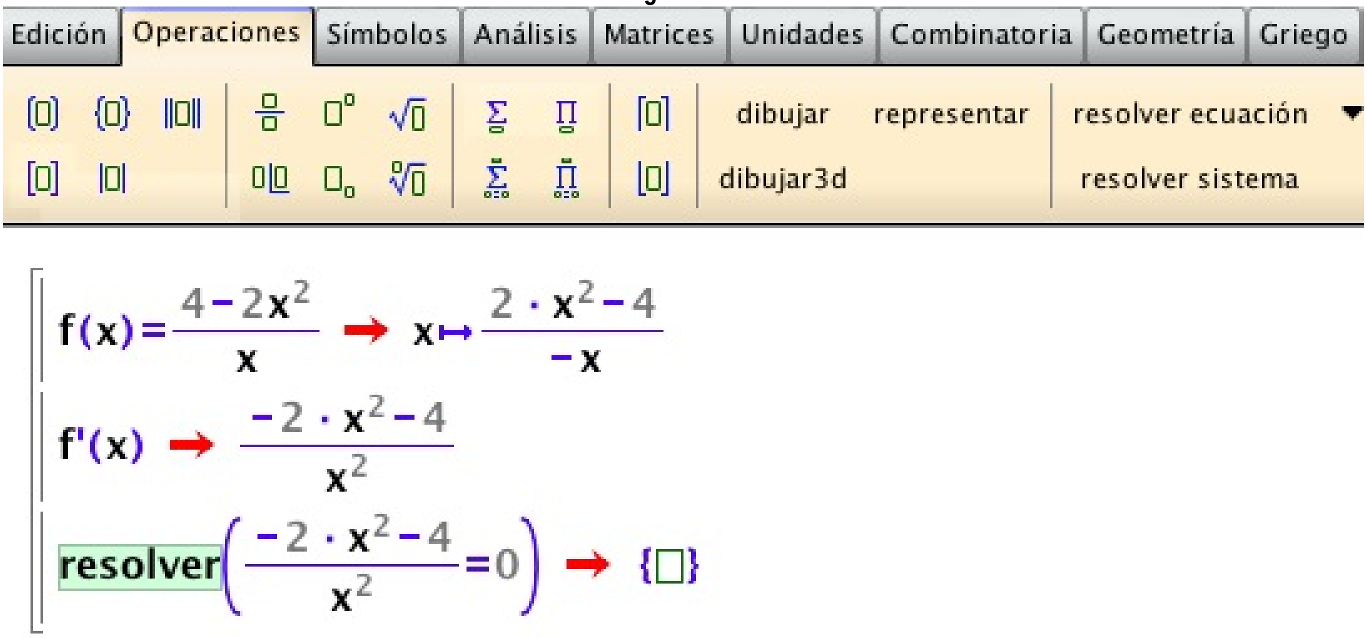
$$\lim_{x \to 0} f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \rightarrow +\infty$$

3. En este paso, comprobaremos que no tiene ni máximos ni mínimos derivando la función y luego igualándola a 0:

Figura 10.



4. Por último, representaremos la función:

Figura 11.

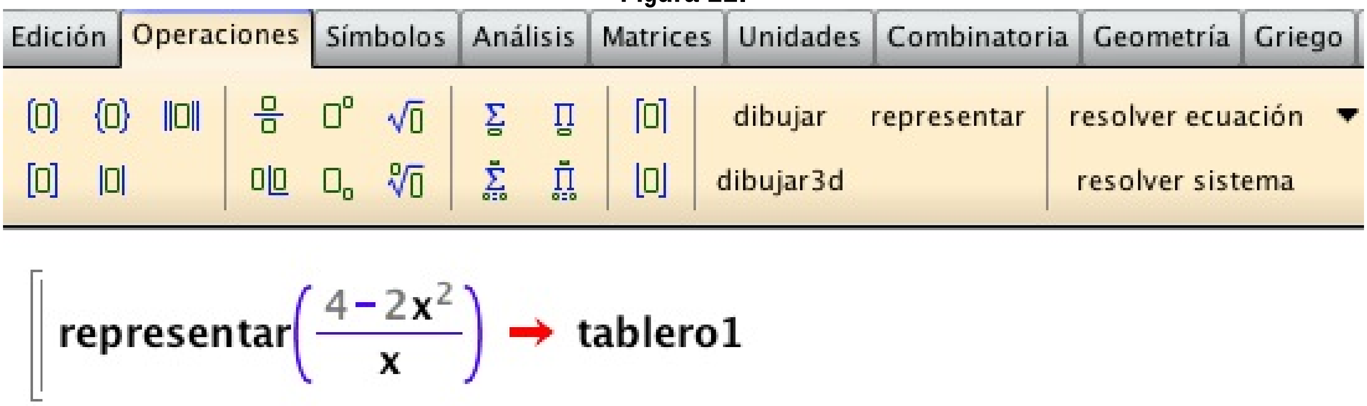
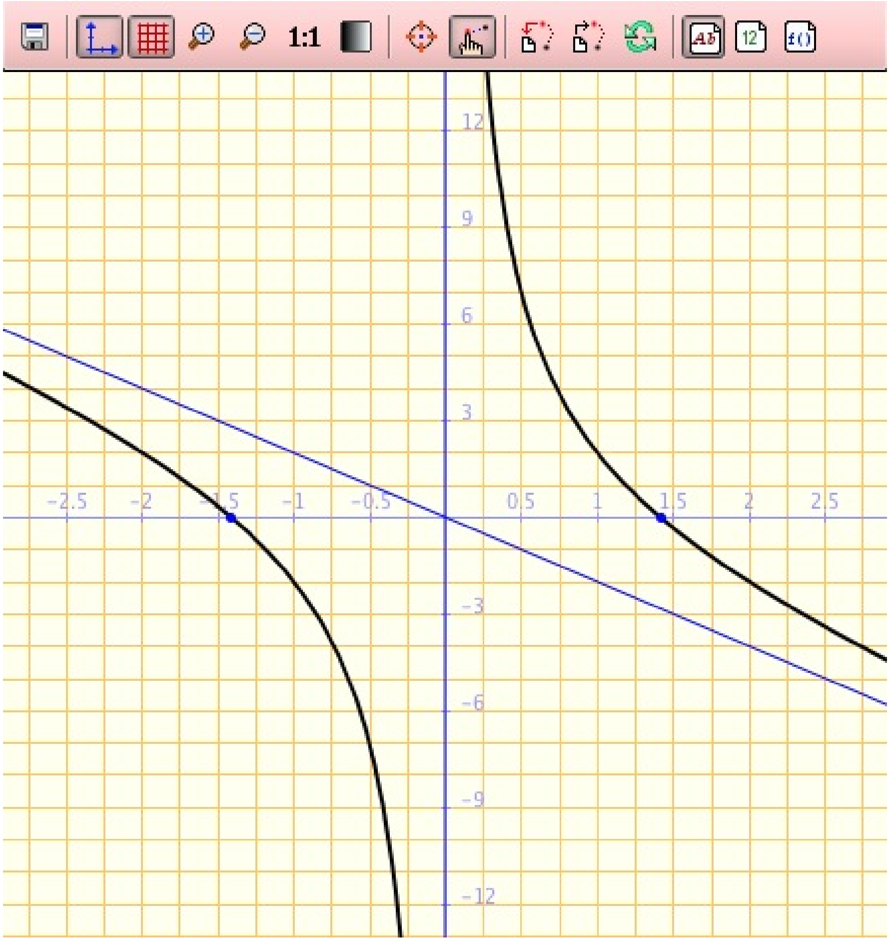


Figura 12.

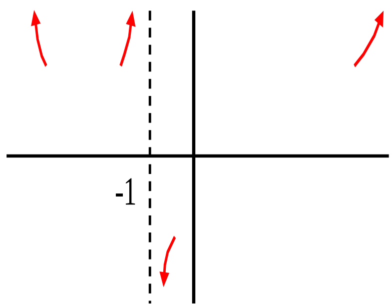


Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

5. Representación de una función.

Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de la función $y=\dfrac{x^3}{3(x+1)}$



- Dominio de definición: $\Re-\{-1\}$. No tiene simetrías.

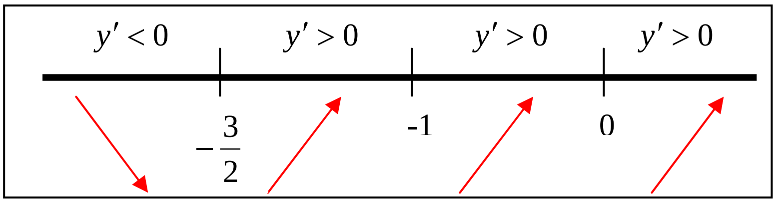
- Asíntota vertical: x = -1 $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{3(x+1)}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{3(x+1)}=-\infty$

- Tiene ramas parabólicas: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{3(x+1)}=\pm\infty$

La curva debe tener un mínimo a la izquierda de x = -1.

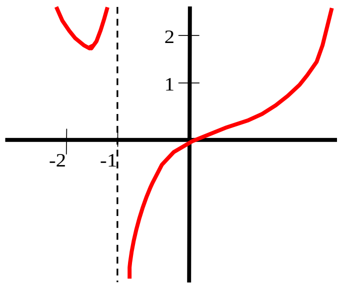
- Puntos singulares: $y' = \dfrac{x^2(2x+3)}{3(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -\dfrac{3}{2}$.

- Signo de la derivada



- Es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ y creciente en el resto del dominio.

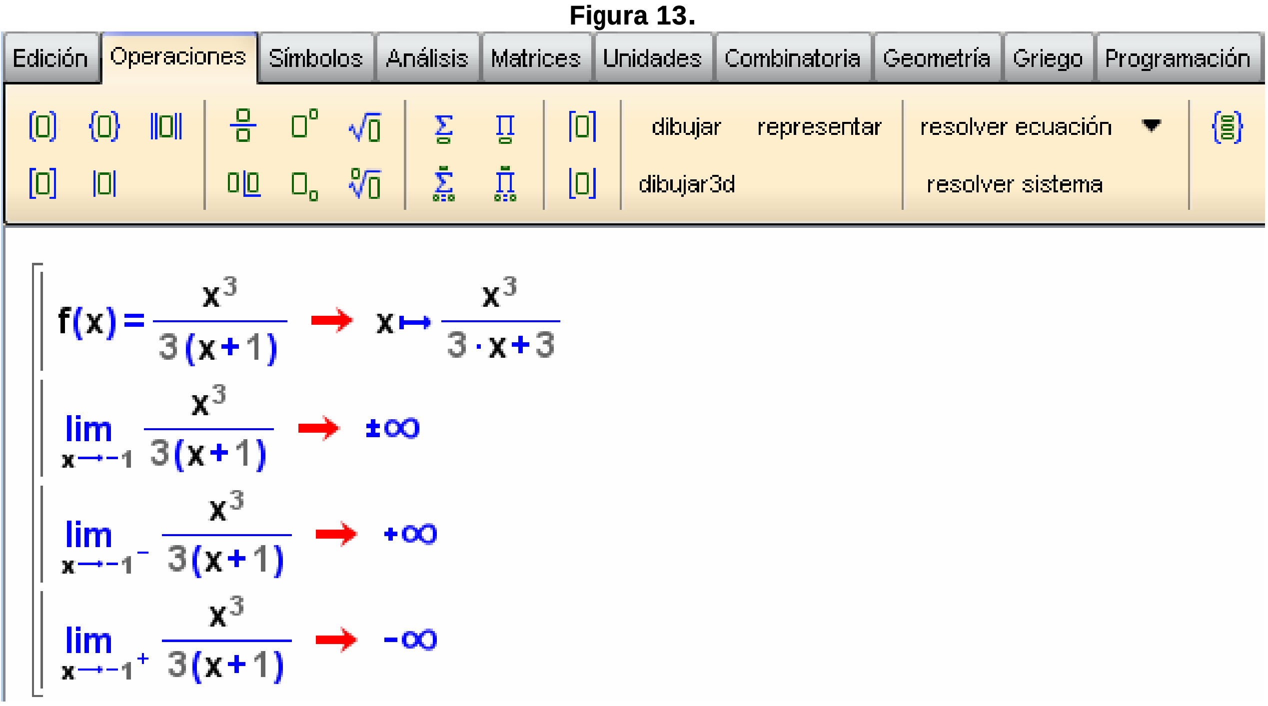
- Tiene un mínimo en $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$. En x = 0 tiene un punto de inflexión.



Ahora resolveremos el problema con Wiris:

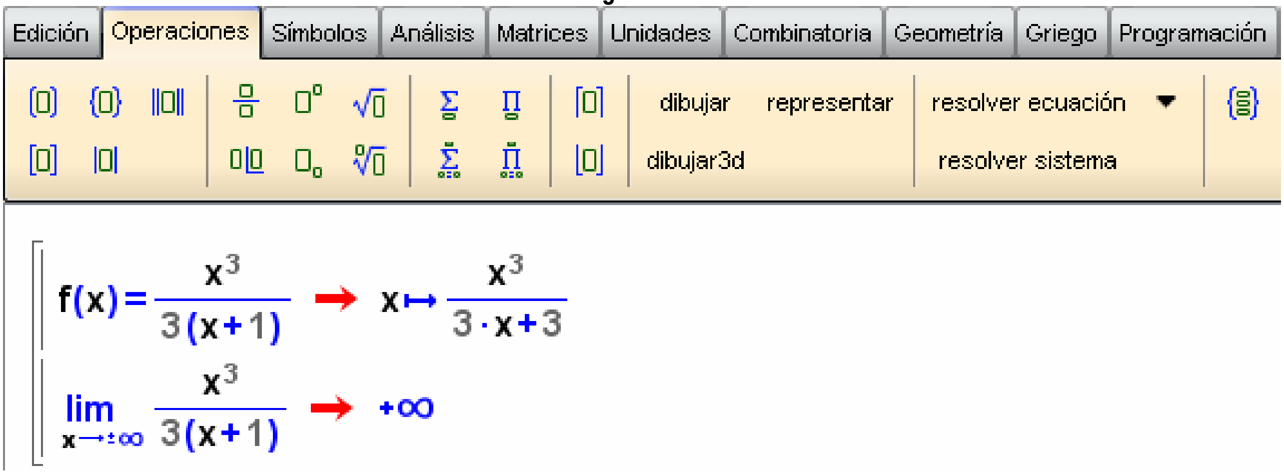
1. En primer lugar, veremos si hay asíntota vertical, calculando el límite de -1 en el punto, por la izquierda y por la derecha:

Figura 13.



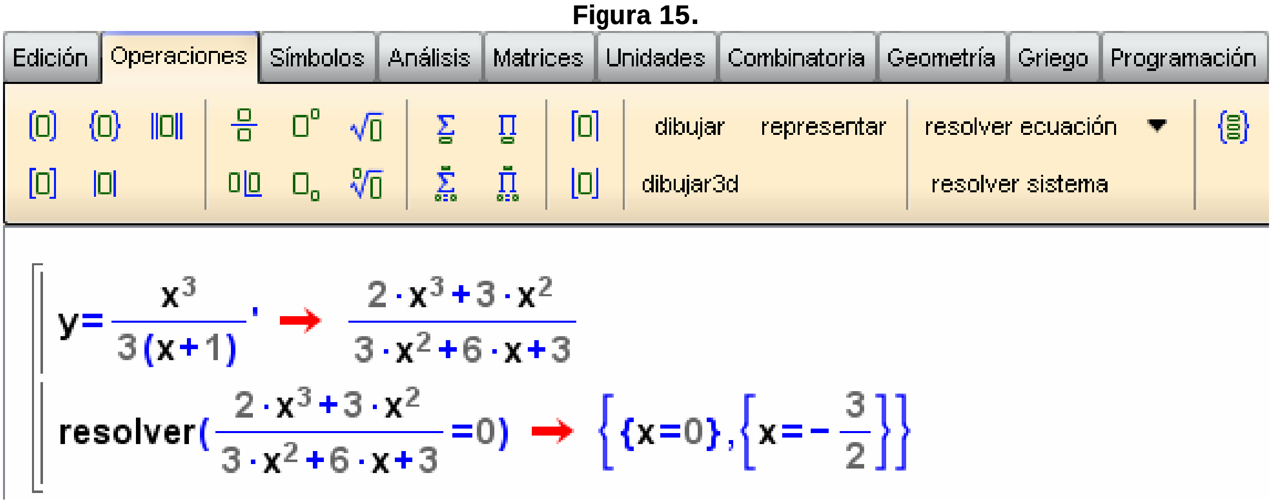
2. Ahora nos centraremos en las ramas parabólicas calculando otro límite:

Figura 14.



3. En este paso, conoceremos cuáles son los puntos críticos resolviendo la función:

Figura 15.



4. Por último, representaremos la función:

Figura 16.

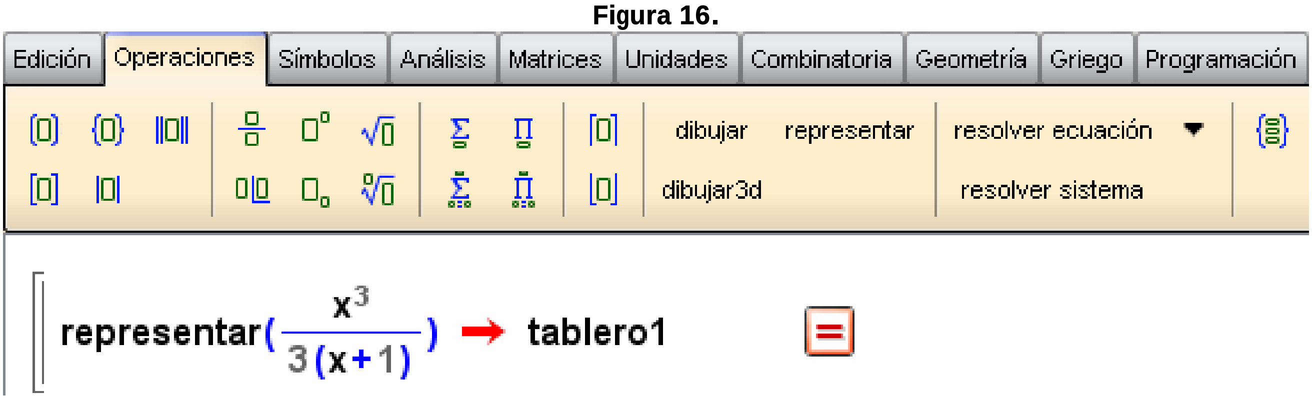
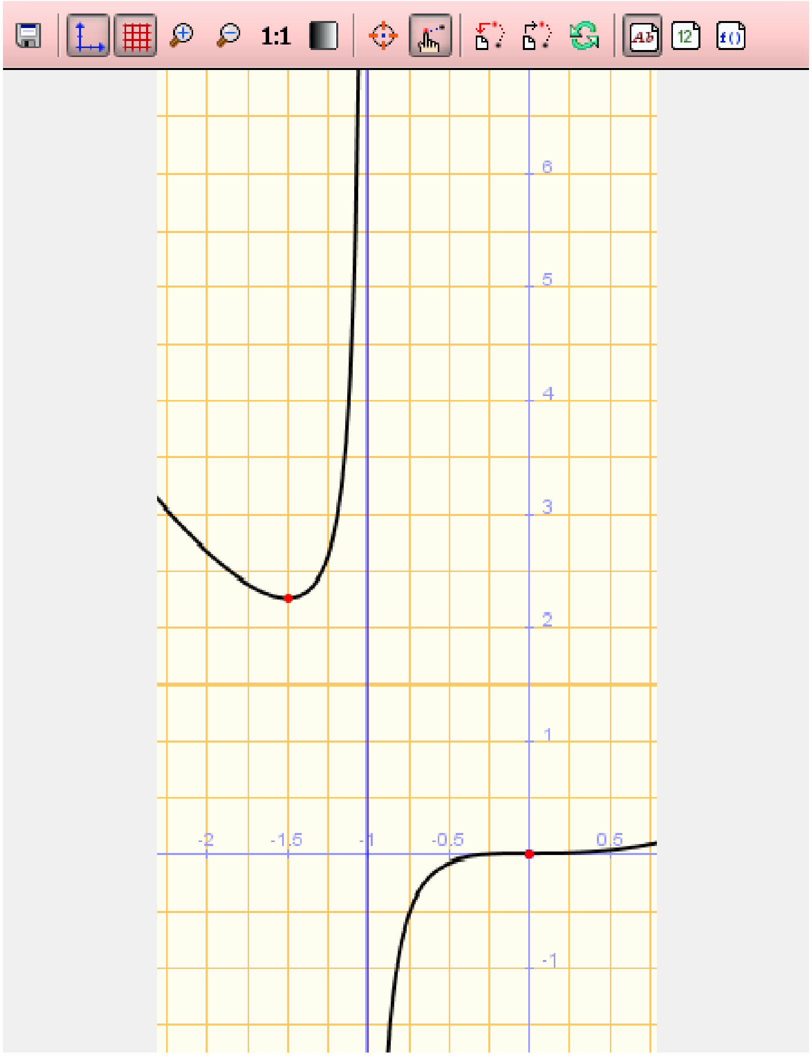


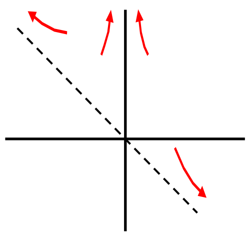
Figura 17.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

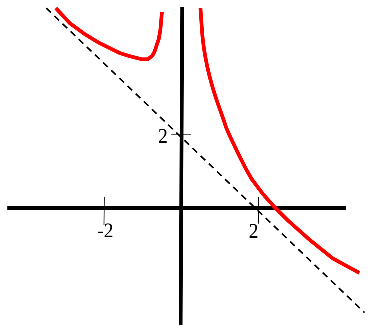
6. Representación de una función.

Estudia y representa la función $y = \dfrac{4+2x^2-x^3}{x^2}$

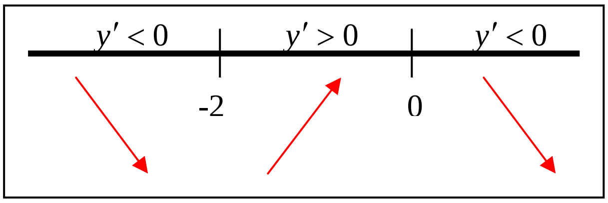


- Dominio de definición: $\Re - |0|$. No es simétrica.
- Asíntota vertical: x = 0 $\begin{cases} si \;\; x \to 0^-, \; y \to +\infty \\ si \;\; x \to 0^+, \; y \to +\infty \end{cases}$
- Asíntota oblicua: y = 2 – x, porque $y = \dfrac{4}{x^2} + 2 - x$

Posición: $f(x)-(2-x)=\dfrac{4}{x^2}\begin{cases} si\ \ x\to+\infty,\ \ f(x)>2-x \\ si\ \ x\to-\infty,\ \ f(x)>2-x \end{cases}$



- $y'=\dfrac{-x^3-8}{x^3}\to y'=0\to x=-2$



Tiene un mínimo en $x=-2\to f(-2)=5.$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calcularemos el límite cuando x tiende a 0 por ambos lados, y para ello utilizamos la función de límite dentro de la pestaña ‘Análisis’. Después calcularemos f(x)-(2-x), y la derivada de la función que luego igualaremos a 0 como en ejercicios anteriores. Por último, representamos la función:

Figura 18.

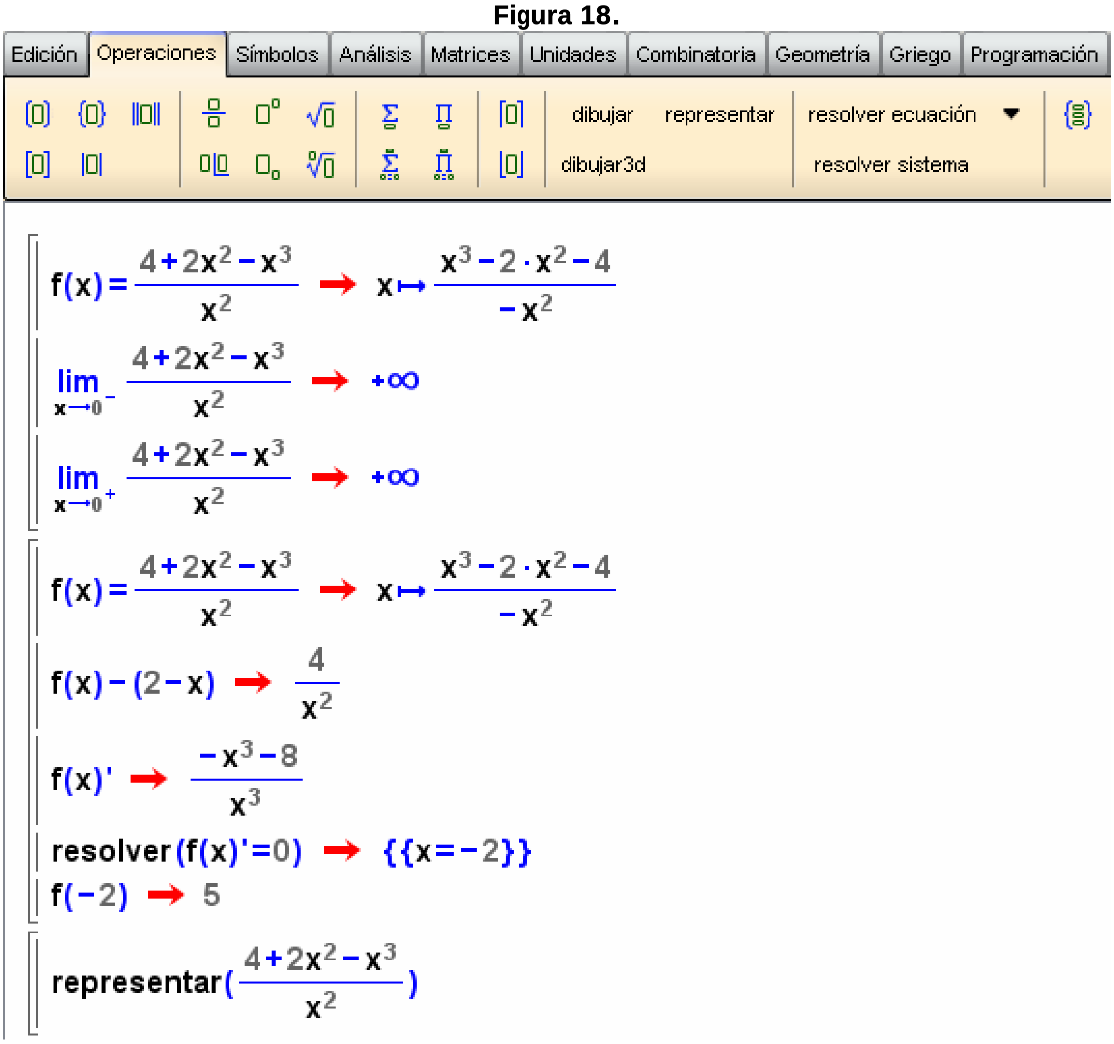
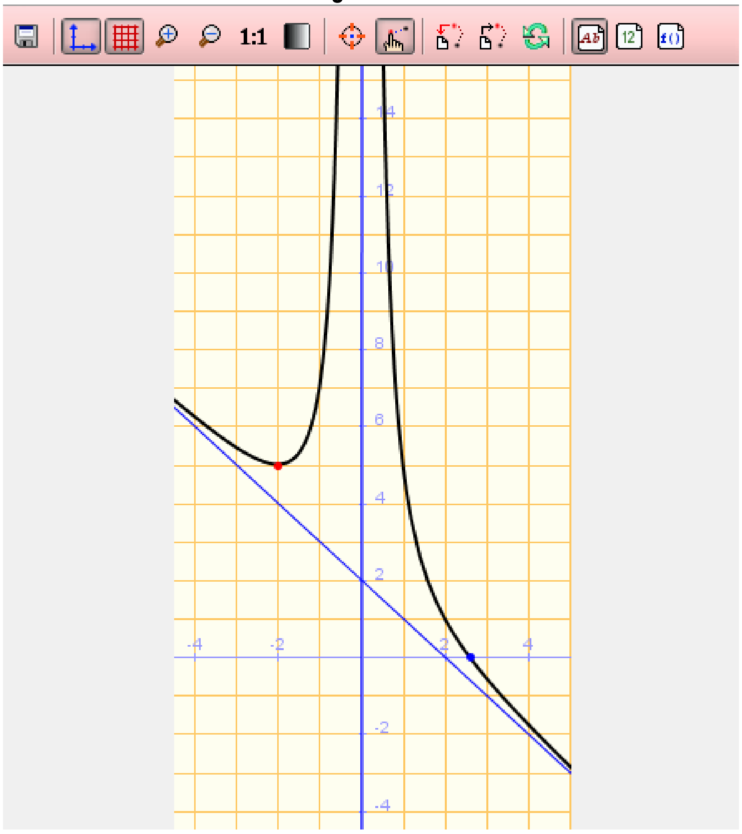


Figura 19.

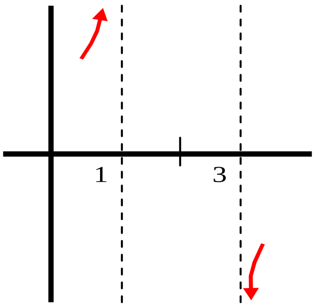


Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

7. Función logarítmica.

Estudia el dominio de definición, las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas de la función $y = \ln \dfrac{x-3}{x-1}$. ***Represéntala gráficamente.***



- La función esta definida si $\dfrac{x-3}{x-1} > 0$. Dominio de definición: $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

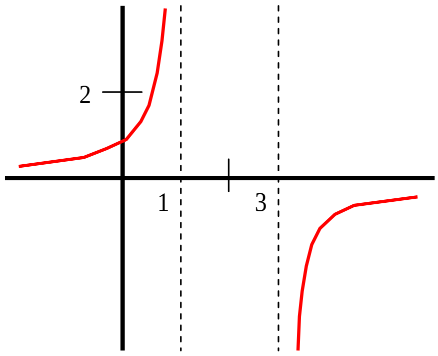
- Comportamiento de la función en las proximidades de x = 1 y x = 3:

$$\lim_{x\to 1^-} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x-1} = \ln +\infty = +\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-1} = \ln 0 = -\infty$$

- Las rectas x = 1 y x = 3 son asíntotas verticales.

- La curva tiene también una asuntota horizontal, ya que:

$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x-3}{x-1} = \ln \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$ por tanto y = 0 es asíntota horizo



$$\begin{cases} si\ x \to +\infty,\ y > 0 \\ si\ x \to -\infty,\ y < 0 \end{cases}$$

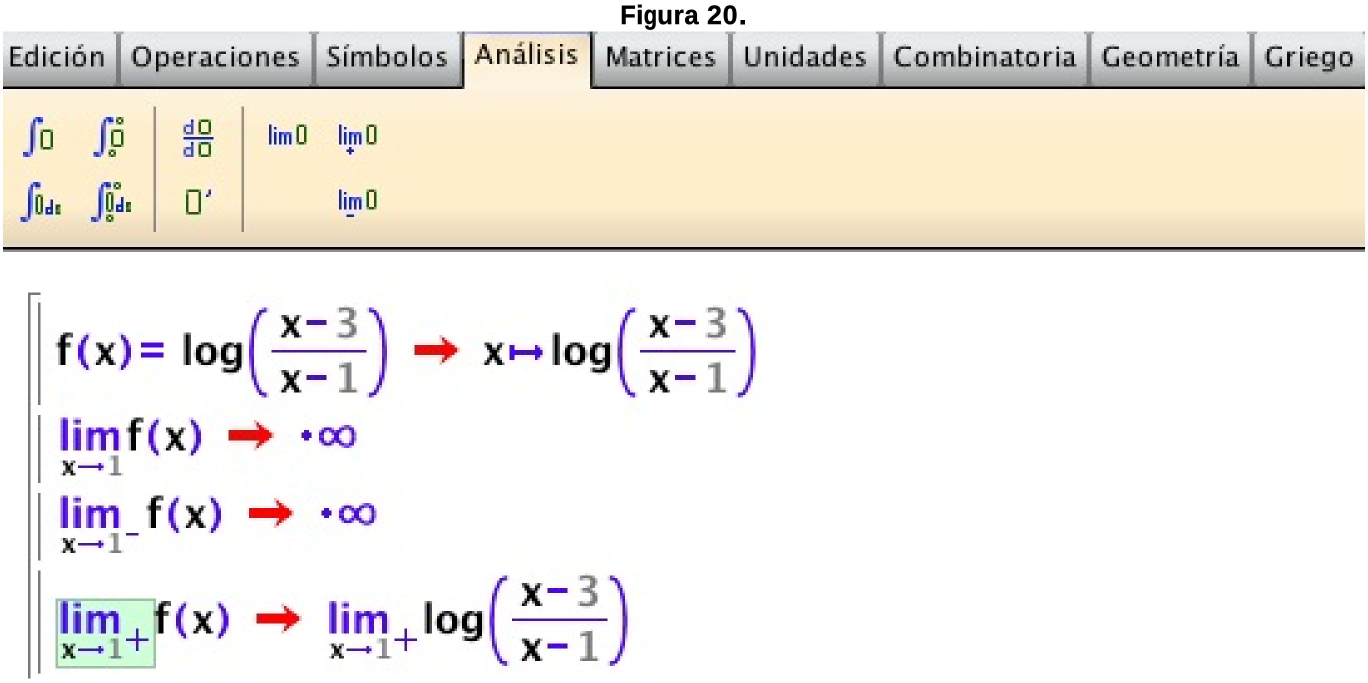
- La curva no corta al eje OX, ya que si hacemos:

$y = 0,\ \ln\frac{x-3}{x-1} = 0 \to \frac{x-3}{x-1} = 1 \to x-3 = x-1$ No tiene solución.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

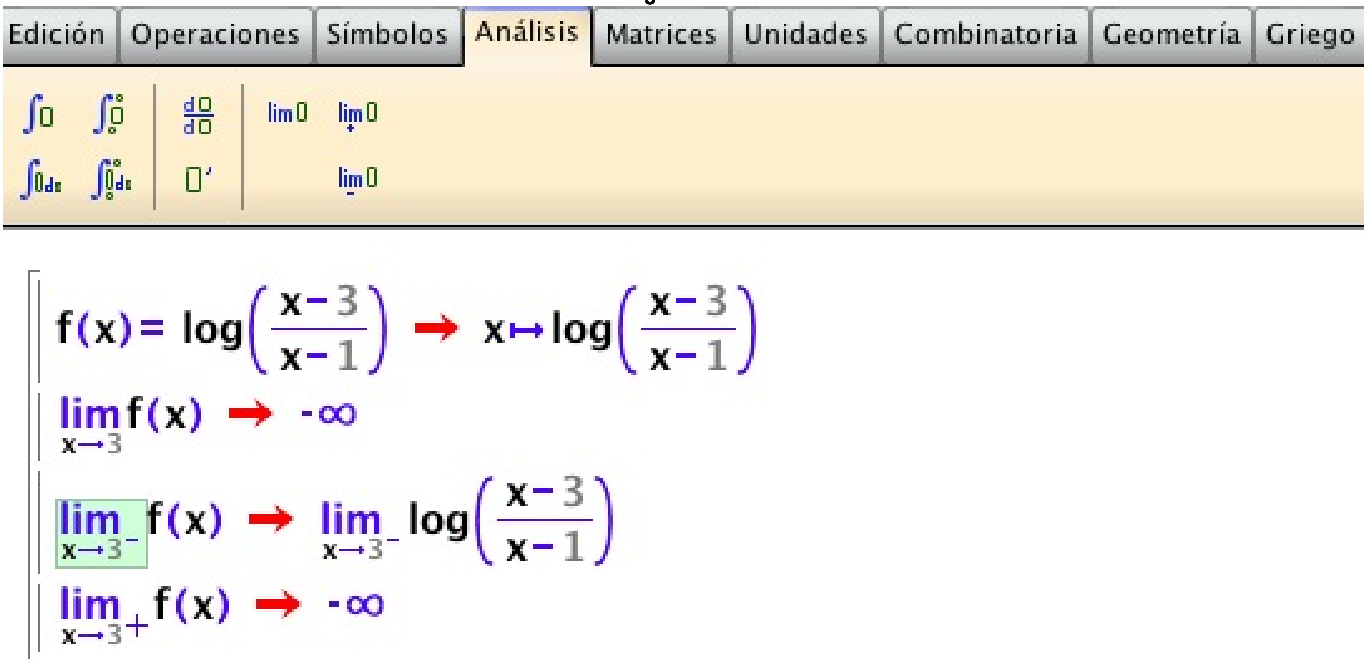
1. Primero veremos si hay asíntotas verticales en 1 calculando los límites en el punto, por la izquierda y por la derecha:

Figura 20.



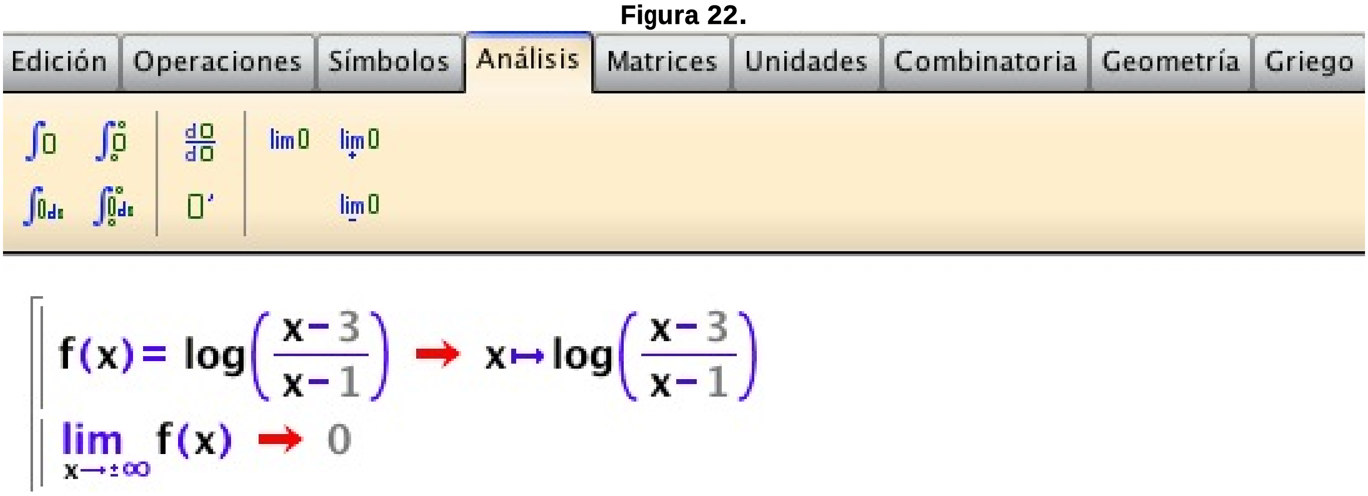
2. Ahora haremos el mismo paso que el anterior pero en vez de con 1 con 3:

Figura 21.



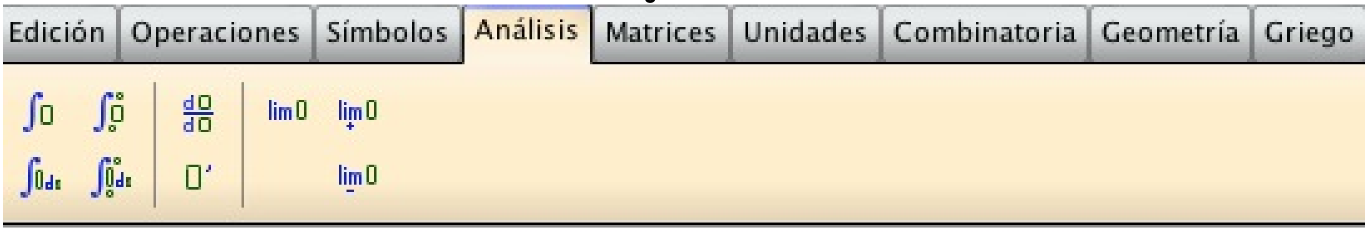
3. A continuación comprobaremos la existencia de una asíntota horizontal calculando otro límite:

Figura 22.



4- Debemos comprobar que la función no corta al eje OX y para ello comprobamos que el sistema no tiene solución:

Figura 23.

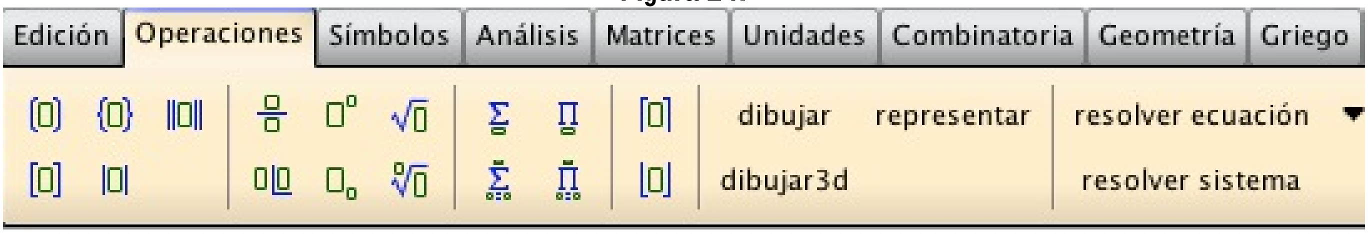


$$f(x)=\log\left(\frac{x-3}{x-1}\right) \rightarrow x\mapsto\log\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$$

$$\text{resolver}\left(\log\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=0\right) \rightarrow \{\square\}$$

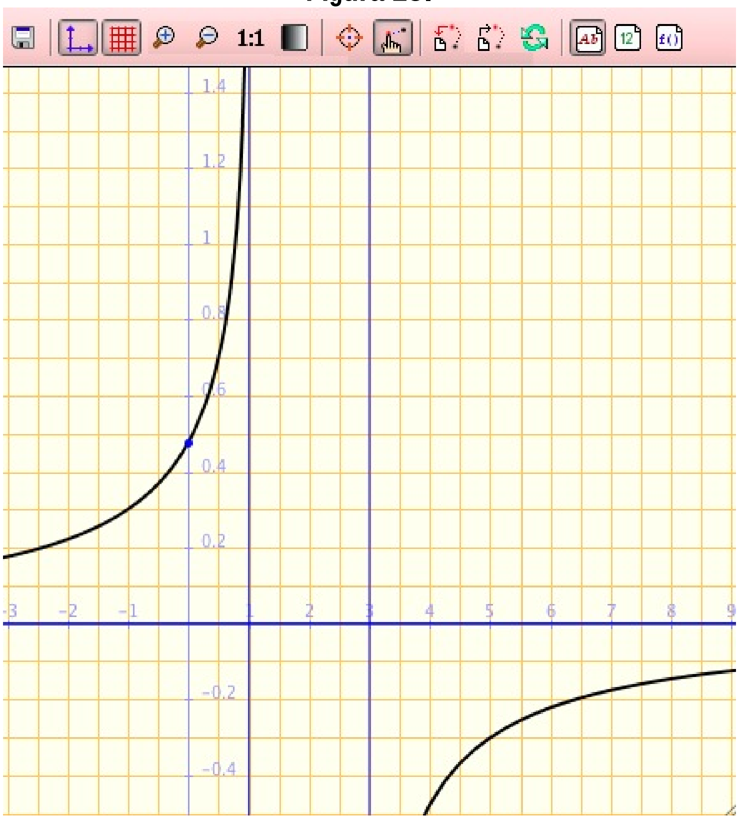
5. Representaremos la función:

Figura 24.



$$\text{representar}\left(\log\left(\frac{x-3}{x-1}\right)\right) \rightarrow \text{tablero1}$$

Figura 25.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

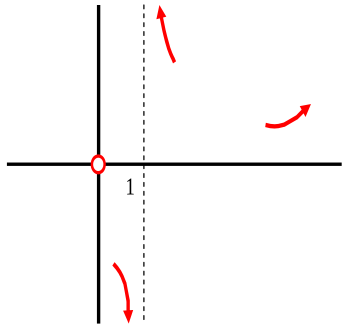
8. Estudio y gráfica.

Estudia y representa las siguientes funciones: $a)\ y=\dfrac{x}{\ln\ x}$ $\quad b)\ y=e^{x}\ (x-2)$ $\quad c) y=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$

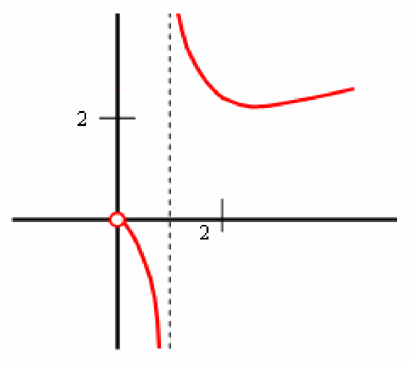
a)

- Dominio: $(0,1)\bigcup(1,+\infty)$.
- Comportamiento de la función cerca de x = 0: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x}=0$.

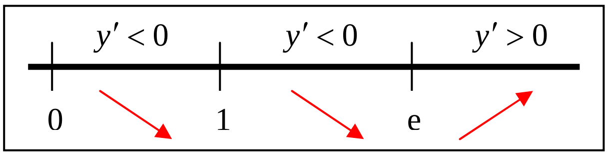
  No tiene asíntota en x = 0.
- Asíntota vertical: $x=1\to\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{\ln x}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$



- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\to\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1/x}=+\infty$
- Tiene rama parabólica: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$



- $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e\Leftrightarrow f(e)=e$
- Signo de y´:

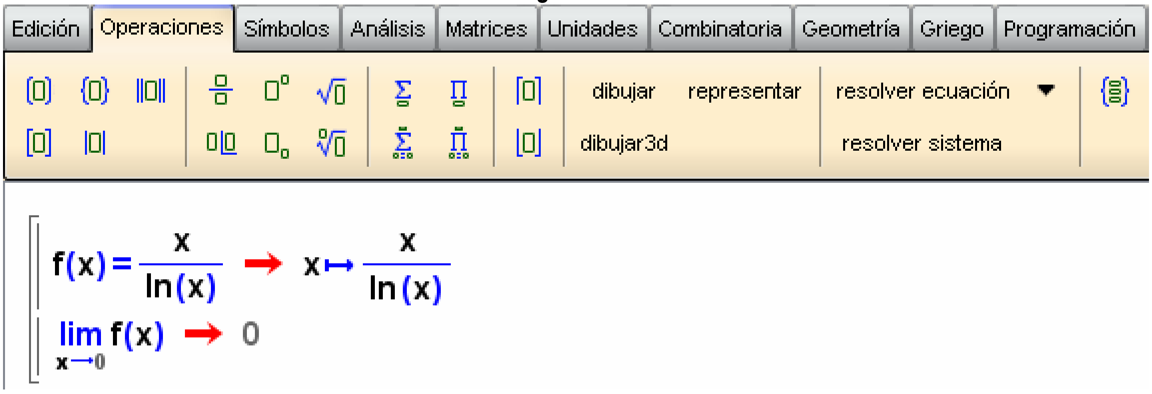


Crece en $(e,+\infty)$. Decrece en $(0,1)\bigcup(1,e)$. Mínimo (e,e)

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

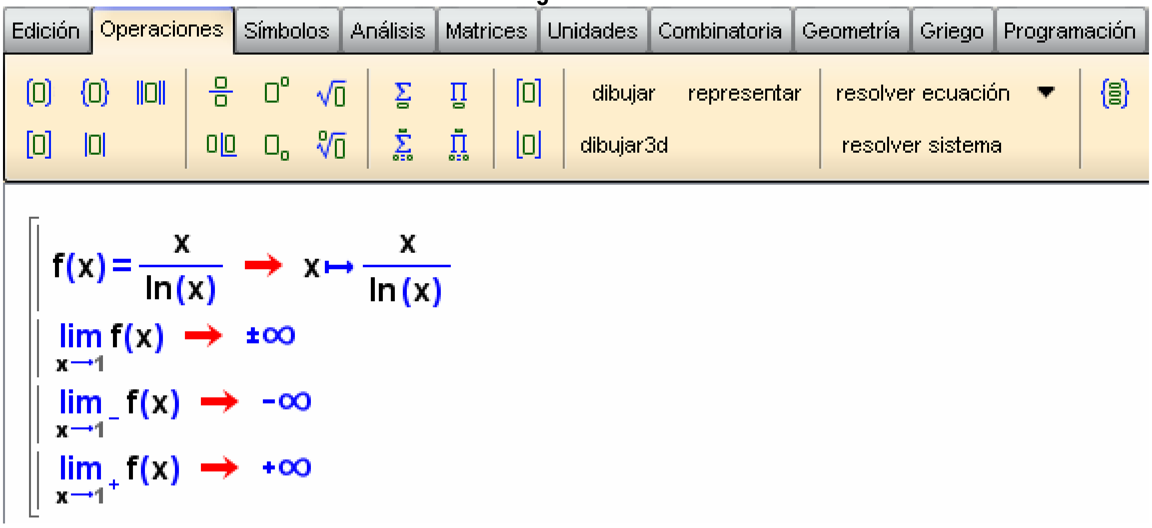
1. Primero veremos cómo se comporta la función en 0:

Figura 26.



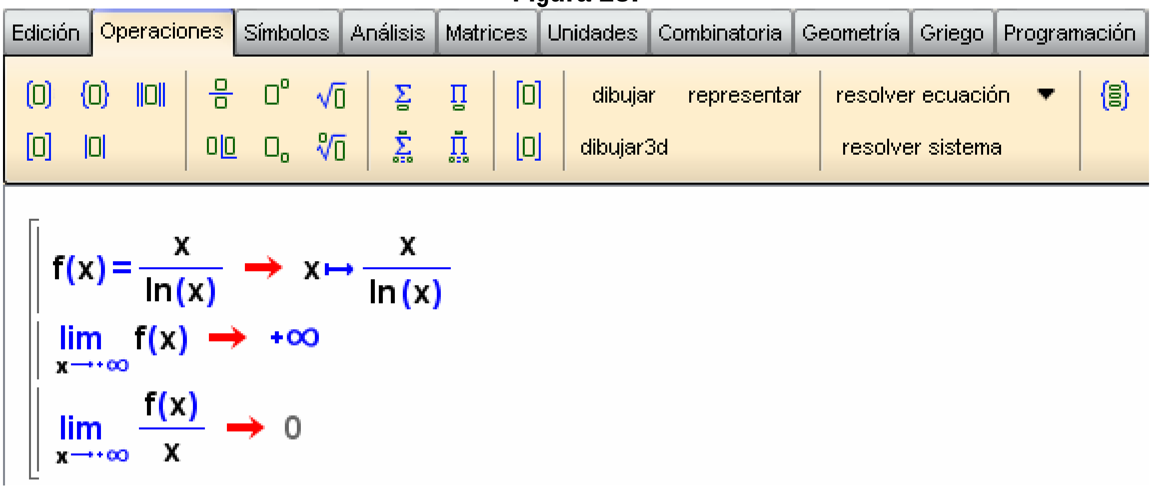
2. Ahora comprobaremos si hay asíntotas verticales en 1 calculando los límites en el punto, por la izquierda y por la derecha:

Figura 27.



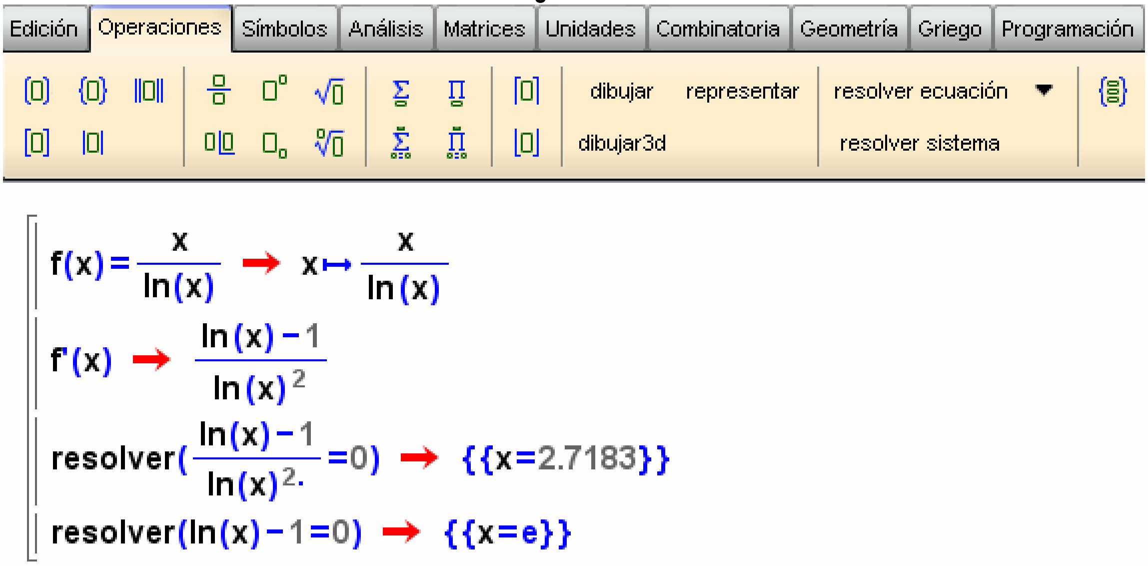
3. A continuación comprobaremos la existencia de ramas infinitas y parabólicas calculando otros dos límites:

Figura 28.



4. En este paso, calcularemos los puntos críticos:

Figura 29.



5. Representaremos la función:

Figura 30.

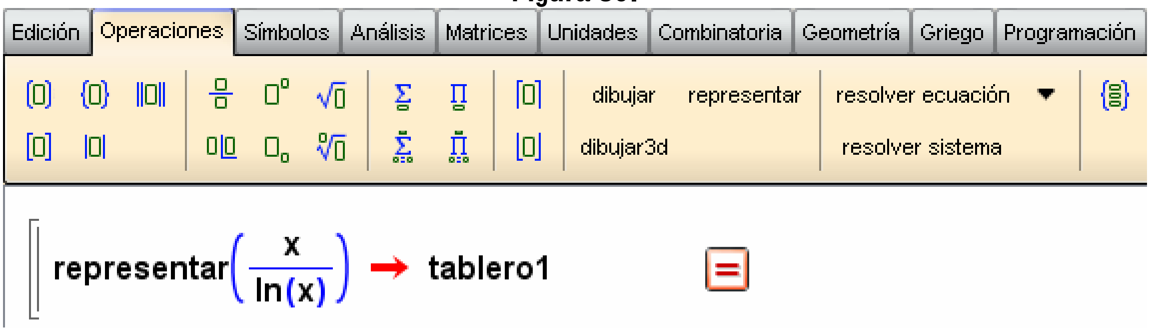
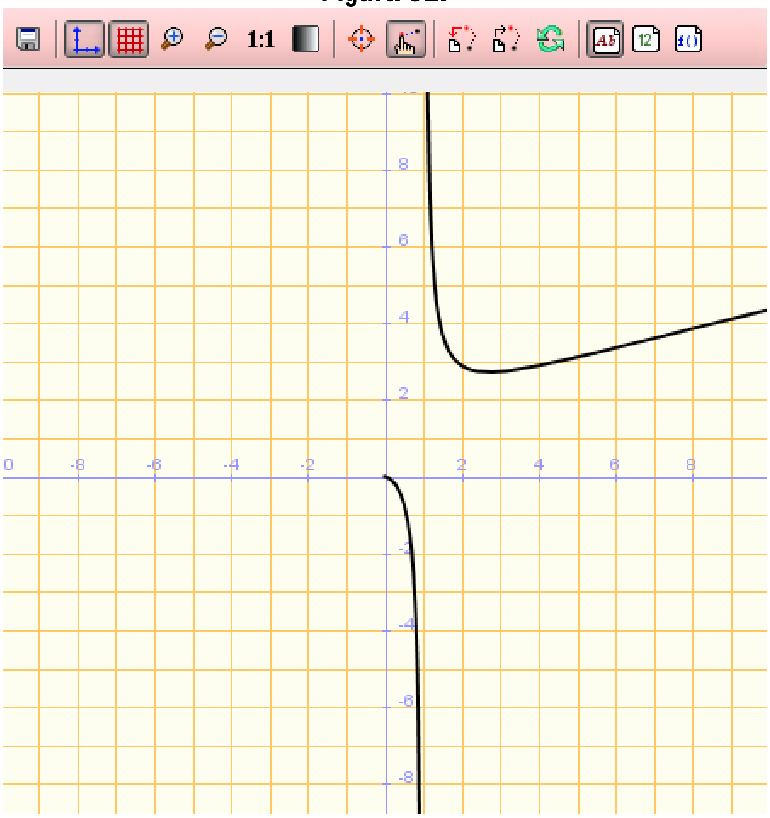


Figura 31.

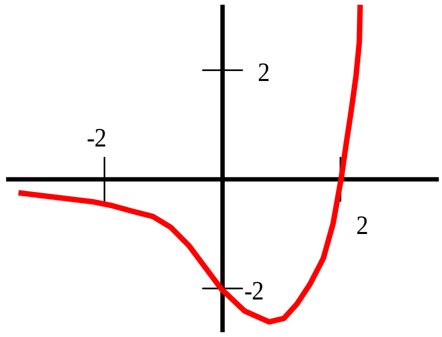


Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b)

- Dominio: $\Re$. No tiene asíntotas verticales.

- Para hallar las ramas infinitas, debemos tener en cuenta que: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$



- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(x-2) = +\infty \to \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-2)}{x} = +\infty$

- Tiene asíntota horizontal y = 0 hacia $-\infty$ y rama parabólica hacia $+\infty$.

- Estudio de la derivada: $y' = e^x(x-1) \to e^x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \to f(1) = -e$

Signo de y´:

$y' < 0$		$y' > 0$
$\searrow$	1	$\nearrow$

Recuerda que $e^x > 0$ para todo x.

- Decrece en $(-\infty,1)$. Crece en $(1,+\infty)$. Mínimo: $(1,-e)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Lo primero que debemos hacer es calcular las ramas infinitas, y para ello calcularemos los límites:

Figura 32.

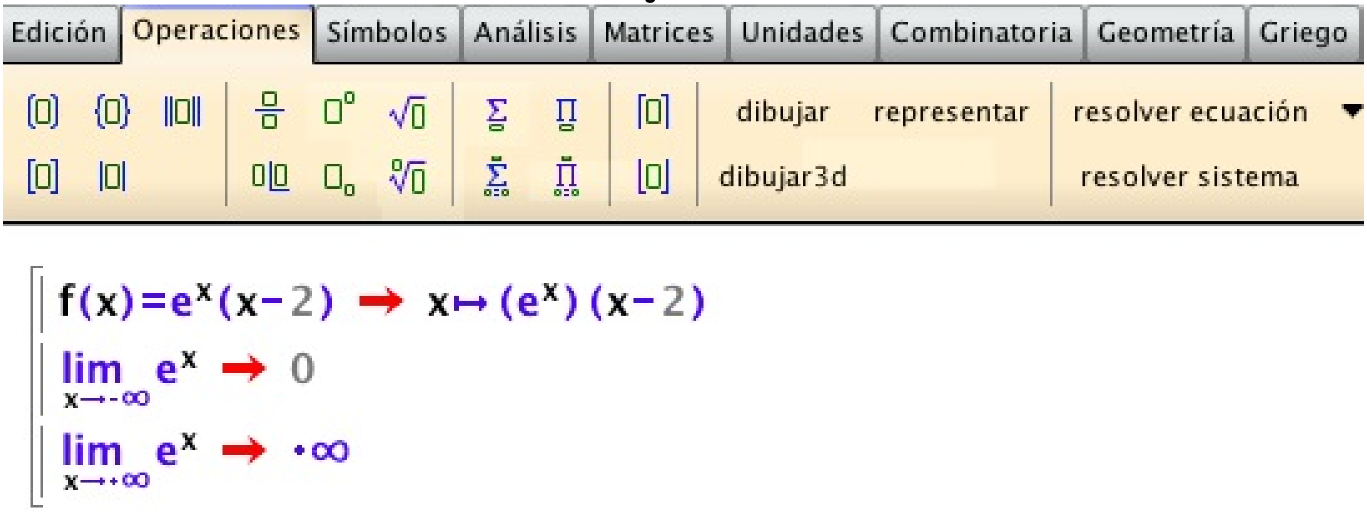


Figura 33.

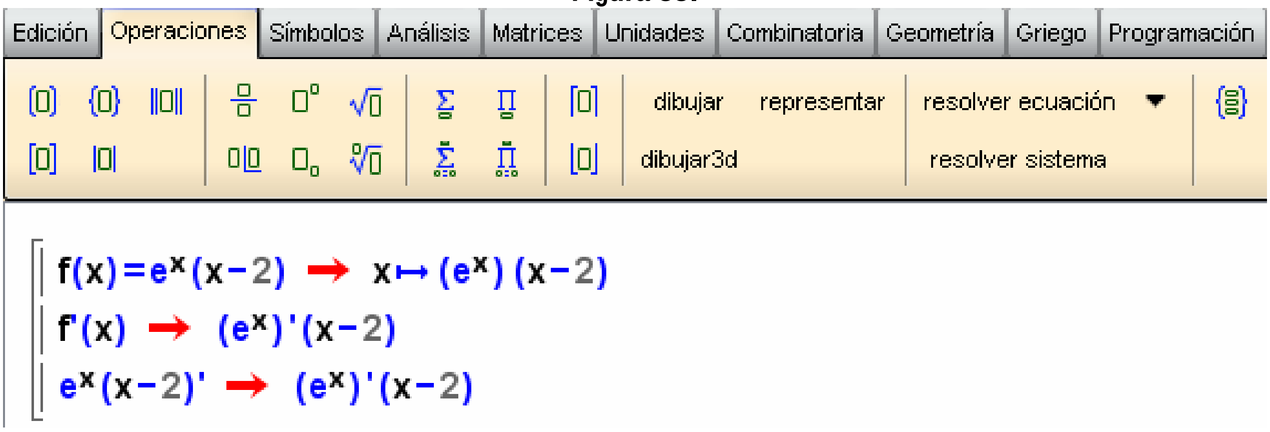


Figura 34.

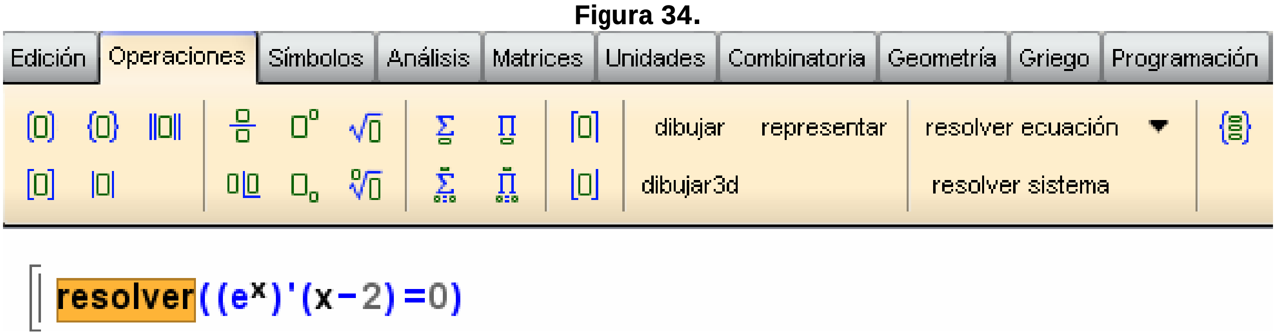


Figura 35.

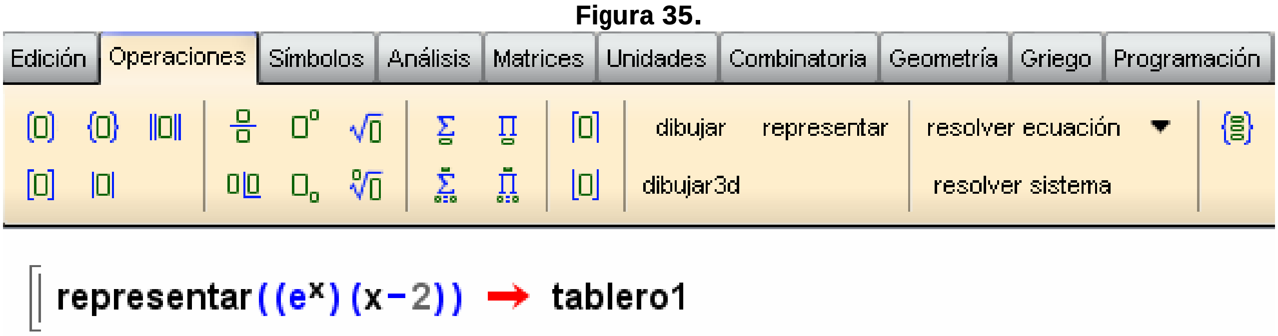
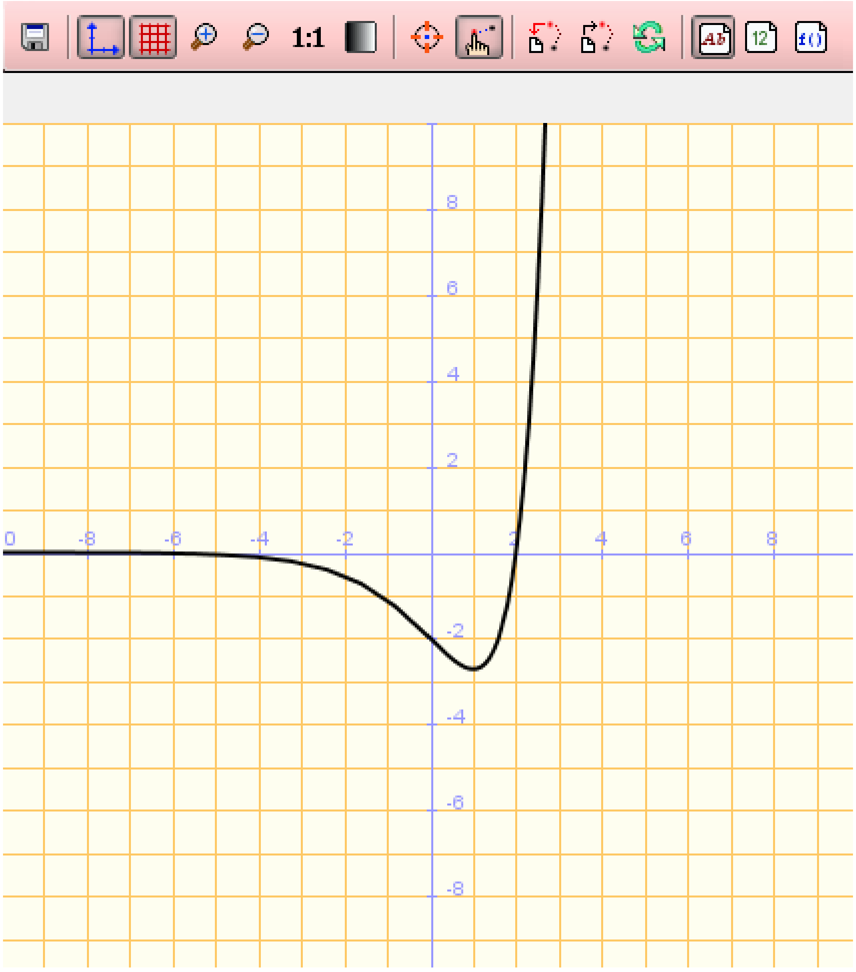
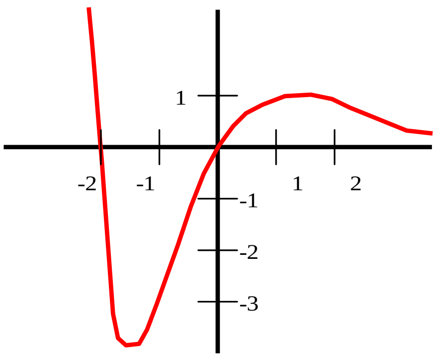


Figura 36.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS



c)

- Dominio: $\Re$. No tiene asíntotas verticales.
- Ramas infinitas: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{e^x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x}{e^x}=+\infty$
- Tiene asíntota horizontal y = 0 cuando $x\to+\infty$ y rama parabólica cuando $x\to-\infty$.
- Estudio de la derivada $y'=\dfrac{2-x^2}{e^x}\to y'=0\to x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}.$

$y' < 0$	$-\sqrt{2}$	$y' > 0$	$\sqrt{2}$	$y' < 0$
↘		↗		↘

Signo de y´:

Crece en: $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Decrece en: $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

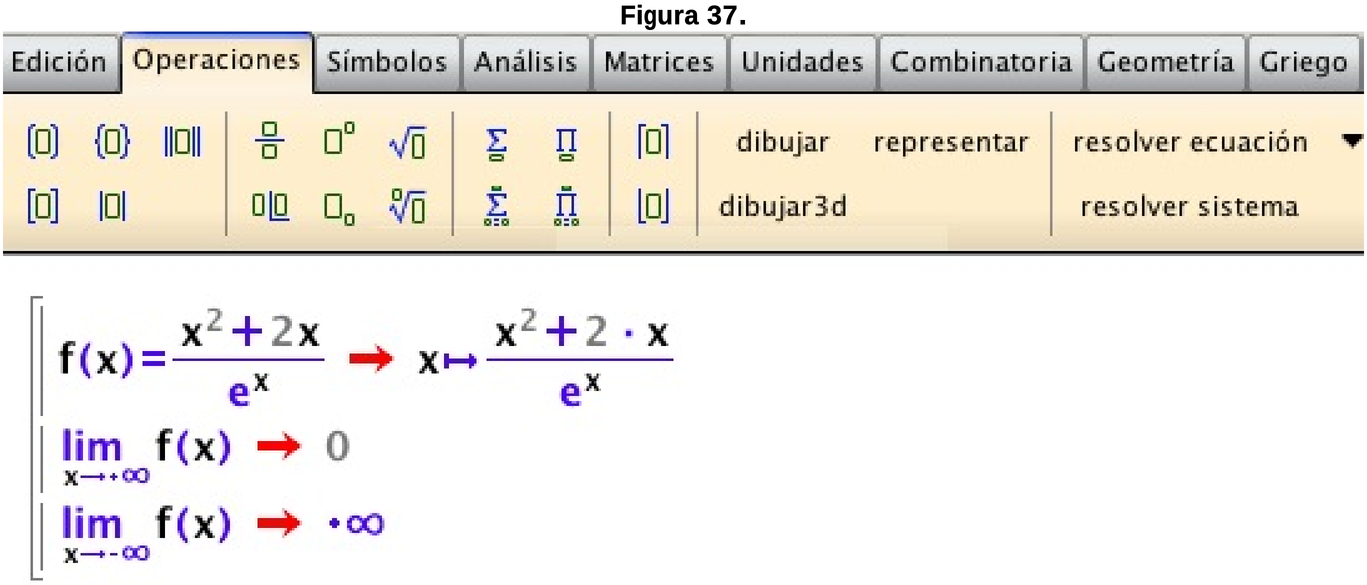
Mínimo: $\left(-\sqrt{2},\dfrac{2-2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}}\right)$

Máximo: $\left(\sqrt{2},\dfrac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

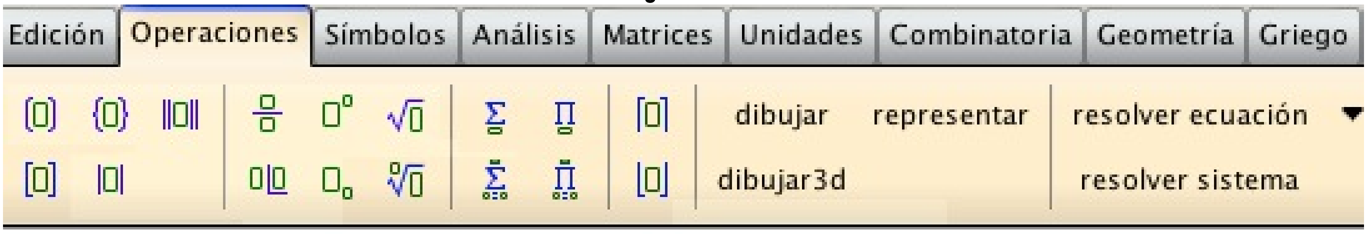
1. Lo primero que debemos hacer es calcular las ramas infinitas, y para ello haremos dos límites:

Figura 37.



2. Después estudiamos la derivada, igualándola a 0:

Figura 38.



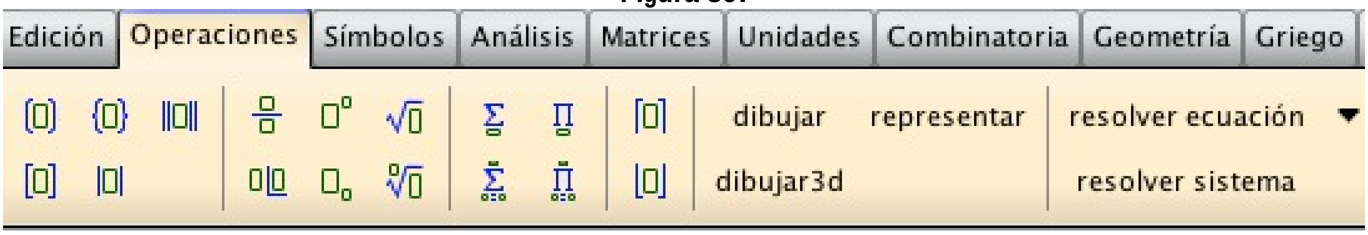
$$f(x)=\frac{x^2+2x}{e^x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+2\cdot x}{e^x}$$

$$f'(x) \rightarrow \frac{-x^2+2}{e^x}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{-x^2+2}{e^x}=0\right) \rightarrow \{\{x=-\sqrt{2}\},\{x=\sqrt{2}\}\}$$

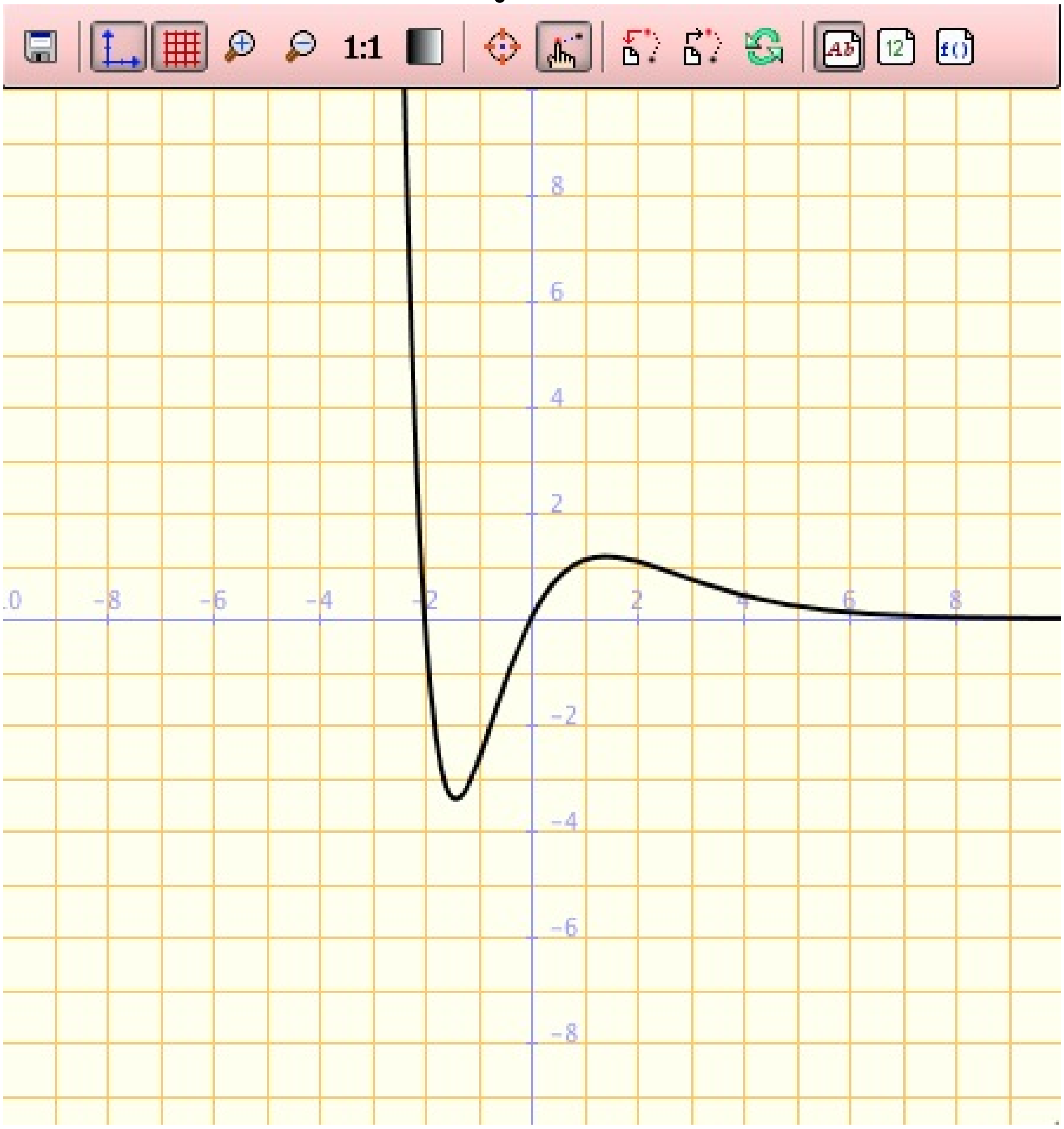
3. Por último, representamos la función:

Figura 39.



$$\text{representar}\left(\frac{x^2+2x}{e^x}\right)$$

Figura 40.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

9. Función trigonométrica.

Estudia los puntos de corte con los ejes y los máximos y mínimos de la función: $y = \cos 2x - \cos x, x \in [0,2\pi]$ ***Representa la función utilizando esa información.***

- Dominio: $[0,2\pi]$ es continua y derivable.

- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} x=0,\ y=0 \\ y=0 \rightarrow \cos 2x - \cos x = 0 \end{cases}$ $\cos^2 x - sen^2 x - \cos x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = 1 \begin{cases} x = 0 \to (0,0) \\ x = 2\pi \to (2\pi, 0) \end{cases} \qquad \cos x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = 2\pi/3 \to (2\pi/3, 0) \\ x = 4\pi/3 \to (4\pi/3, 0) \end{cases}$$

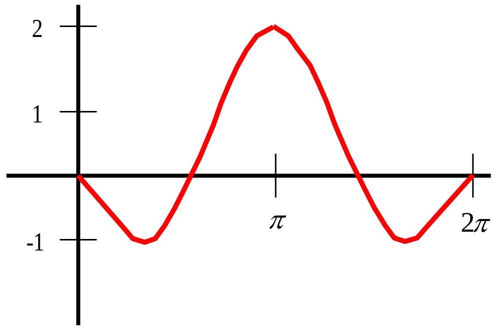
- Máximos y mínimos: $y' = -2\,sen\,2x + sen\,x$

$$y' = 0 \to -4\,sen\,x\cos x + sen\,x = 0 \to sen\,x(-4\cos x + 1) = 0 \begin{cases} sen\,x = 0 \to x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ -4\cos x + 1 = 0 \to \cos x = 1/4 \to x \approx 1{,}32; x \approx 4{,}96 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $y'' = -4\cos 2x + \cos x$ en esos puntos:

$y'' < 0$ *en* $x = 0,\ x = \pi\ y\ x = 2\pi$
Máximos: $(0,0), (\pi, 2), (2\pi, 0)$

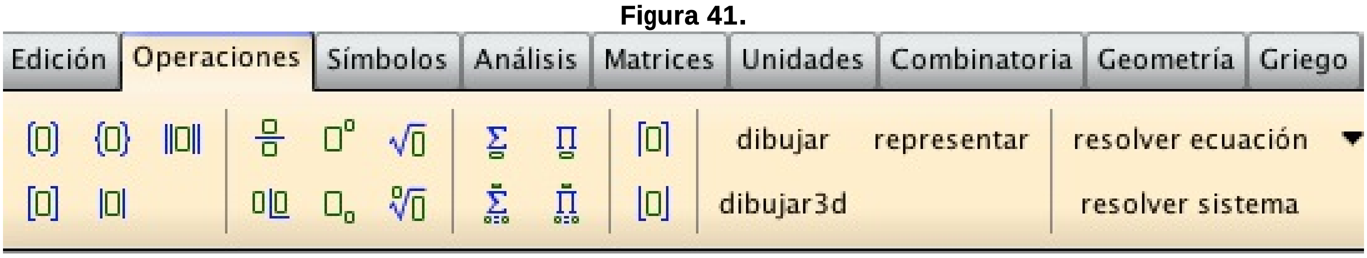
$y'' > 0$ *en* $x = 1{,}32,\ y\ x = 4{,}96$
Mínimos: $(1{,}32; -1{,}12),\ (4{,}96; -1{,}12)$

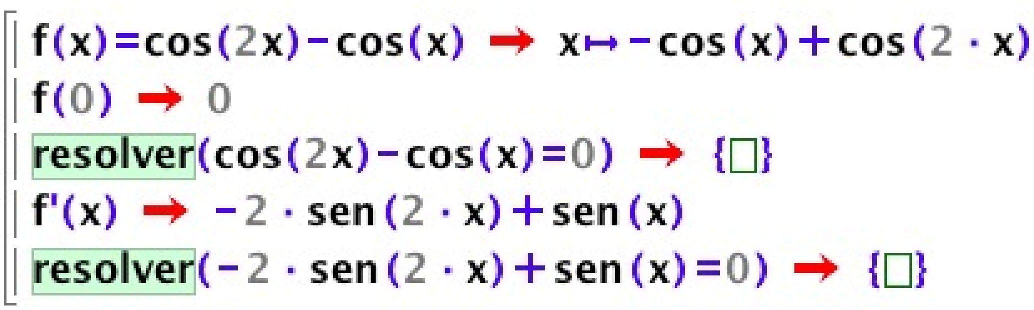


Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Escribimos la función, a la que le damos un nombre, que será f(x). A continuación, para sustituir cada x de la función por 0, escribimos f(0). A continuación, resolvemos una ecuación igualando la función a 0 (para ello pinchamos en 'Resolver ecuación' dentro de la pestaña de 'Operaciones'. Después derivamos la función escribiendo f'(x), y resolvemos una ecuación (de la misma manera que la anterior) igualando el resultado de la derivada a 0:

Figura 41.





2. Por último, representamos la función. Para ello, escribimos 'representar' y después la función entre paréntesis, como veremos a continuación:

Figura 42.

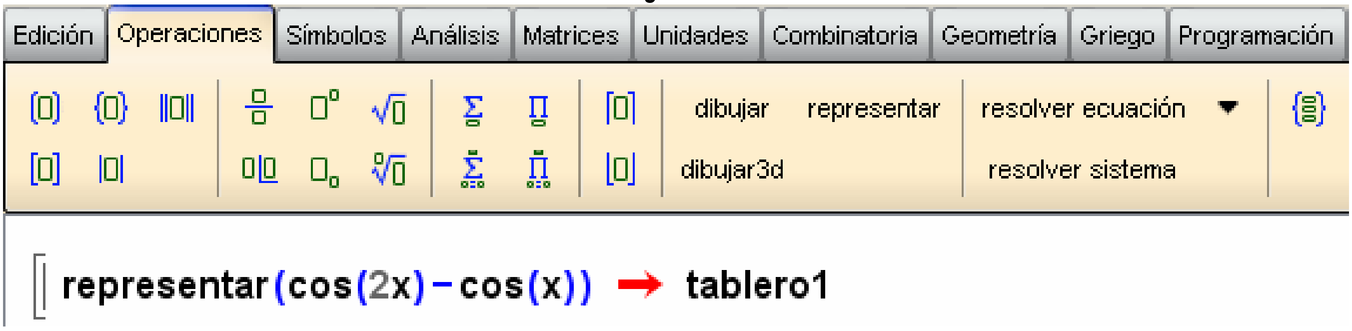
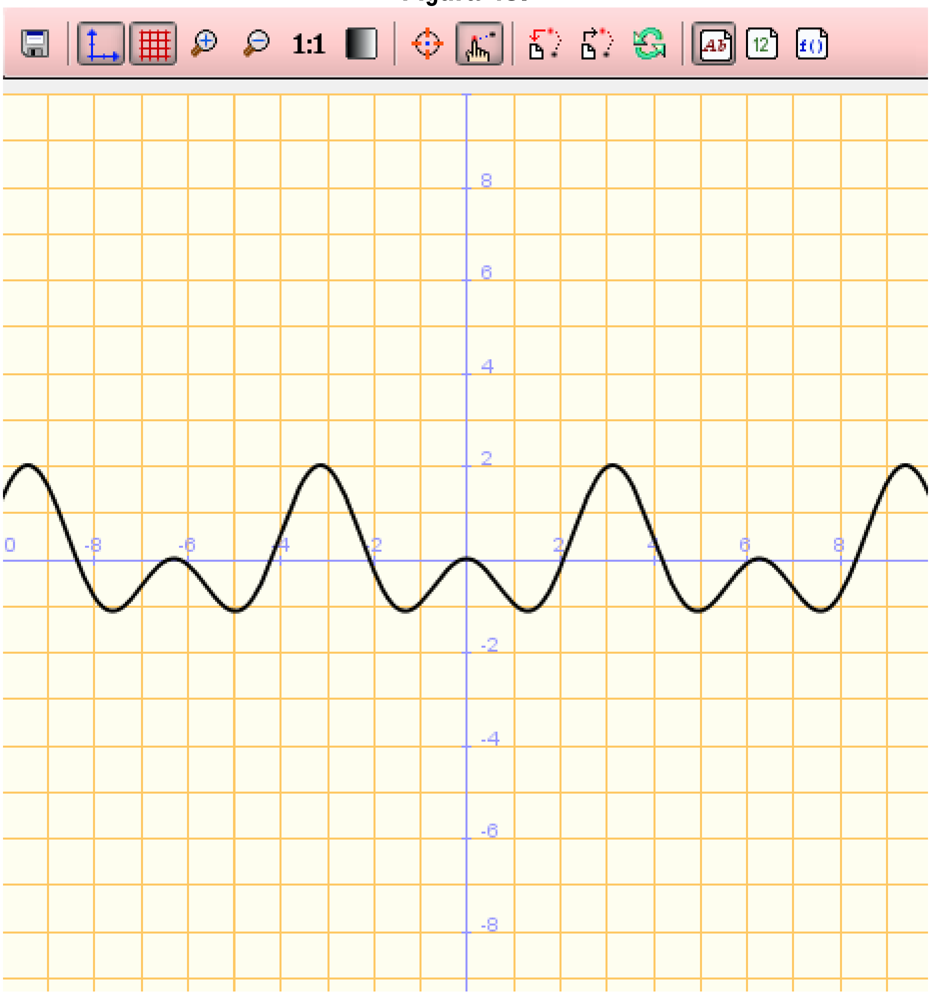


Figura 43.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

10. Estudio y gráfica.

Estudia y representa la función $y = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

- Dominio de definición: $\Re - \{0\}$

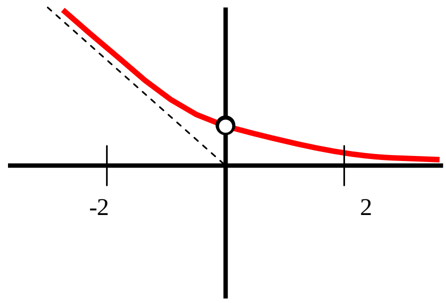
$$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1.$$ No tiene asíntota vertical.

- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{x}{e^x - 1} = +\infty \to \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1 \to m = -1$

- Tiene asíntota horizontal y = 0 cuando $x \to +\infty$ y asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$n = \lim_{x\to-\infty} = [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 - e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$ La asíntota oblicua es: y = -x.

- Estudio de la derivada: $y' = \dfrac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2}$

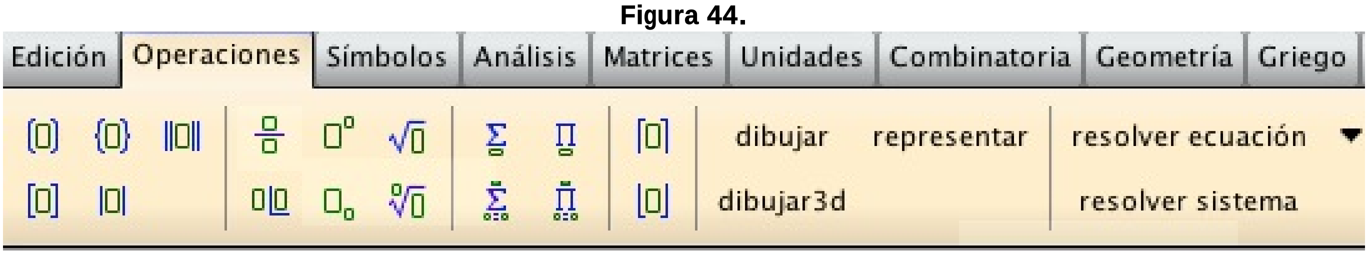


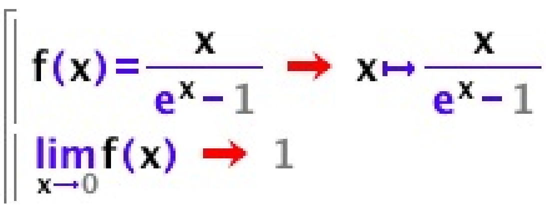
No tiene puntos singulares. Es decreciente.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Comprobaremos que no tiene asíntota vertical calculando el límite en 0:

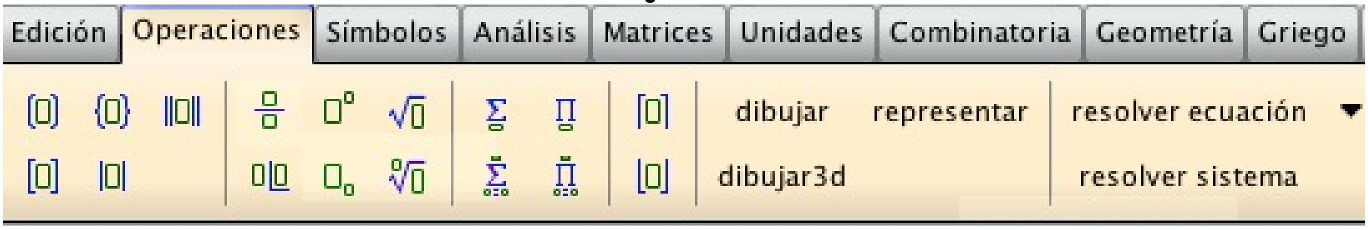
Figura 44.





2. En segundo lugar, estudiaremos las ramas infinitas haciendo dos límites:

Figura 45.



$$f(x)=\frac{x}{e^{x}-1} \rightarrow x\mapsto \frac{x}{e^{x}-1}$$

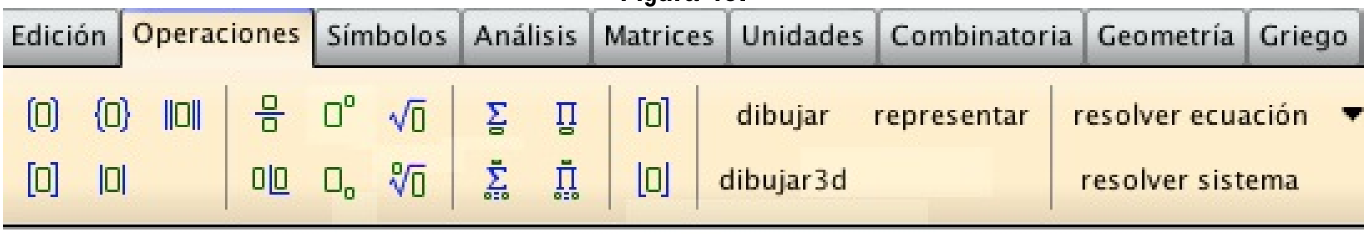
$$\lim_{x\to 0} f(x) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow -1$$

3. Ahora calcularemos n para que junto con m obtengamos la ecuación de la asíntota oblicua:

Figura 46.

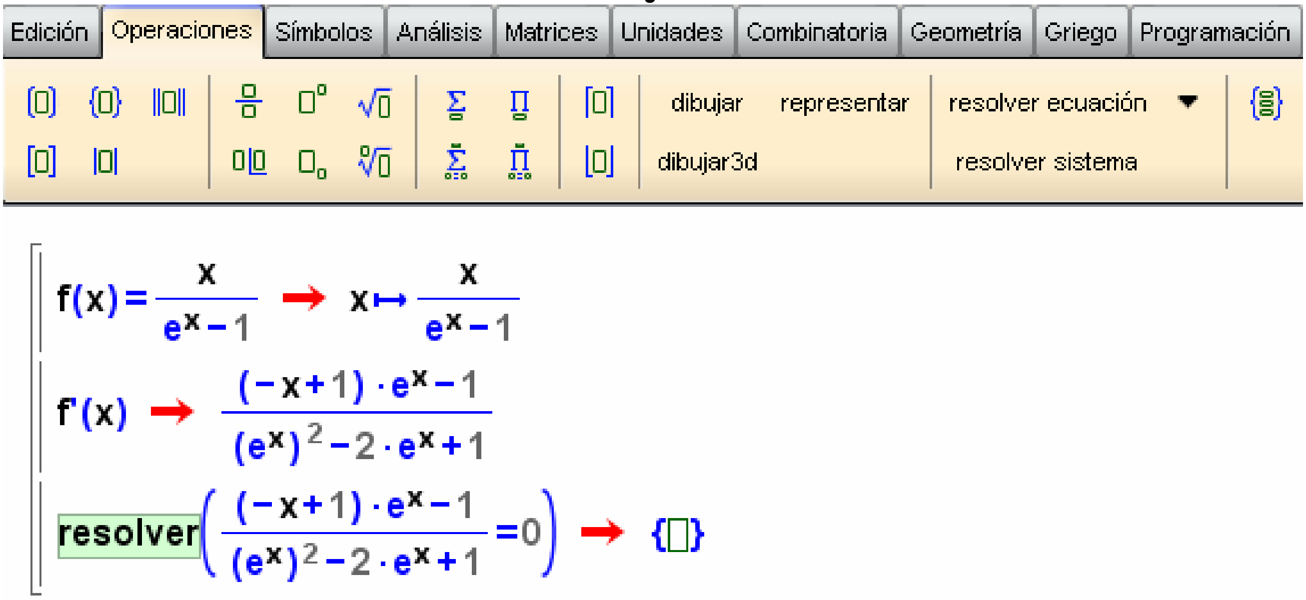


$$f(x)=\frac{x}{e^{x}-1} \rightarrow x\mapsto \frac{x}{e^{x}-1}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} \rightarrow 0$$

4. En este paso estudiaremos los puntos críticos:

Figura 47.



5. Por último, representaremos la función:

Figura 48.

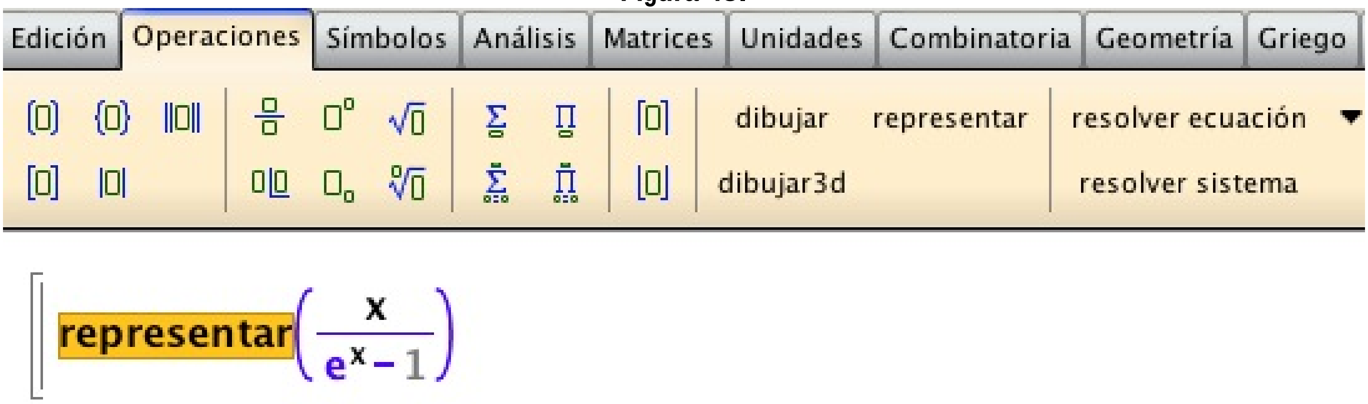
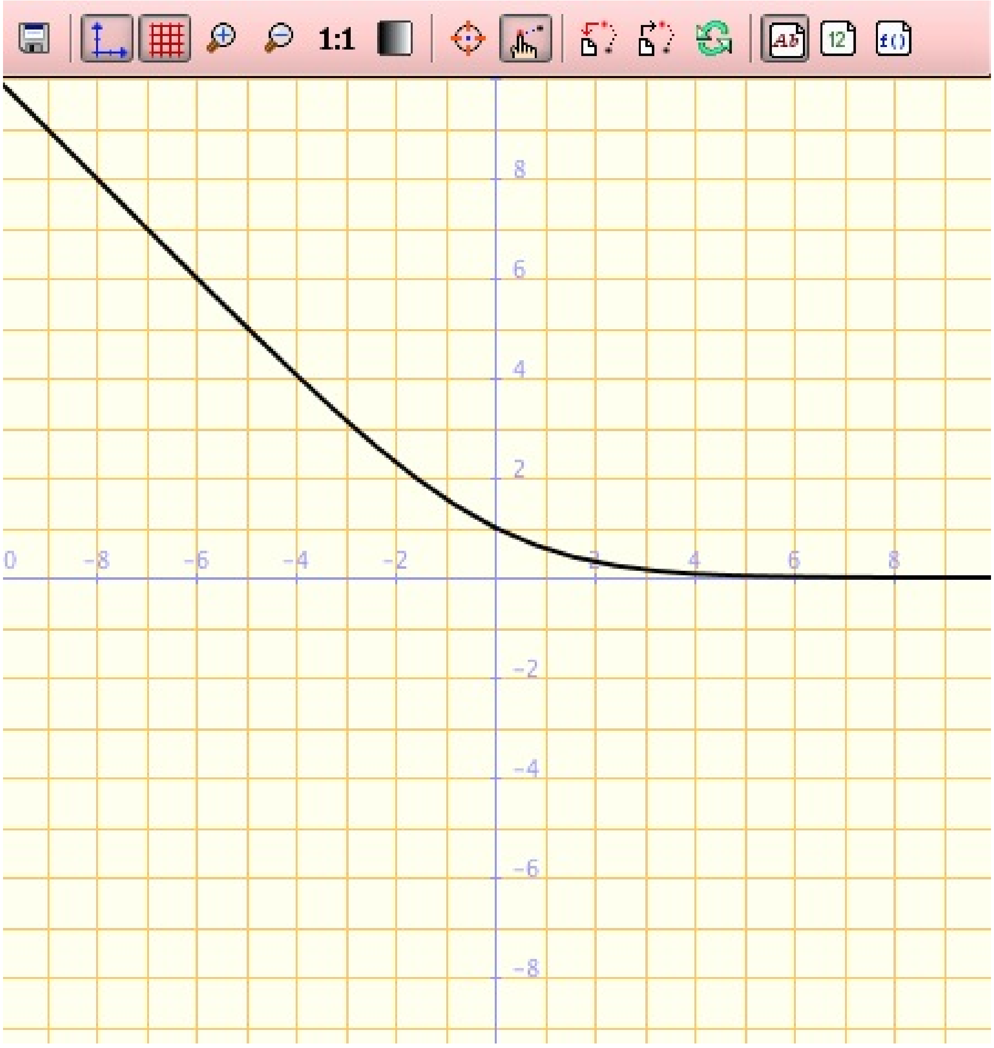


Figura 49.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web: