TEMA 12 Cálculo de primitivas

1. Forma potencial.

Calcula las siguientes integrales:

$$a)\, I=\int \left(\frac{7}{3}x^2-2x+3\right)dx \quad b)\, I=\int \frac{1-x^3}{x^2}dx \quad c)\, I=\int \frac{2+3x^2}{\sqrt{x}}dx \quad d)\, I=\int \left(\frac{3x-5}{2}\right)(x^2-1)dx \quad e)\, I=\int 6x(3x^2-7)^4\, dx$$

$$f)\, I=\int x\sqrt{x^2+1}dx \quad g)\, I=\int \left(\frac{3-5x}{2}\right)^3 dx \quad h)\, I=\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}dx \quad i)\, I=\int sen^2 x \cos x\, dx \quad j)\, I=\int tg\, x \sec^2 x\, dx$$

$$a)\, I=\frac{7}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+3x+k=\frac{7x^3}{9}-x^2+3x+k$$

$$b)\, I=\int \frac{1}{x^2}dx-\int x\, dx=\int x^{-2}\, dx-\int x\, dx=\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^2}{2}+k=-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2}+k$$

$$c)\, I=\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3x^2}{\sqrt{x}}\right)dx=2\int x^{-1/2}\, dx+3\int x^{3/2}\, dx=2\frac{x^{1/2}}{1/2}+3\frac{x^{5/2}}{5/2}+k=4\sqrt{x}+\frac{6}{5}\sqrt{x^5}+k$$

$$d)\, I=\int \frac{3x^3-5x^2-3x+5}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x\right)+k$$

$$e)\, I=\int \underbrace{6x}_{f'(x)}\underbrace{(3x^2-7)}_{f(x)}{}^4 dx=\frac{(3x^2-7)^5}{5}+k$$

$$f)\, I=\frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{f'(x)}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{f(x)}\right)^{1/2} dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2}+k=\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+k$$

$$g)\, I=-\frac{2}{5}\int \underbrace{-\frac{5}{2}}_{f'(x)}\left(\underbrace{\frac{3-5x}{2}}_{f(x)}\right)^3 dx=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3-5x}{2}\right)^4+k=-\frac{1}{10}\left(\frac{3-5x}{2}\right)^4+k$$

$$h)\, I=3\int x(x^2-2)^{-1/2}dx=\frac{3}{2}\int \underbrace{2x}_{f'(x)}\underbrace{(x^2-2)}_{f(x)}{}^{-1/2}dx=\frac{3}{2}\cdot 2(x^2-2)^{1/2}+k=3\sqrt{x^2-2}+k$$

$$i)\, I=\int \underbrace{(sen\, x)}_{f(x)}{}^2\, \underbrace{\cos x}_{f'(x)}\, dx=\frac{sen^3 x}{3}+k$$

$$j)\, I=\int \underset{f(x)}{tg\,x}\ \underset{f'(x)}{\sec^2 x}\ dx=\frac{tg^2\,x}{2}+k$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

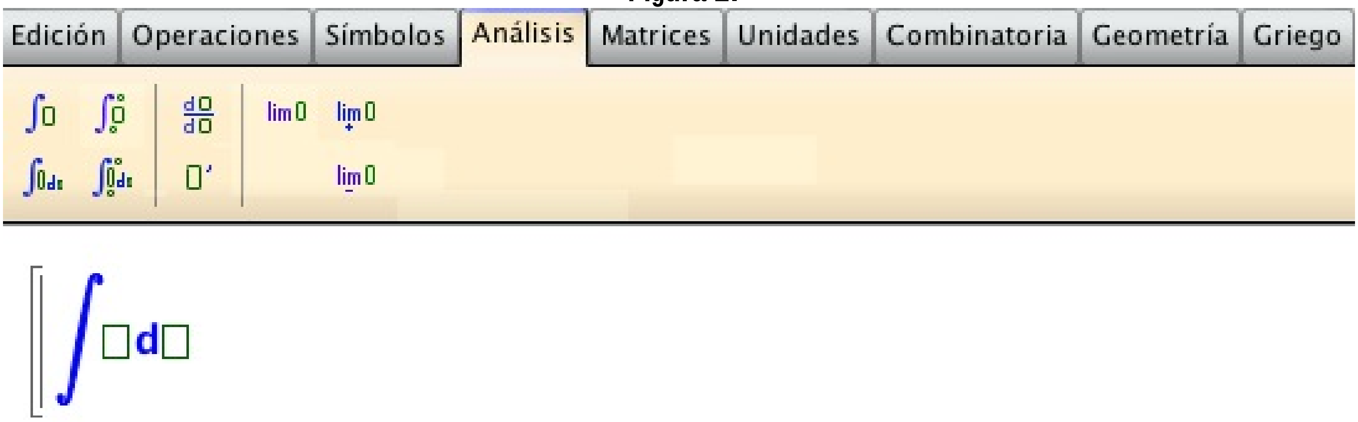
1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

- Pinchamos en la pestaña Análisis, y dentro de ella, en el icono de integral (debemos tener en cuenta pinchar en el que aparece el diferencial de x):

Figura 1.

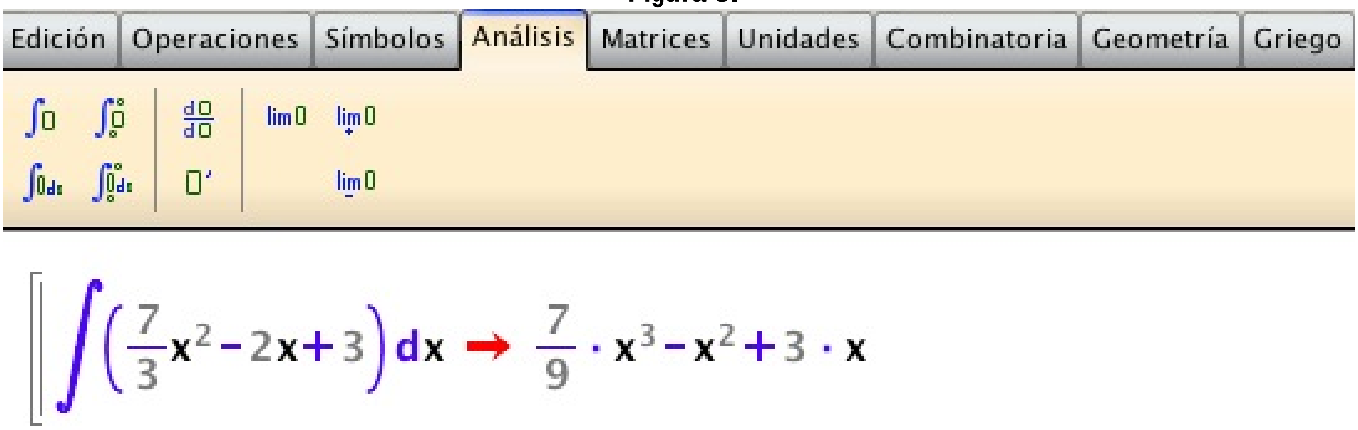
- Una vez, hemos pinchado, nos aparecerá la integral, y sólo tendremos que rellenarla y pulsar igual para obtener nuestra solución:

Figura 2.



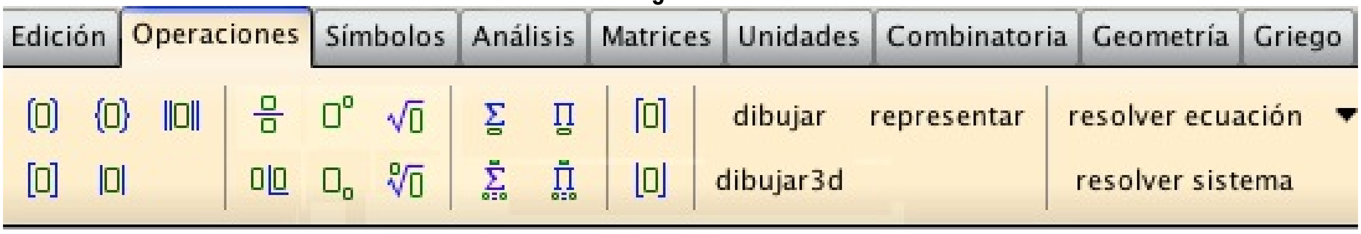
2. Apartado a):

Figura 3.



3. Apartado b):

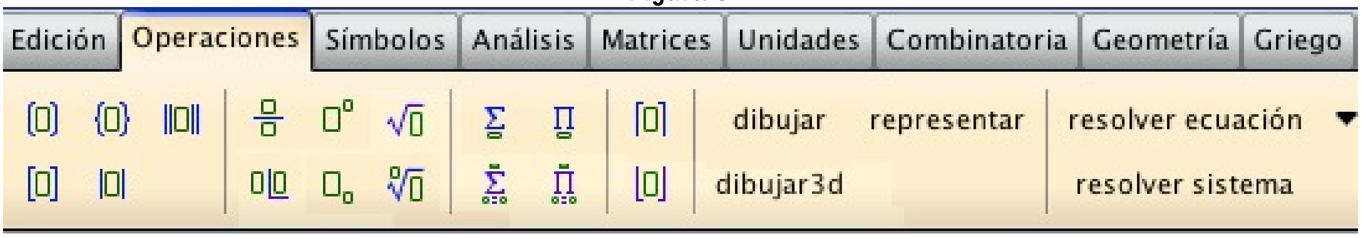
Figura 4.



$$\int\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)dx \rightarrow \frac{-x^3-2}{2\cdot x}$$

4. Apartado c):

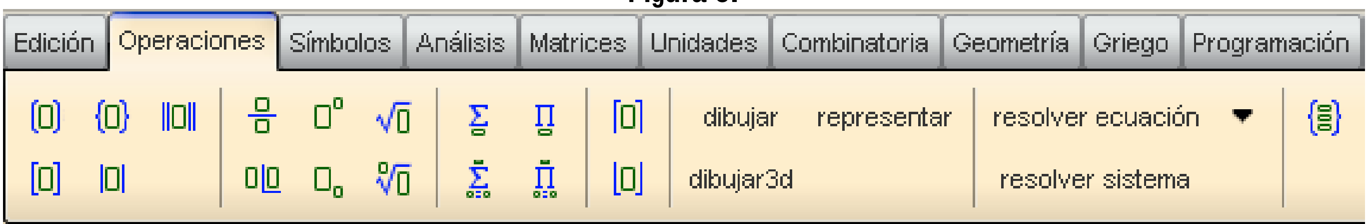
Figura 5.



$$\int\frac{2+3x^2}{\sqrt{x}}dx \rightarrow \frac{6\cdot x^2\cdot\sqrt{x}^2+20\cdot x}{5\cdot\sqrt{x}}$$

5. Apartado d):

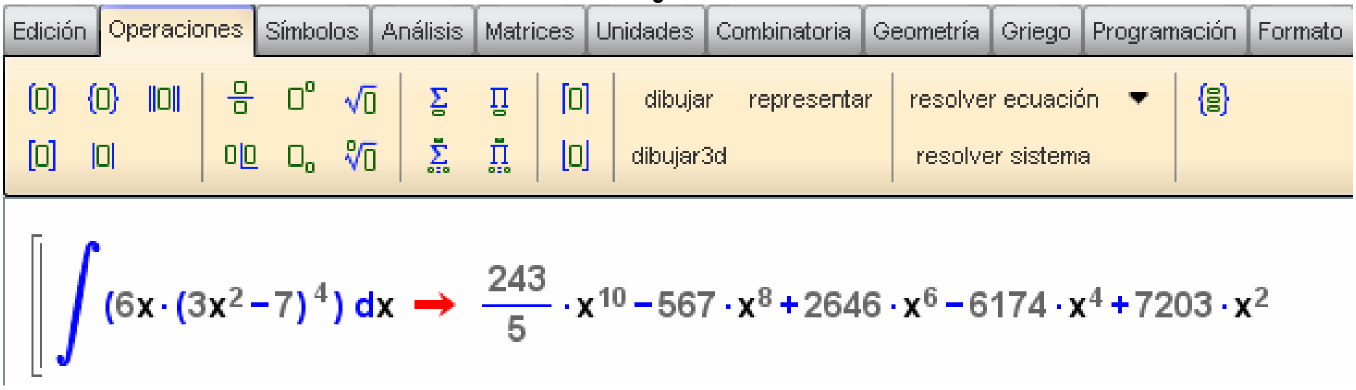
Figura 6.



$$\int\left(\left(\frac{3x-5}{2}\right)\cdot(x^2-1)\right)dx \rightarrow \frac{3}{8}\cdot x^4-\frac{5}{6}\cdot x^3-\frac{3}{4}\cdot x^2+\frac{5}{2}\cdot x$$

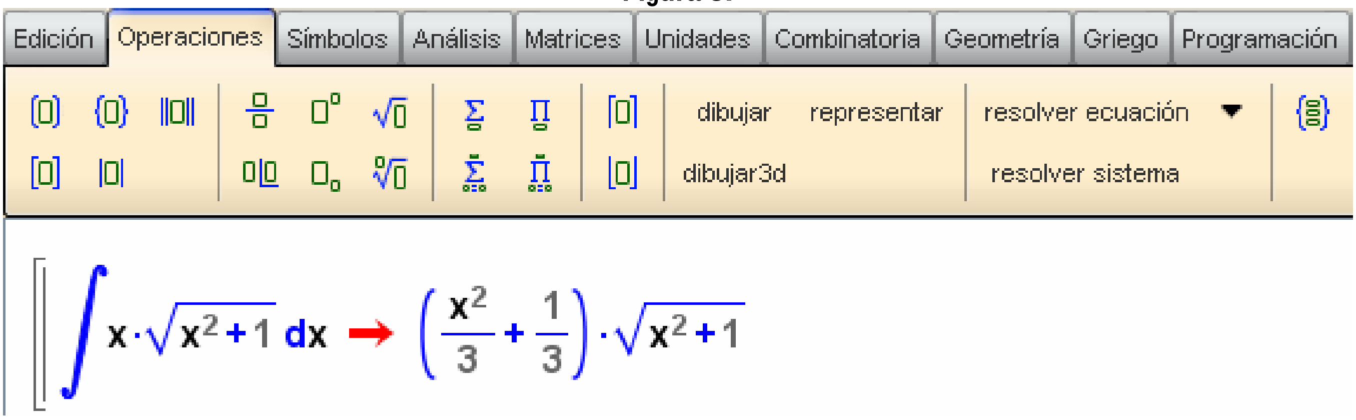
6. Apartado e):

Figura 7.



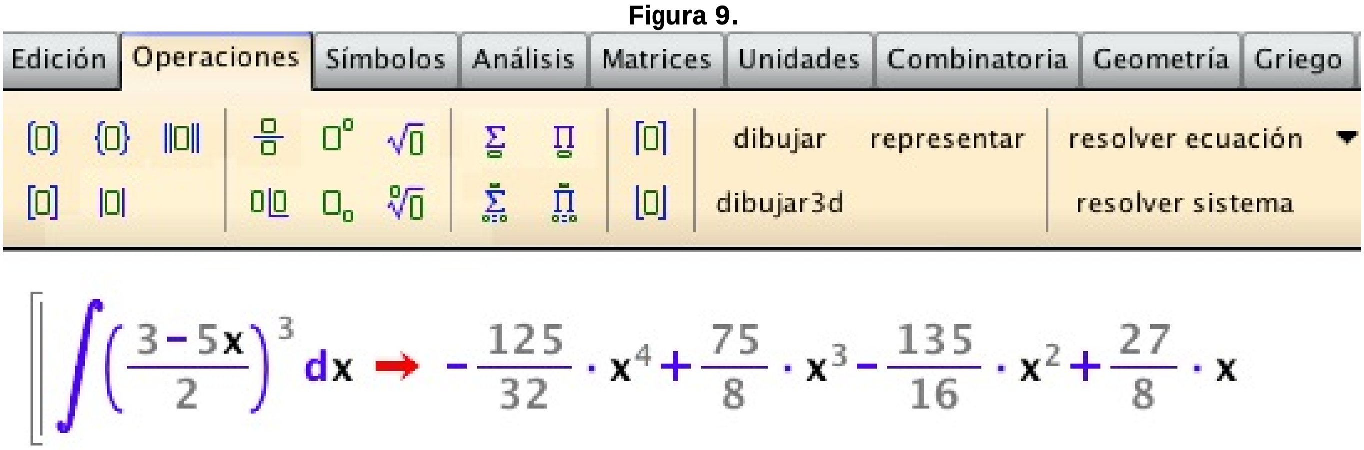
7. Apartado f):

Figura 8.



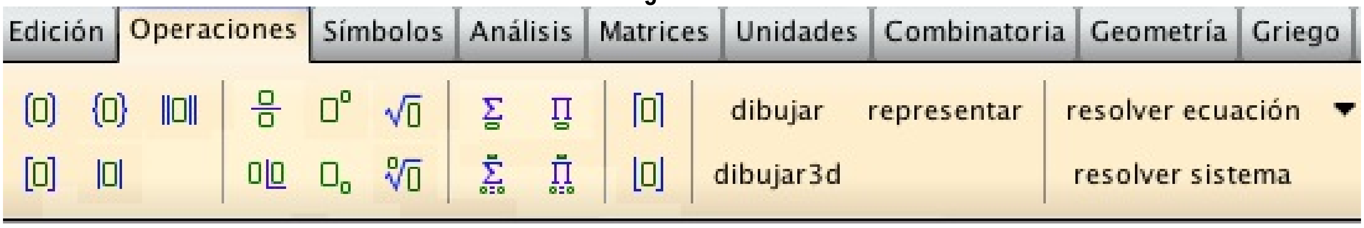
8. Apartado g):

Figura 9.



9. Apartado h):

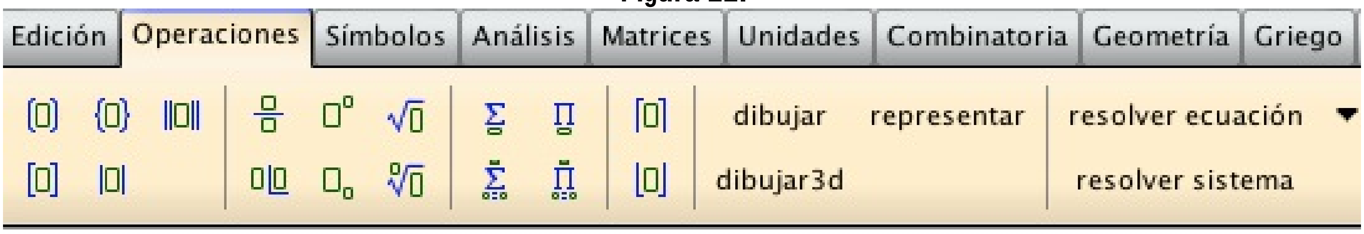
Figura 10.



$$\int\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\right)dx \rightarrow \frac{3\cdot x^2-6}{\sqrt{x^2-2}}$$

10. Apartado i):

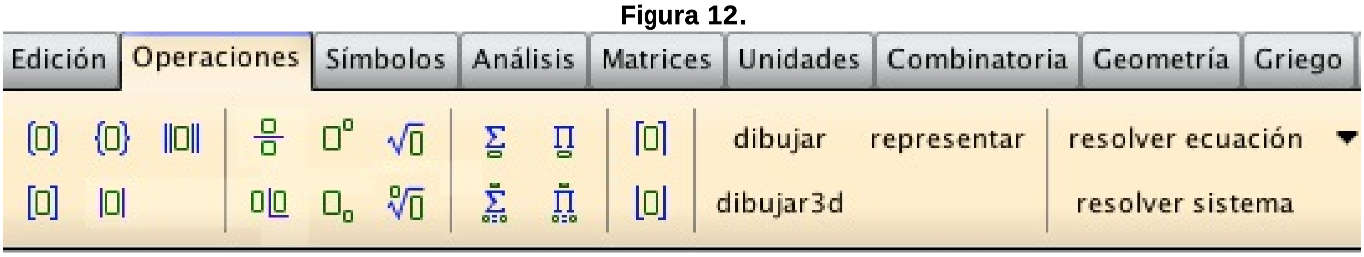
Figura 11.



$$\int \mathrm{sen}(x)^2\cdot\cos(x)\,dx \rightarrow \frac{\mathrm{sen}(x)^3}{3}$$

11. Apartado j):

Figura 12.



$$\int \tan(x)\cdot\sec(x)^2\,dx \rightarrow \frac{1}{2\cdot\cos(x)^2}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

2. Forma logarítmica.

$$a)\, I=\int \frac{x-1}{x^2-2x+1}dx \quad b)\, I=\int \frac{e^x}{e^x+1}dx \quad c)\, I=\int \cot g\, x\, dx \quad d)\, I=\int \frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x-\cos x}dx \quad e)\, I=\int \frac{2x-3}{x+2}dx$$

Solución:

$$a)\, I=\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+1)+k=\frac{1}{2}\ln(x-1)^2+k$$

$$b)\, I=\ln(1+e^x)+k$$

$$c)\, I=\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}dx=\ln\left|\operatorname{sen}x\right|+k$$

$$d)\, I=\ln\left|\operatorname{sen}x-\cos x\right|+k$$

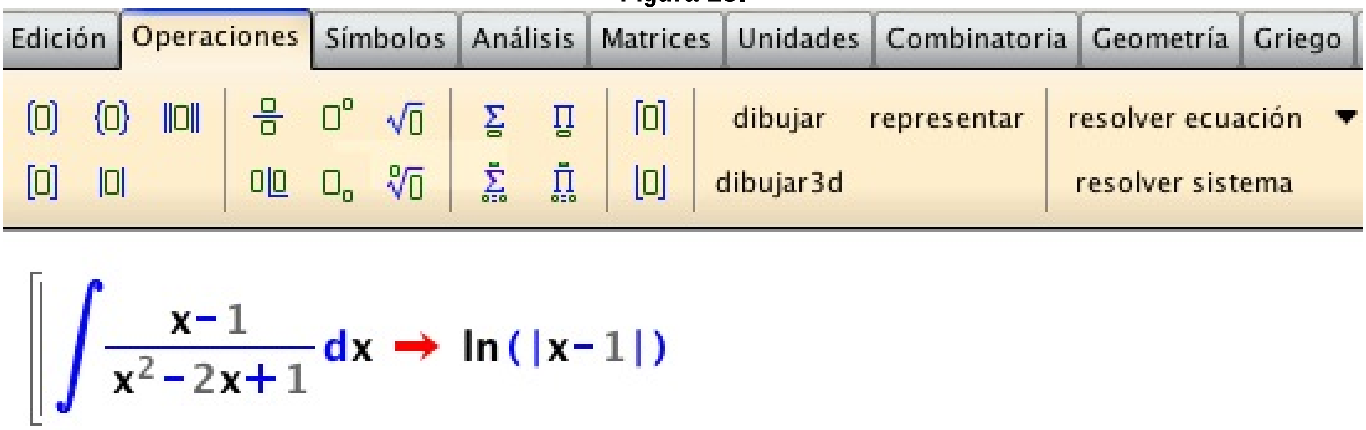
$$e)\, I\overset{(*)}{=}\int\left(2-\frac{7}{x+2}\right)dx=2x-7\ln\left|x+2\right|+k$$

$$(*)\ \frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

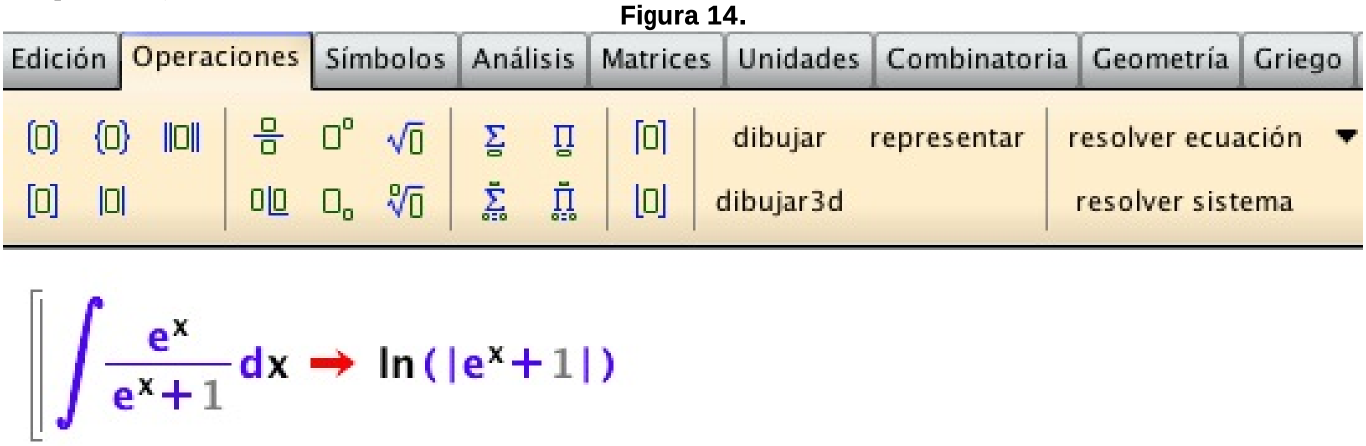
2. Apartado a):

Figura 13.



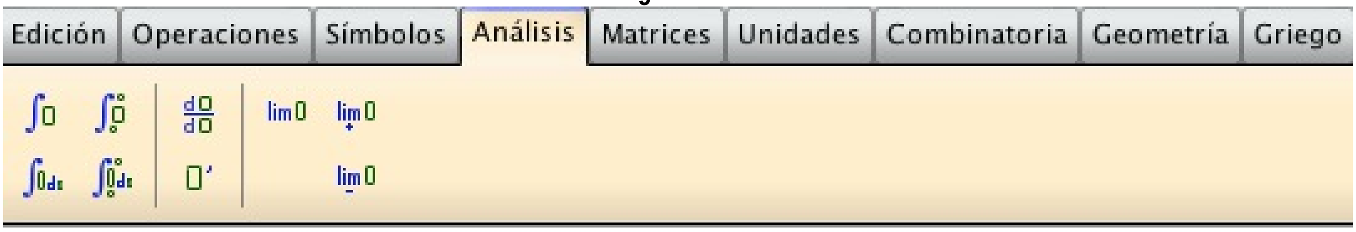
3. Apartado b):

Figura 14.



4. Apartado c):

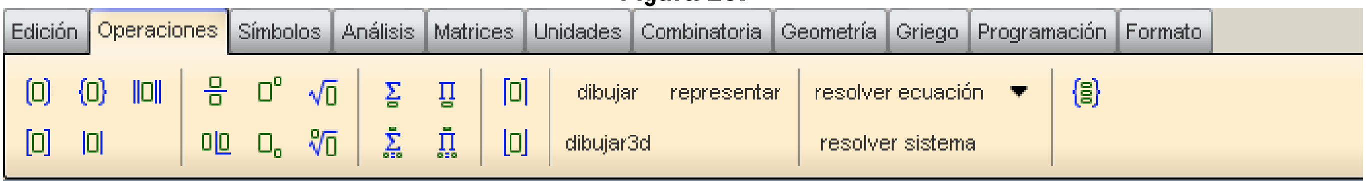
Figura 15.



$$\int \operatorname{cotan}(x)\,dx \rightarrow \ln(|\operatorname{sen}(x)|)$$

5. Apartado d):

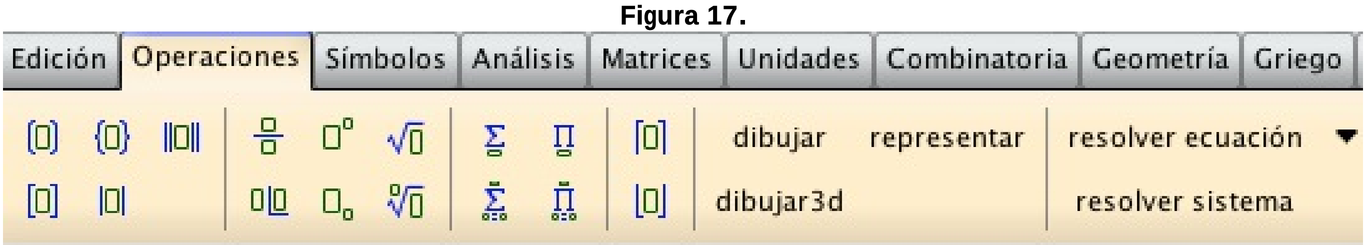
Figura 16.



$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}\,dx \rightarrow \ln(|-\cos(x)+\operatorname{sen}(x)|)-\frac{\ln(|-\tan(x)+1|)}{2}+\frac{\ln(|\tan(x)-1|)}{2}$$

6. Apartado e):

Figura 17.



$$\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx \rightarrow -7\cdot\ln(|-x-2|)+2\cdot x$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Seno, coseno, tangente, cotangente.

$$a) I = \int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx \quad b) I = \int \frac{sen2x+\cos x}{\cos x}dx \quad c) I = \int x\cos(x^2+1)\,dx \quad d) I = e^x sen\, e^x\, dx$$

$$e) I = \int 3\sec^2(x+\pi)\,dx \quad f) I = \int tg^2 x\,dx \quad g) I = \int \frac{1-\cos^2 x}{sen\,2x}dx \quad h) I = \int \frac{(1+senx)^2}{1-senx}dx$$

Solución:

$$a) I = x - 2\int \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = x - 2\,sen\frac{x}{2} + k$$

$$b) I = \int \frac{2senx\cos x+\cos x}{\cos x}dx = 2\int senx\,dx + \int dx = -2\cos x + x + k$$

$$c) I = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}sen(x^2+1) + k$$

$$d) I = -\cos e^x + k$$

$$e) I = 3tg\,(x+\pi) + k$$

$$f) I = \int (1+tg^2 x - 1)dx = \int (1+tg^2 x)dx - \int dx = tg\,x - x + k$$

$$g) I = \int \frac{sen^2 x}{2\,sen\,x\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{sen\,x}{\cos x}dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos x| + k$$

$$h) I \overset{(*)}{=} \int \frac{(1+senx)^2}{1-senx}dx = \int \frac{1+2senx+sen^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\int \frac{senx}{\cos^2 x}dx + \int tg^2 x\,dx = tg\,x + 2\int senx\cos^{-2} x\,dx + \int (1+tg^2-1)\,dx =$$

$$= tg\,x - 2\frac{\cos^{-1} x}{-1} + t\,x - x + k = 2tg\,x + \frac{2}{\cos x} - x + k$$

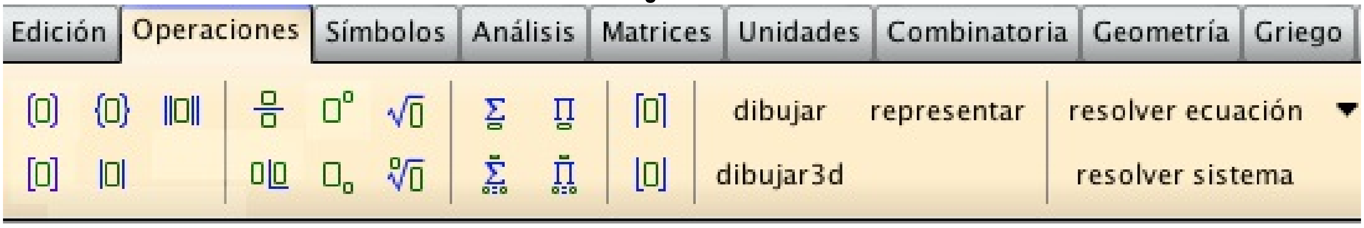
(*) Multiplicamos numerador y denominador por $(1+senx)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2. Apartado a):

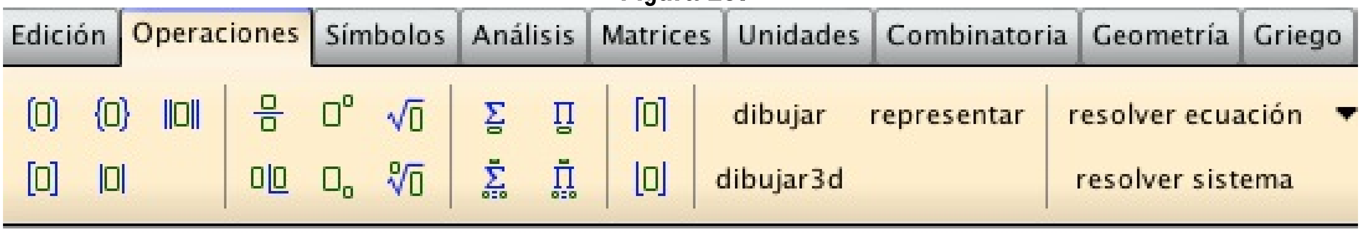
Figura 18.



$$\int \left(1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx \rightarrow -2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x$$

3. Apartado b):

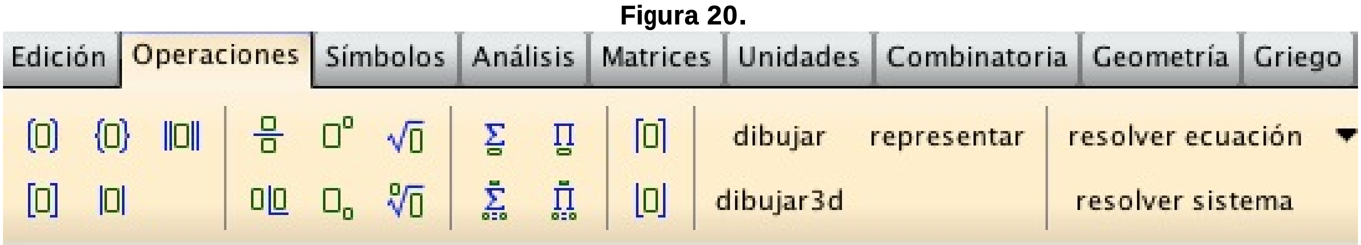
Figura 19.



$$\int \left(\frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos(x)}{\cos(x)}\right) dx \rightarrow -2\cdot\cos(x)+x$$

4. Apartado c):

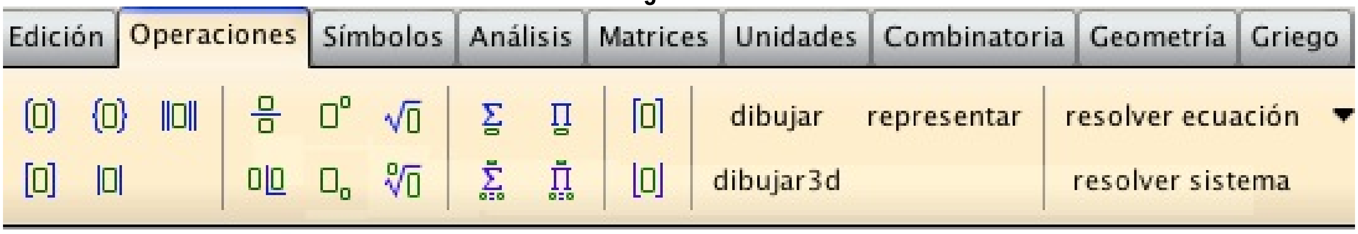
Figura 20.



$$\int (x\cdot\cos(x^2+1))\, dx \rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x^2+1)}{2}$$

5. Apartado d):

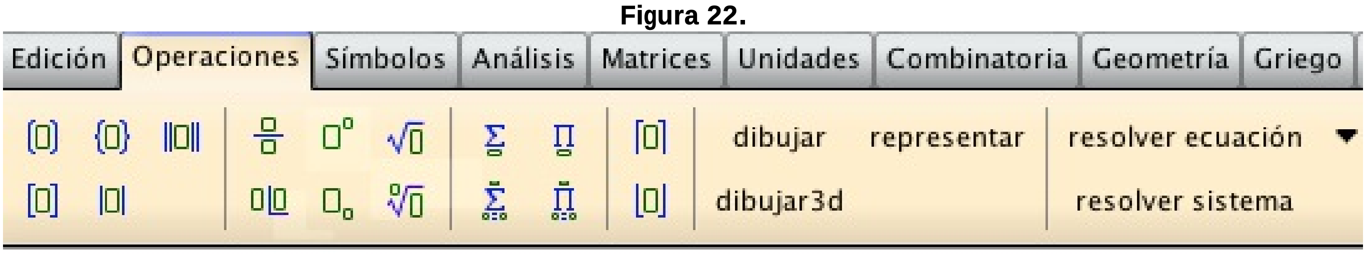
Figura 21.



$$\int (e^{x} \cdot \text{sen}(e^{x}))\, dx \rightarrow -\cos(e^{x})$$

6. Apartado e):

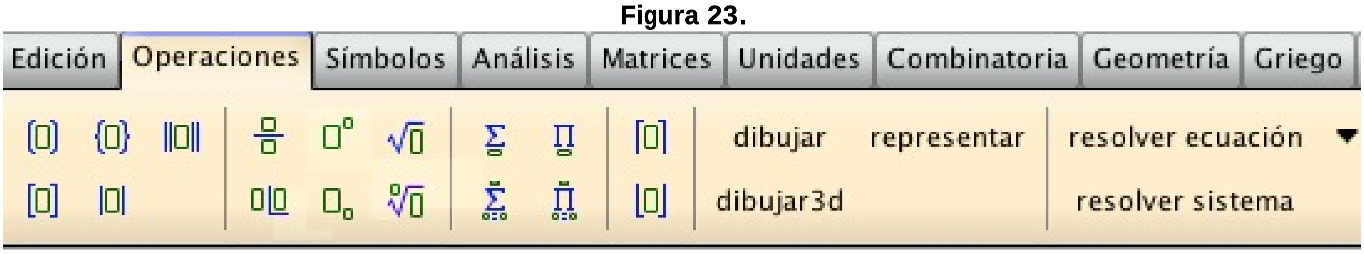
Figura 22.



$$\int (3 \cdot \sec(x+\pi)^{2})\, dx \rightarrow 3 \cdot \tan(x+\pi)$$

7. Apartado f):

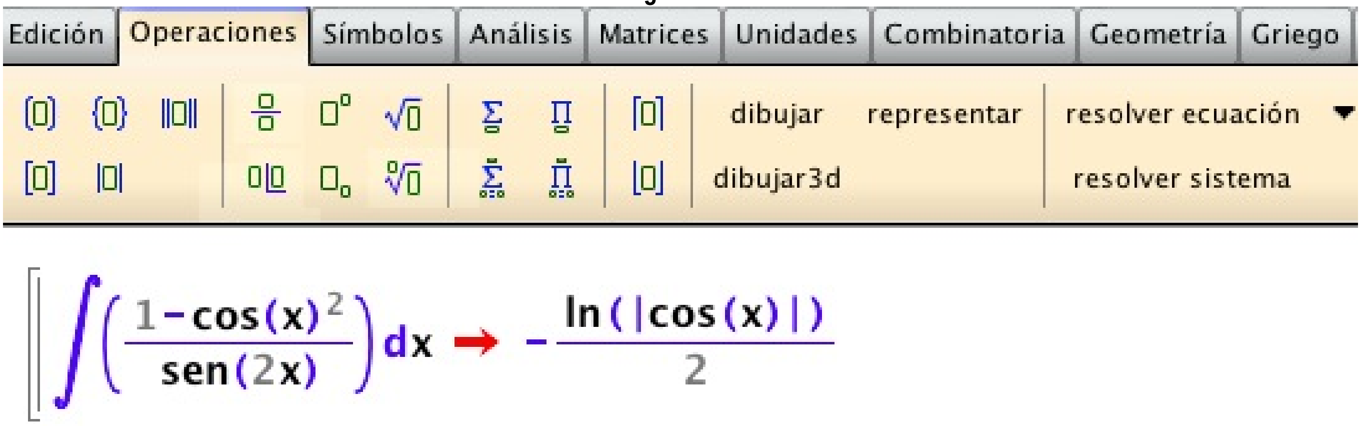
Figura 23.



$$\int (\tan(x)^{2})\, dx \rightarrow \tan(x) - x$$

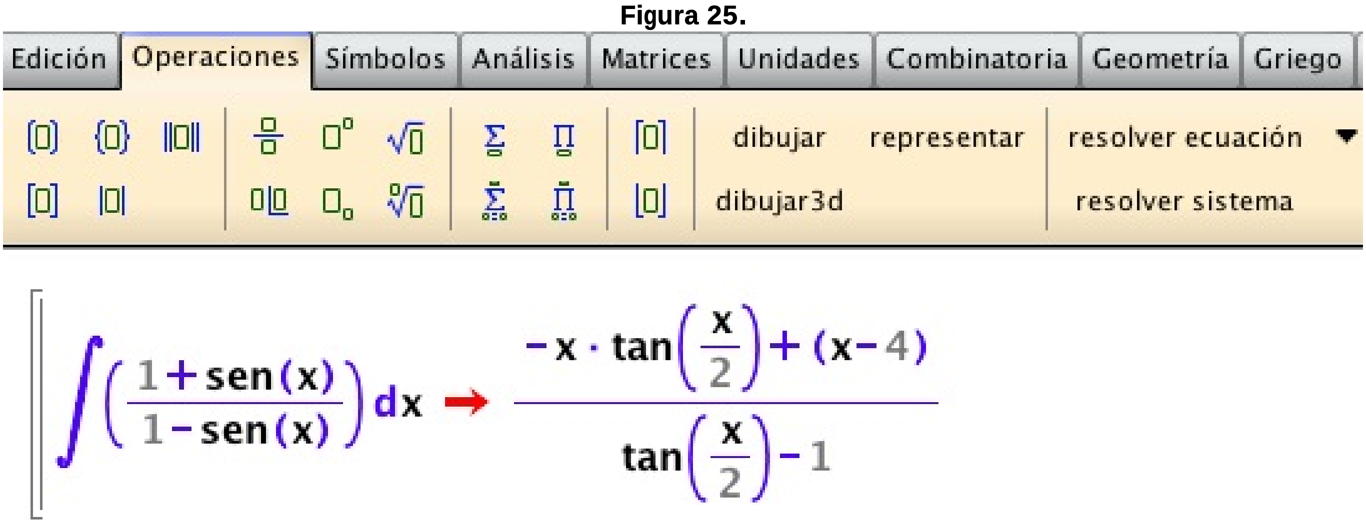
8. Apartado g):

Figura 24.



9. Apartado h):

Figura 25.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

4. Forma exponencial.

$$a)I=\int e^{3x-2}\,dx \qquad b)I=\int 3x\,e^{x^2-1}\,dx \qquad c)I=\int 7^{2x-5}\,dx \qquad d)I=\int e^{sen\,x}\cdot\cos x\,dx$$

Solución:

$$a)I=\frac{1}{3}\int 3e^{3x-2}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x-2}+k$$

$$b) I = \frac{3}{2}\int 2x\, e^{x^2-1}\, dx = \frac{3}{2} e^{x^2-1} + k$$

$$c) I = \frac{1}{2}\int 2 \cdot 7^{2x-5}\, dx = \frac{1}{2\ln 7} \cdot 7^{2x-5} + k$$

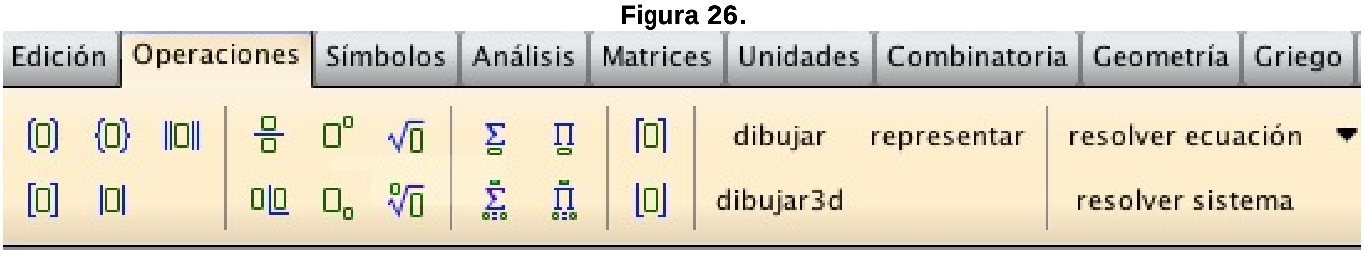
$$d) I = e^{sen\, x} + k$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2. Apartado a):

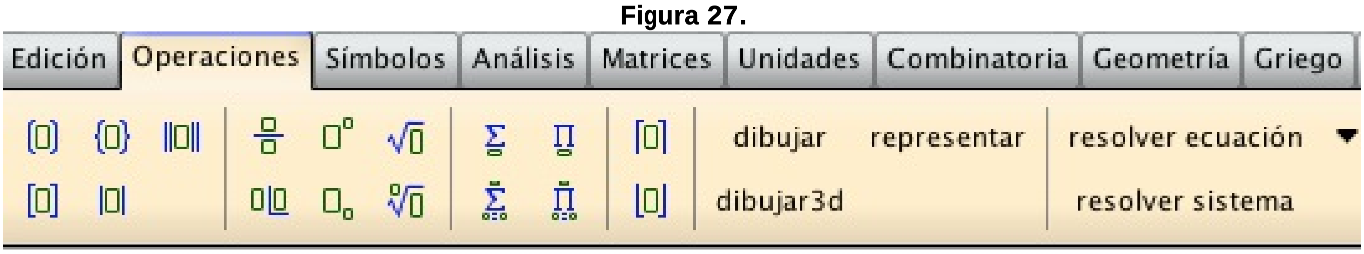
Figura 26.



$$\int e^{3x-2}\, dx \rightarrow \frac{e^{3\cdot x-2}}{3}$$

3. Apartado b):

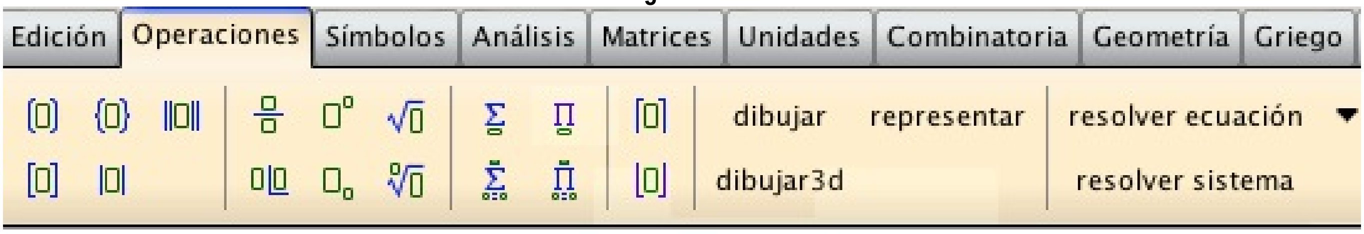
Figura 27.



$$\int 3x \cdot e^{x^2-1}\, dx \rightarrow \frac{3 \cdot e^{x^2-1}}{2}$$

4. Apartado c):

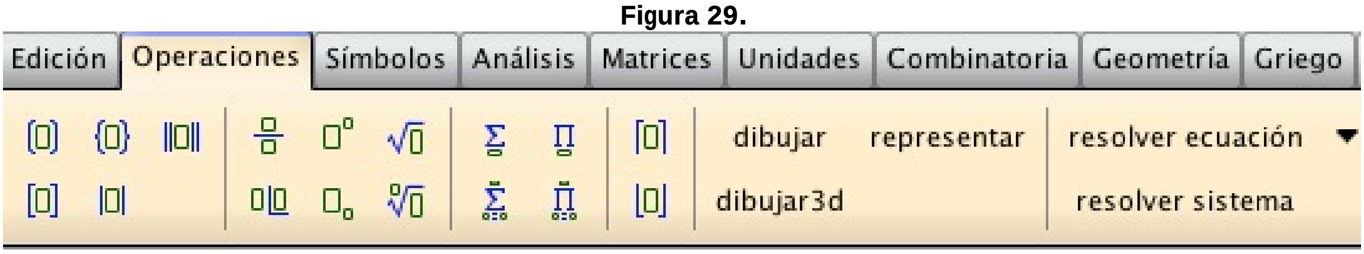
Figura 28.



$$\int 7^{2x-5}\,dx \rightarrow \frac{2.975\cdot 10^{-5}\cdot 7^{2\cdot x}}{\ln(7)}$$

5. Apartado d):

Figura 29.



$$\int e^{\operatorname{sen}(x)}\cdot\cos(x)\,dx \rightarrow e^{\operatorname{sen}(x)}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

5. Formas arcsen y arctg.

$$a)\, I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx \quad b)\, I=\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx \quad c)\, I=\int\frac{1}{1+4x^2}dx \quad d)\, I=\int\frac{1}{9+x^2}dx \quad e)\, I=\int\frac{1}{4+5x^2}dx$$

$$f)\, I=\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx \quad g)\, I=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx \quad h)\, I=\int\frac{x^4}{x^2+1}dx \quad i)\, I=\int\frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}dx$$

Solución:

$$a)\ I=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}}dx=\frac{1}{3}arc\,sen\,x^3+k$$

$$b)\ I=\int\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx=arc\,sen\,e^x+k$$

$$c)\ I=\frac{1}{2}\int\frac{2}{1+(2x)^2}dx=\frac{1}{2}arc\,tg\,2x+k$$

$$d)\ I=\int\frac{1/9}{1+\left(x^2/9\right)}dx=\int\frac{1/9}{1+(x/3)^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1/3}{1+(x/3)^2}dx=\frac{1}{3}arc\,tg\,\frac{x}{3}+k$$

$$e)\ I=\int\frac{1/4}{1+\left(5x^2/4\right)}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}/2}{1+\left(\sqrt{5}x/2\right)^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{5}}arc\,tg\,\frac{\sqrt{5}x}{2}+k$$

$$f)\ I=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=arc\,tg(x+1)+k$$

$$g)\ I=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int 1dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-arc\,tg\,x+k$$

$$h)\ I=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+arc\,tg\,x+k$$

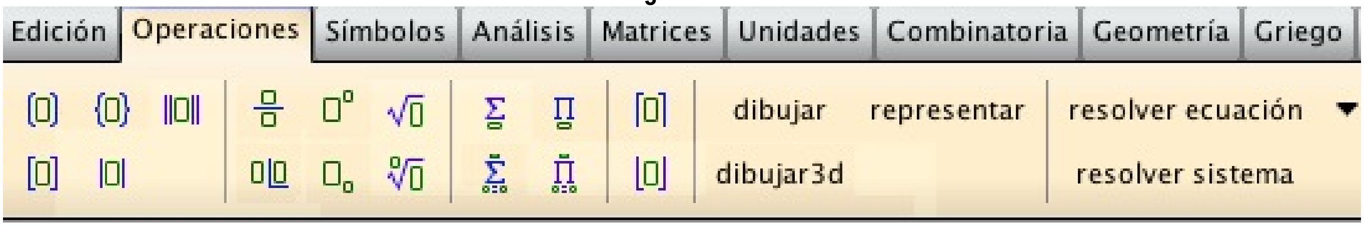
$$i)\ I=\int\frac{1/2}{\sqrt{4/4-3x^2/4}}dx=\int\frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}x/2\right)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3}x/2\right)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arc\,sen\frac{\sqrt{3}x}{2}+k$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. 1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2. Apartado a):

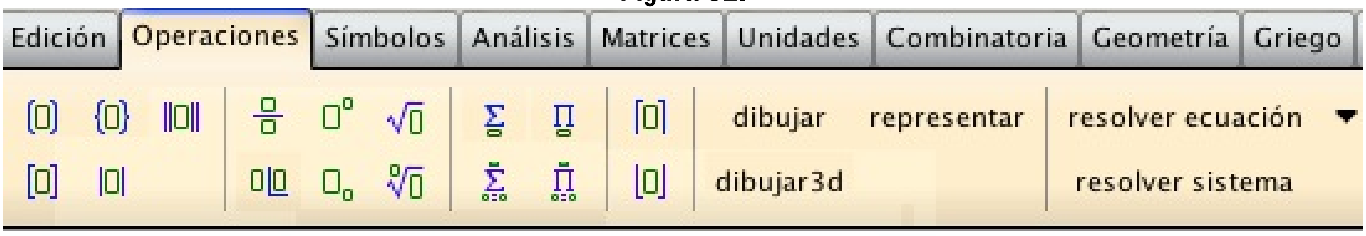
Figura 30.



$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\,dx \rightarrow \frac{\int \frac{3\cdot x^2}{\sqrt{-x^6+1}}\,dx}{3}$$

3. Apartado b):

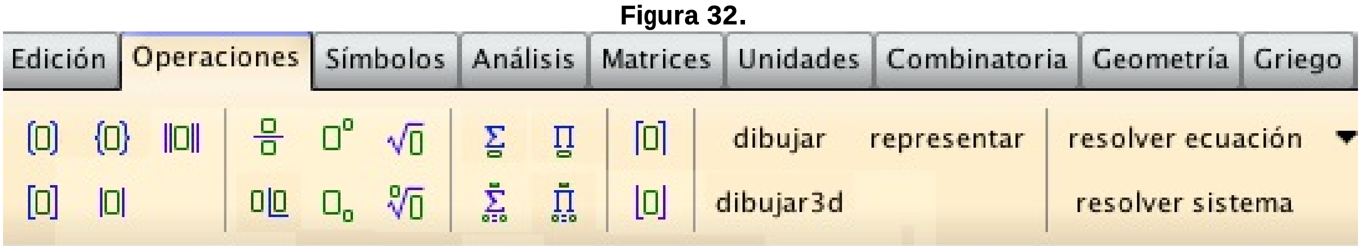
Figura 31.



$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx \rightarrow \int \frac{e^x}{\sqrt{-(e^x)^2+1}}\,dx$$

4. Apartado c):

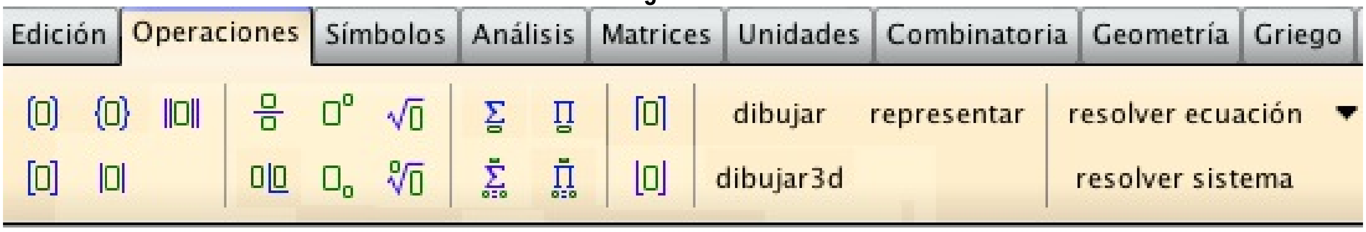
Figura 32.



$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx \rightarrow \frac{\operatorname{atan}(2\cdot x)}{2}$$

5. Apartado d):

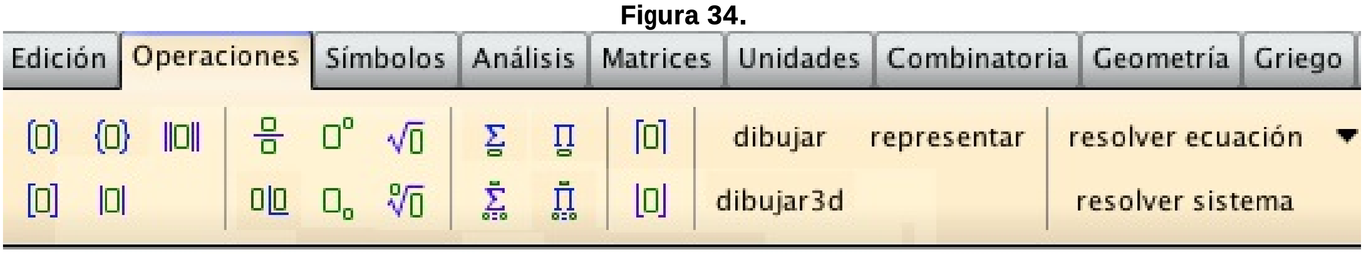
Figura 33.



$$\int \frac{1}{9+x^2}\,dx \rightarrow \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{3}\right)}{3}$$

6. Apartado e):

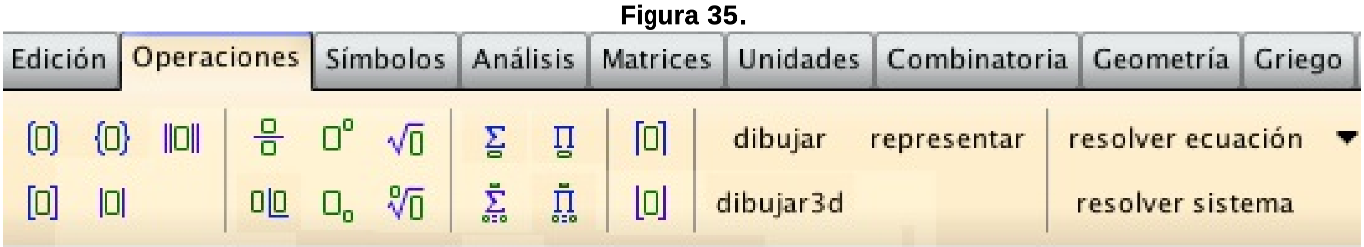
Figura 34.



$$\int \frac{1}{4+5x^2}\,dx \rightarrow \frac{\sqrt{5}\cdot \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{5}\cdot x}{2}\right)}{10}$$

7. Apartado f):

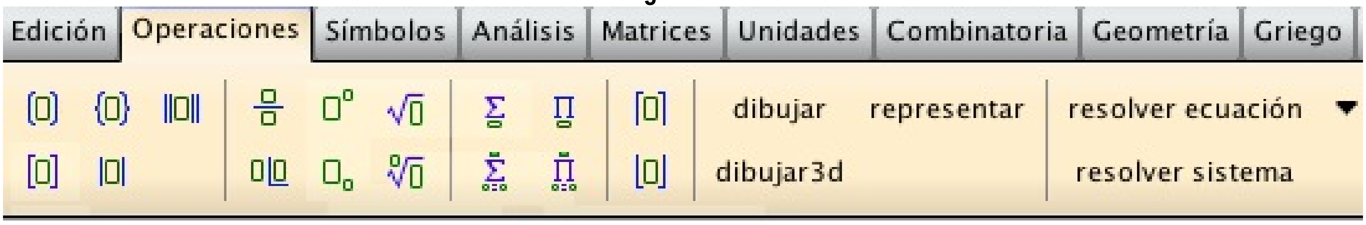
Figura 35.



$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx \rightarrow \operatorname{atan}(x+1)$$

8. Apartado g):

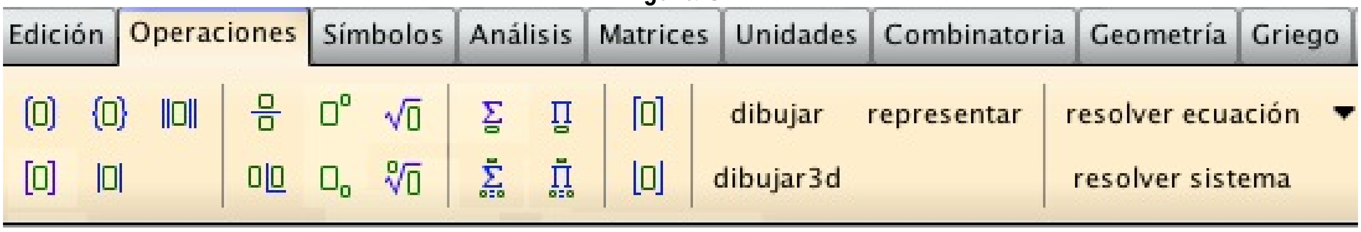
Figura 36.



$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \rightarrow -\mathrm{atan}(x)+x$$

9. Apartado h):

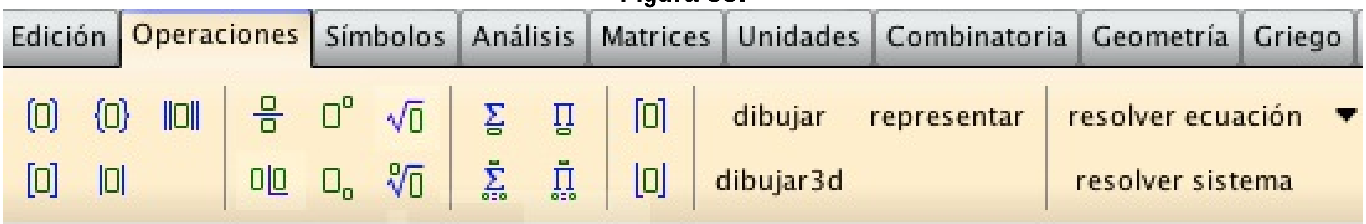
Figura 37.



$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx \rightarrow \mathrm{atan}(x)+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$$

10. Apartado i):

Figura 38.



$$\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx \rightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot \mathrm{asen}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2}\right)}{3}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

6. Método de sustitución.

Los ejercicios anteriores se han resuelto mediante cambios de variable que se han efectuado mentalmente. En los siguientes ejercicios no son evidentes y es necesario explicarlos:

$$a)\ I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \qquad b)\ I=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{1+tg\,x}} \qquad c)\ I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$$

$$d)\ I=\int\frac{x^2}{\sqrt{1+2x}}dx \qquad e)\ I=\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx \qquad f)\ I=\int\sqrt{e^x-1}\,dx$$

a) Hacemos el cambio $x=t^2 \to dx=2t\,dt$ $\quad I=\int\frac{2t\,dt}{(1+t^2)\sqrt{t^2}}=\int\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\,arc\,tg\,t+k=2\,arc\,tg\sqrt{x}+k$

b) Hacemos el cambio $1+tg\,x=t \to \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$ $\quad I=\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=\int t^{-1/3}dt=\frac{3}{2}t^{2/3}+k=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+tg\,x)^2}+k$

c) Hacemos el cambio $1+\ln x=t \to -\frac{1}{x}dx=dt$ $\quad I=\int\frac{-dt}{\sqrt{t}}=-\int t^{-1/2}dt=-2t^{1/2}+k=-2\sqrt{1-\ln x}+k$

d) Ponemos $1+2x=t^3 \to x=\frac{t^3-1}{2};dx=\frac{3t^2dt}{2}$

$$I=\int\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{3}{2}t^2\,dt=\frac{3}{8}\int\left(t^7-2t^4+t\right)dt=\frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+k=\frac{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}{8}\left(\frac{(1+2x)^2}{8}-\frac{2(1+2x)}{5}+\frac{1}{2}\right)+k$$

e) Ponemos $x=t^2 \to dx=2t\,dt$

$$I=\int\frac{2t^3}{1+t}dt=2\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|\right)+k=2\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})\right]+k$$

f) Hacemos $e^x-1=t^2 \to e^x\,dx=2t\,dt \to dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$

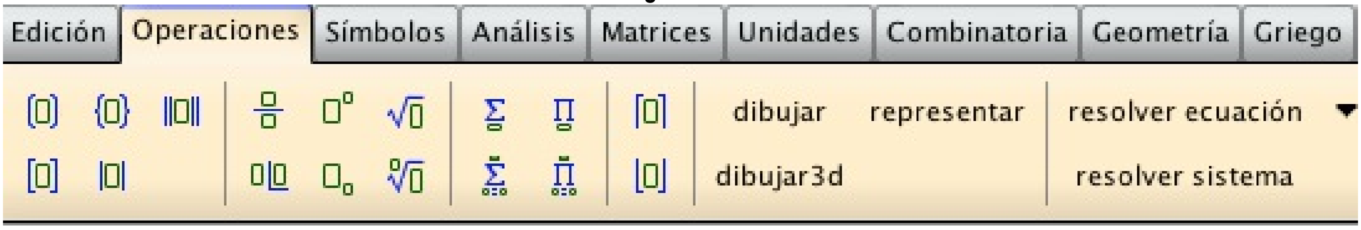
$$I=\int t\cdot\frac{2t\,dt}{t^2+1}=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2(t-arc\,tg\,t)+k=2\left(\sqrt{e^x-1}\right)-arc\,tg\sqrt{e^x-1}+k$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1\. 1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2\. Apartado a):

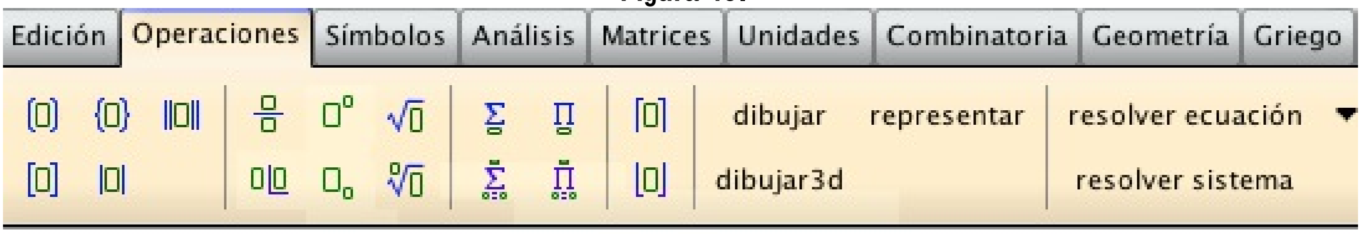
Figura 39.



$$\int \frac{2}{(1+t^2)}\,dt \rightarrow 2\cdot \operatorname{atan}(t)$$

3. Apartado b):

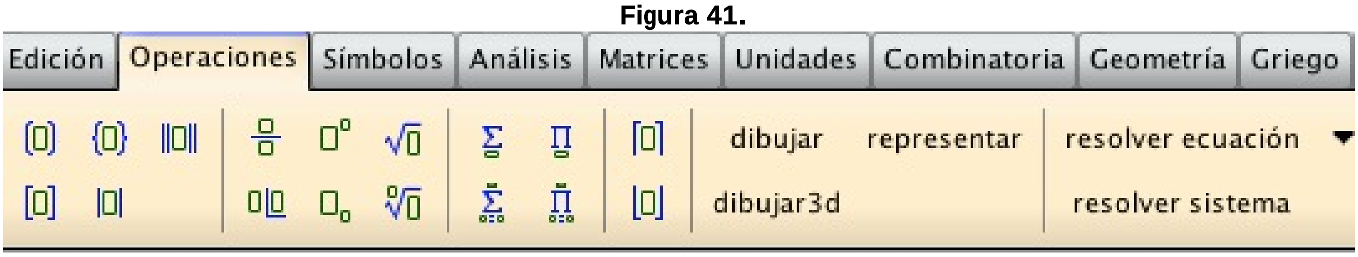
Figura 40.



$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt \rightarrow \frac{3\cdot t}{2\cdot \sqrt[3]{t}}$$

4. Apartado c):

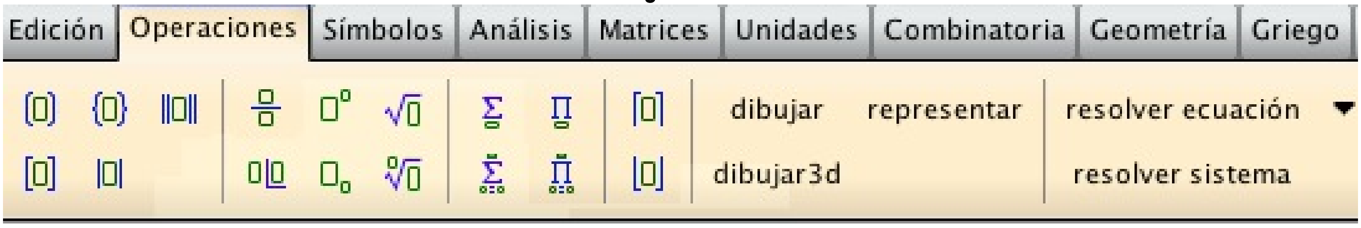
Figura 41.



$$\int \frac{-1}{\sqrt{t}}\,dt \rightarrow \frac{-2\cdot t}{\sqrt{t}}$$

5. Apartado d):

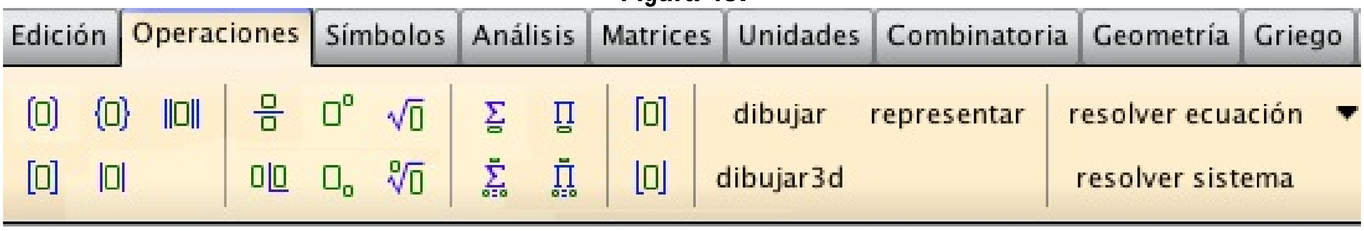
Figura 42.



$$\frac{3}{8}\int t^7-2t^4+t\,dt \rightarrow \frac{3}{64}\cdot t^8-\frac{3}{20}\cdot t^5+\frac{3}{16}\cdot t^2$$

6. Apartado e):

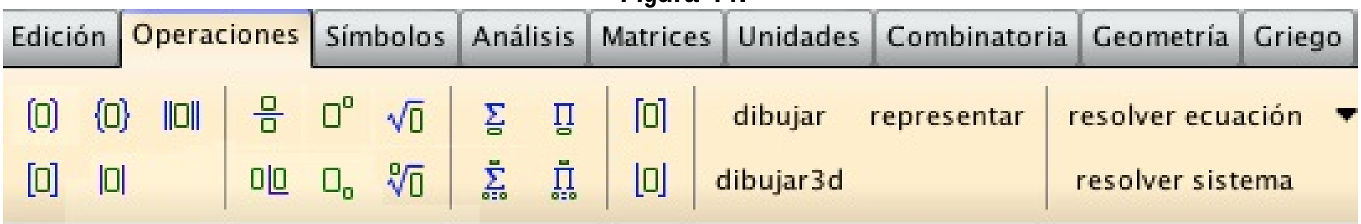
Figura 43.



$$2\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt \rightarrow -2\cdot\ln(|-t-1|)+\left(\frac{2\cdot t^3}{3}-t^2\right)+2\cdot t$$

7. Apartado f):

Figura 44.



$$2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \rightarrow -2\cdot\operatorname{atan}(t)+2\cdot t$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

7. Integrales trigonométricas.

$a) I = \int sen^2 x\,dx$ $\qquad b) I = \int \cos^3 x\,dx$ $\qquad c) I = \int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Las siguientes fórmulas te serán útiles: $\quad sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

$$a) I = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,2x + k$$

$$b) I = \int \cos x\,\cos^2 x\,dx = \int \cos x\left(1 - sen^2 x\right)dx = \int xos\,x\,dx - \int \cos x\,sen^2 x\,dx = sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + k$$

$$c)\ \text{Hacemos } x = 2\,sen\,t;\ \ dx = 2\cos t\,dt\ \ I = \int \sqrt{4 - 4\,sen^2 t}\ 2\cos t\,dt =$$

$$2\int \sqrt{4\left(1 - sen^2 t\right)}\ \cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\ 2t}{2}\right)dt = 4\left(\frac{t}{2} + \frac{sen\ 2t}{4}\right) + k = 2t + sen\,2t + k =$$

(Deshacemos el cambio: $sen\ t = \frac{x}{2} \rightarrow t = arcsen\frac{x}{2}$)

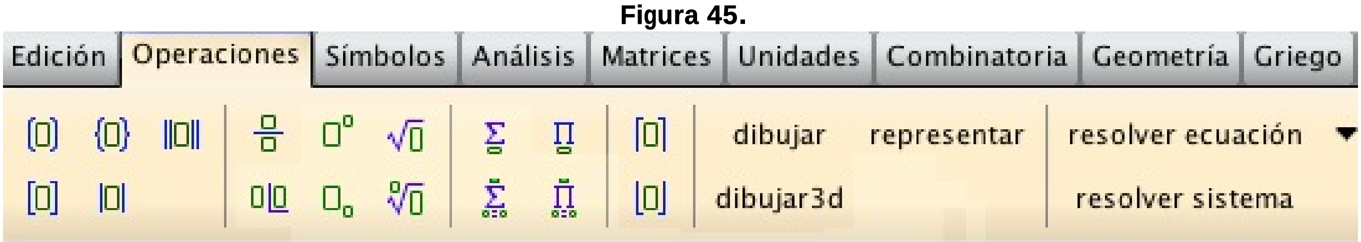
$$= 2\,arcsen\frac{x}{2} + 2\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + k = 2\,arcsen\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + k$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. 1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2. Apartado a):

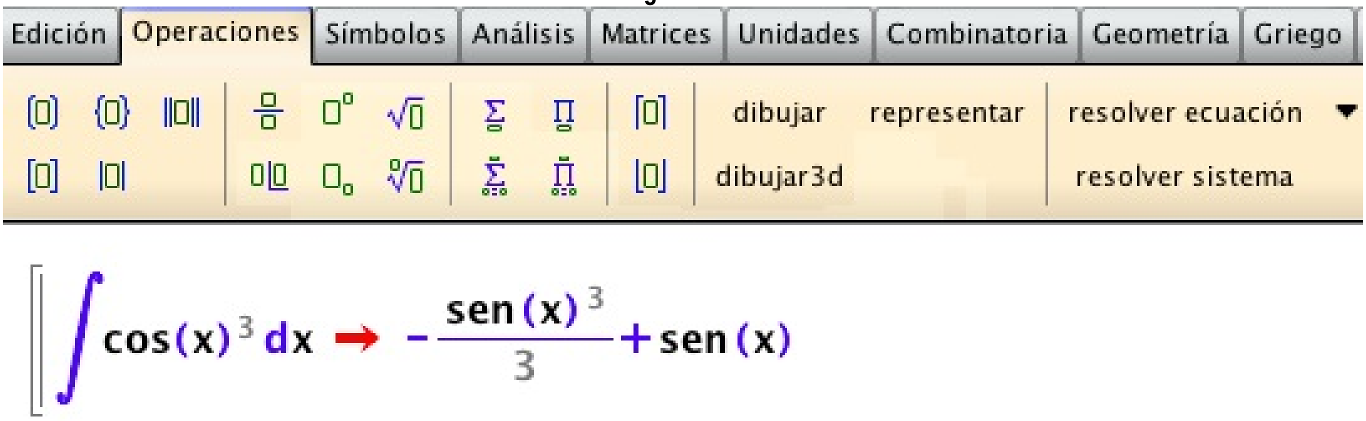
Figura 45.



$$\int sen(x)^2\,dx \rightarrow \frac{x \cdot \tan(x)^2 - \tan(x) + x}{2 \cdot \tan(x)^2 + 2}$$

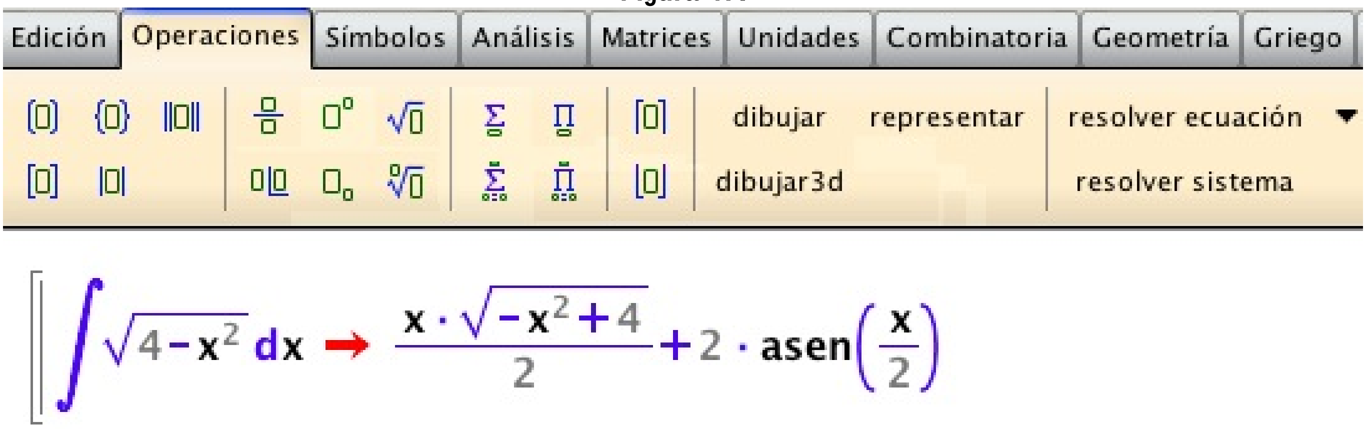
3. Apartado b):

Figura 46.



4. Apartado c):

Figura 47.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

8. Integración por partes.

$a) I = \int x \; sen\, x\, dx$ $\qquad b) I = \int x^2 \cos\, 2x\, dx$ $\qquad c) I = \int e^x \; sen\; x\, dx$

Recuerda la fórmula de integración por partes: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$a)$ Hacemos: $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = sen\, x\, dx \rightarrow \int dv = \int sen\, x\, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

Aplicamos la fórmula: $\int x\,sen\,x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + sen\,x + k$

$b)$ Con frecuencia es necesario aplicar varias veces el método de integración por partes para resolver la integral.

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \cos 2x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}sen 2x = v \end{cases} \qquad I = \frac{x^2 sen\ 2x}{2} - \underbrace{\int x\,sen\,2x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = sen 2x\,dx \rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x = v \end{cases} \qquad I_1 = \int x\,sen\,2x\,dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}sen\ 2x$$

Sustituyendo I_1: $I = \frac{x^2 sen\ 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{1}{4}sen\,2x + k$

$c)$ Puede ocurrir que, al aplicar este método varias veces, aparezca en el segundo miembro una integral igual a la inicial. En este caso, se agrupan y se despeja la integral que queremos hallar:

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\,dx \\ dv = sen x\,dx \rightarrow -\cos x = v \end{cases}$$

(Se resuelve también haciendo: $u = sen\,x; dv = e^x dx$)

$$\underbrace{\int e^x\ sen\ x\,dx}_{I} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x\cos x + e^x\ sen\,x - \underbrace{\int e^x\ sen\ x\,dx}_{I}$$

$$2I = -e^x\cos x + e^x\ sen\,x \rightarrow I = \frac{-e^x\cos x + e^x\ sen\,x}{2} + k$$

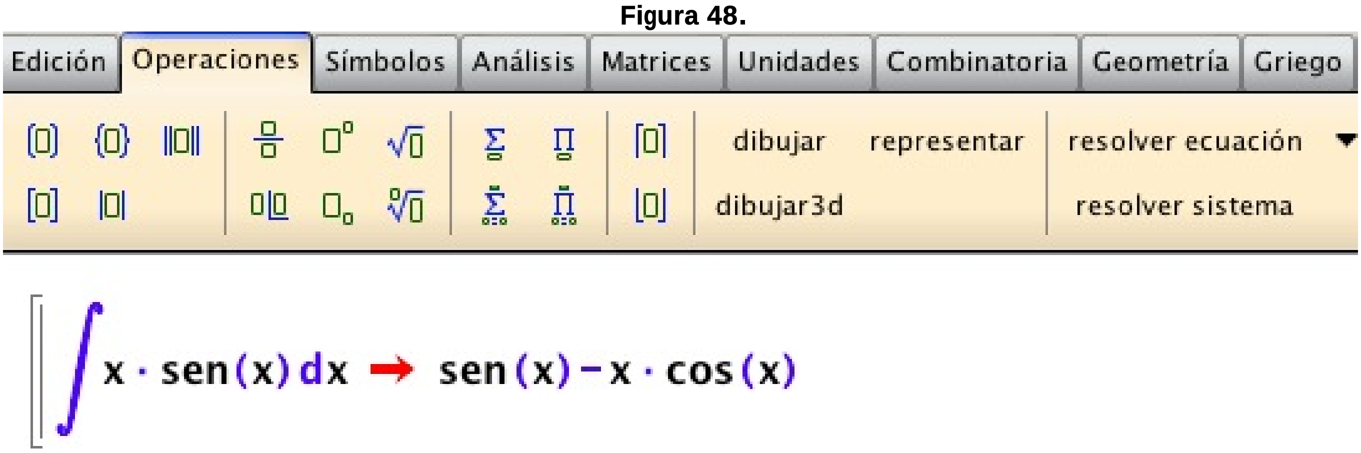
Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2. Apartado a):

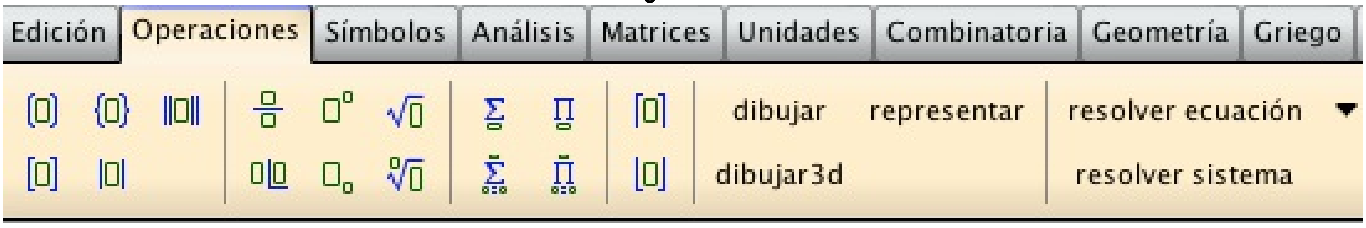
ALGUNOS TIPOS DE INTEGRALES QUE SE RESUELVEN POR PARTES		
$\int x^n e^x \, dx$	$u = x^n$	$dv = e^x \, dx$
$\int x^n sen\, x \, dx$	$u = x^n$	$dv = sen\, x \, dx$
$\int x^n \cos x \, dx$	$u = x^n$	$dv = \cos x \, dx$
$\int x^n \ln x \, dx$	$u = \ln x$	$dv = x^n \, dx$
$\int arc\, tg\, x \, dx$	$u = arc\, tg\, x$	$dv = dx$
$\int arc\, sen\, x \, dx$	$u = arc\, sen\, x$	$dv = dx$
$\int \ln x \, dx$	$u = \ln x$	$dv = dx$

Figura 48.



3. Apartado b):

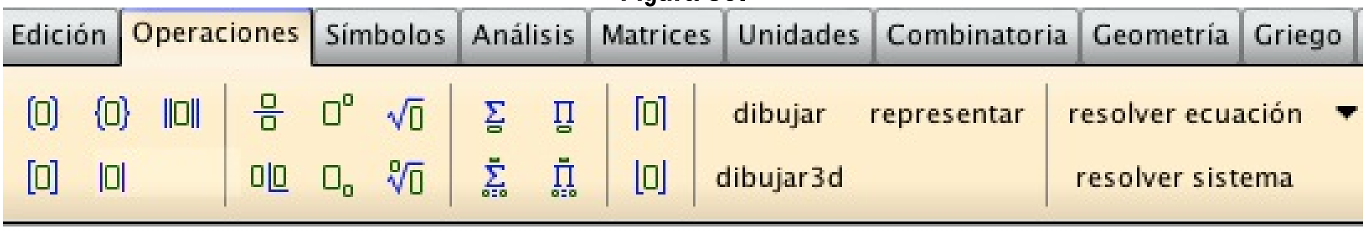
Figura 49.



$$\int x^2 \cdot \cos(2x)\,dx \rightarrow \frac{x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot x)$$

4. Apartado c):

Figura 50.



$$\int e^x \cdot \operatorname{sen}(x)\,dx \rightarrow \frac{e^x \cdot \operatorname{sen}(x)}{2} - \frac{e^x \cdot \cos(x)}{2}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

9. Integración de funciones con solo raíces reales en el denominador.

$$a)\, I = \int \frac{2x^3 - 1}{x+3}dx \qquad b)\, I = \int \frac{3x-2}{x^2-1}dx \qquad c)\, I = \int \frac{1}{x^2 - x^3}dx \qquad d)\, I = \int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$$

Solución:

$$a)\, I = \int \left(2x^2 - 6x + 18 - \frac{55}{x+3}\right)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 18x - 55\ln|x+3| + k$$

Puesto que el grado del denominador no es inferior al del numerador, hemos hecho la división para poner:

$$\frac{dividendo}{divisor} = cociente + \frac{resto}{divisor}$$

$b)$ Descomponemos el denominador en factores $x^2-1=(x+1)(x-1)$. Descomponemos la fracción:

$$\frac{3x-2}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

Calculamos A y B $\rightarrow 3x-2=A(x-1)+B(x+1)$ Si $x=1\rightarrow B=\frac{1}{2};\ si\ x=-1\rightarrow A=\frac{5}{2}$

$$I=\int\frac{5/2}{x+1}dx+\int\frac{1/2}{x-1}dx=\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+k$$

$c)$ Denominador: $x^2-x^3=x^2(1-x)$ tiene una raíz doble y una simple. Descomponemos:

$$\frac{1}{x^2-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1-x}=\frac{Ax(1-x)+B(1-x)+Cx^2}{x^2(1-x)}$$

$Para\ x=0=B$

$Para\ x=1=C$

$Para\ x=2\rightarrow 1=-2A-B+4C\rightarrow -2A\rightarrow A=1$

$$I=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1-x}dx=\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}-\ln|1-x|+k=\ln|x|-\ln|1-x|-\frac{1}{x}+k=\ln\left|\frac{x}{1-x}\right|-\frac{1}{x}+k$$

$d)$ Descomponemos la fracción: $\frac{(x+2)^2}{(x-1)^2x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x}$ Calculamos A, B y C: A =-3, B = 9, C = 4

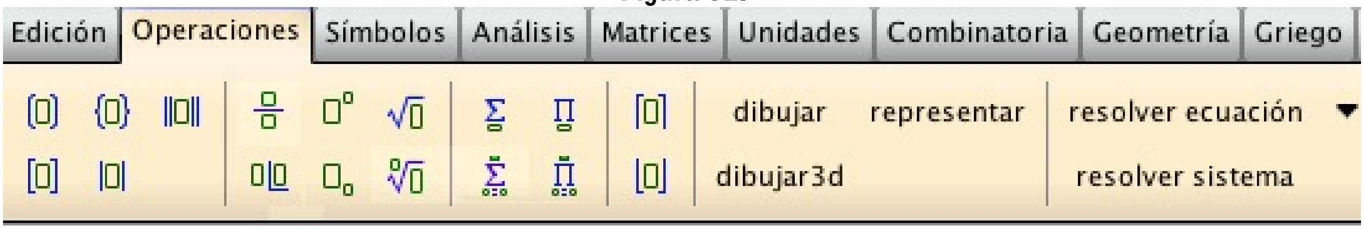
$$I=\int\frac{-3}{x-1}dx+\int\frac{9}{(x-1)^2}dx+\int\frac{4}{x}dx=-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+4\ln|x|+k=\ln\frac{x^4}{|x-1|^3}-\frac{9}{x-1}+k$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. 1. En este ejercicio, resolveremos todos los apartados de idéntica manera:

2. Apartado a):

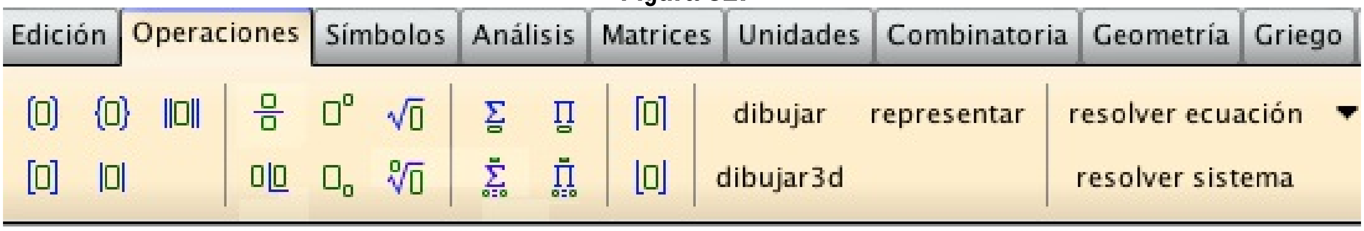
Figura 51.



$$\int \frac{2x^3-1}{x+3}\,dx \rightarrow -55\cdot\ln(|-x-3|)+\left(\frac{2\cdot x^3}{3}-3\cdot x^2\right)+18\cdot x$$

3. Apartado b):

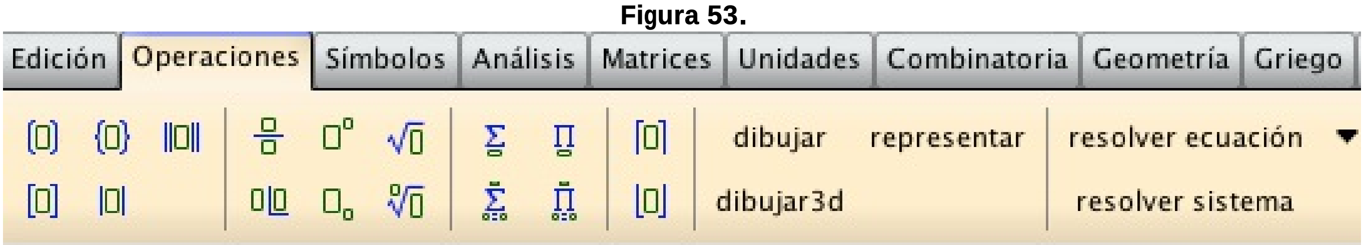
Figura 52.



$$\int \frac{3x-2}{x^2-1}\,dx \rightarrow \frac{5\cdot\ln(|-x-1|)}{2}+\frac{\ln(|x-1|)}{2}$$

4. Apartado c):

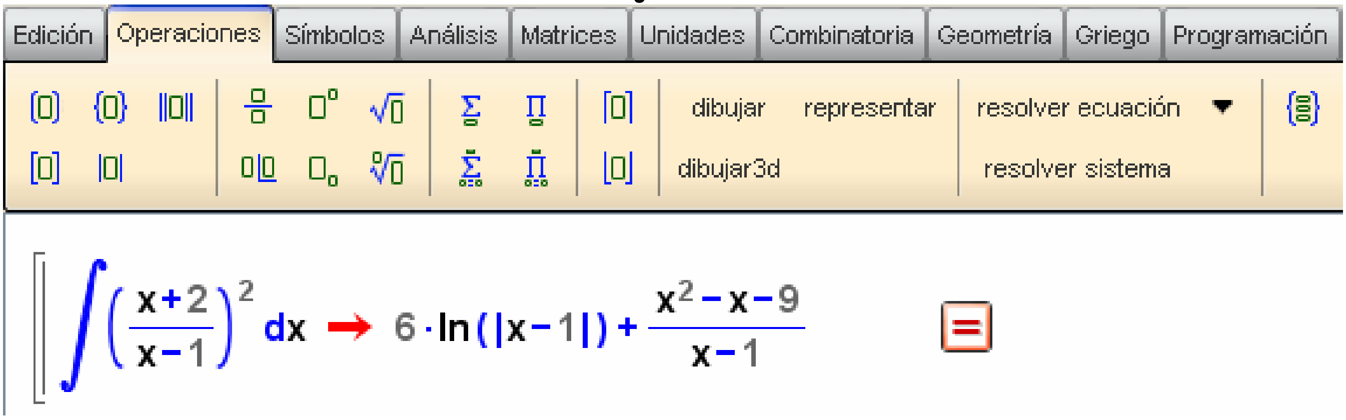
Figura 53.



$$\int \frac{1}{x^2-x^3}\,dx \rightarrow \ln(|x|)-\ln(|-x+1|)-\frac{1}{x}$$

5. Apartado d):

Figura 54.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

10. Función primitiva.

Halla una función g(x) que sea primitiva de f (x) = sen x, cuya gráfica pase por el punto $(\pi,0)$.

La función g debe verificar que $g'(x) = f(x)$ y $g(\pi) = 0$. Hallamos todas las primitivas de f:

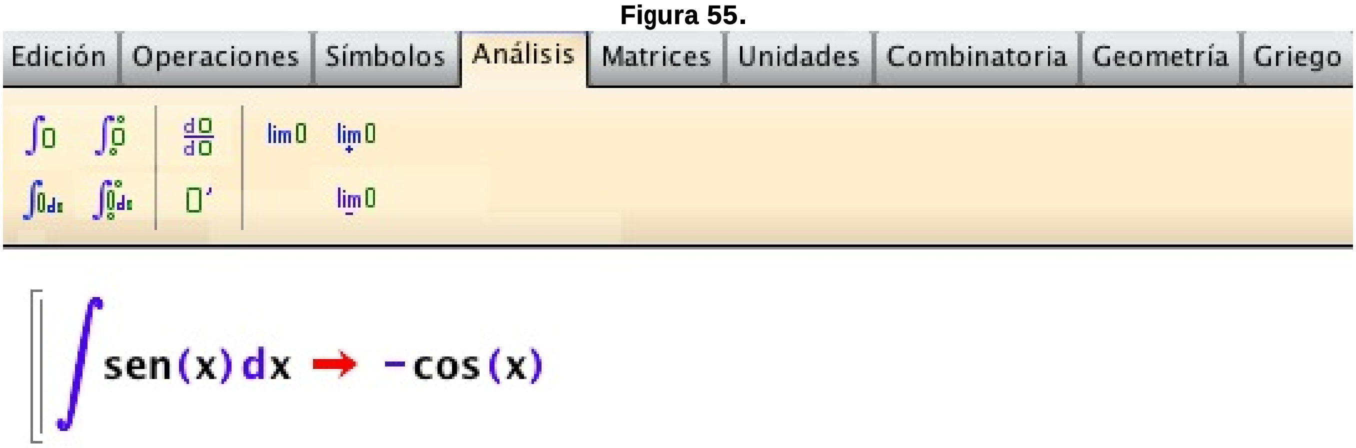
$$\int sen\, x\, dx = -\cos x + c \rightarrow g(x) = -\cos x + c \qquad g(\pi) = -\cos\pi + c = 0 \rightarrow 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

La función que buscamos es: $g(x) = -\cos x - 1$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

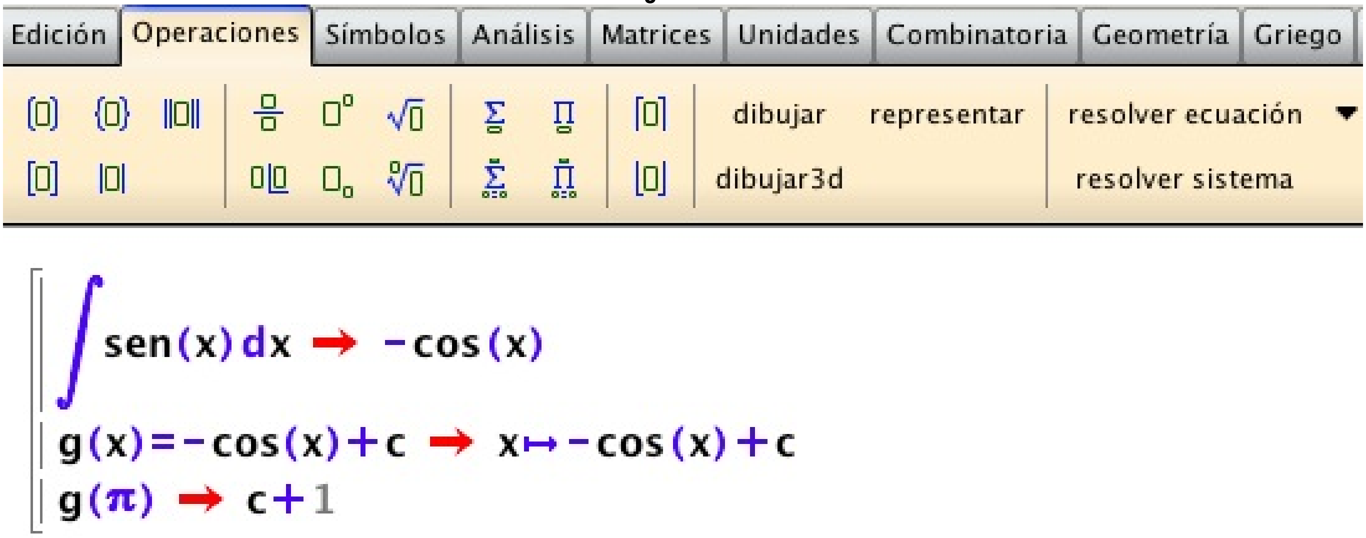
1. Para resolver el ejercicio, debemos calcular en primer lugar, la integral del seno(x):

Figura 55.



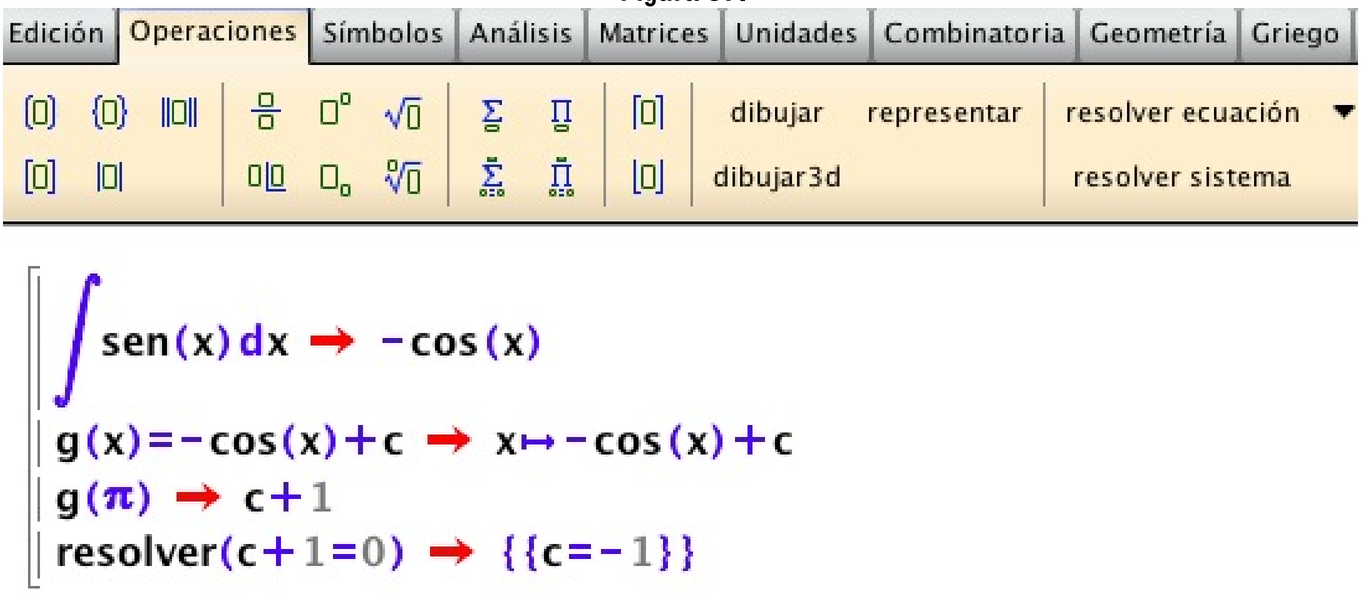
2. Ahora escribimos nuestra función g(x), y dentro del mismo bloque, indicamos que queremos calcular $g(\pi)$:

Figura 56.



3. Para saber el valor de c, resolveremos la siguiente ecuación:

Figura 57.



4. Por último representamos la función obtenida:

Figura 58.

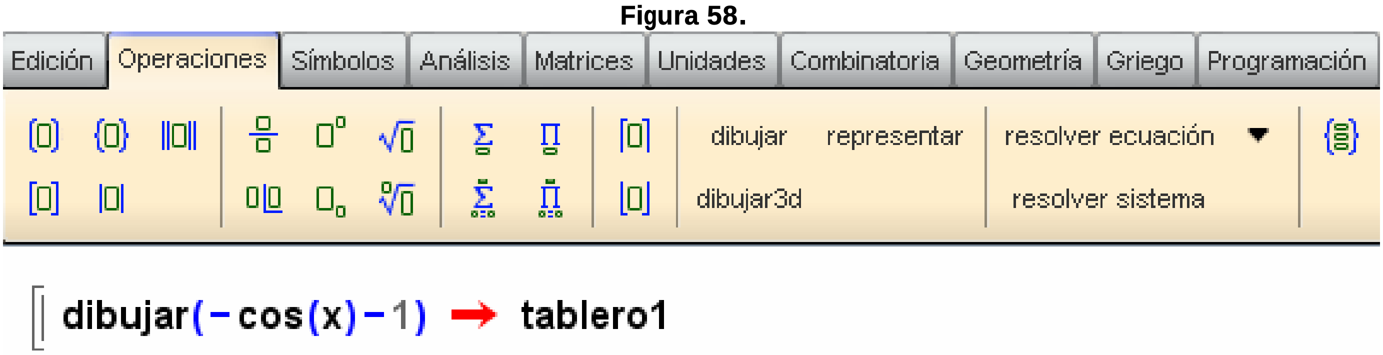
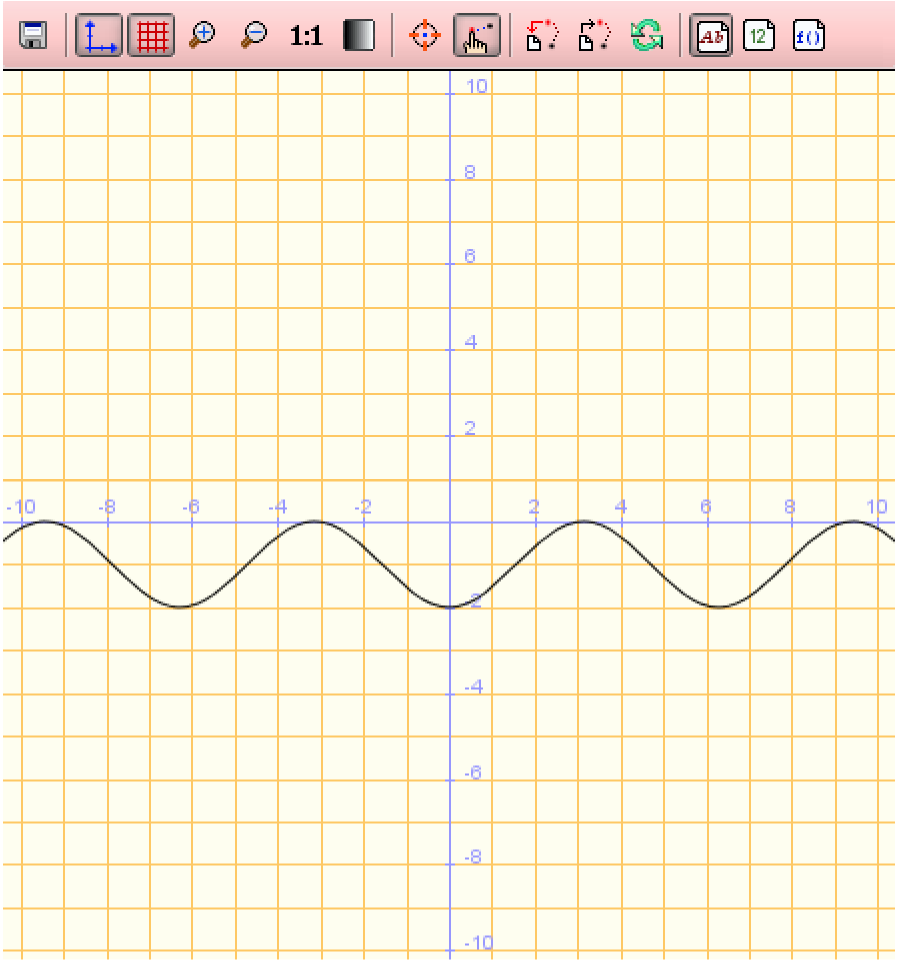


Figura 59.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

11. Función primitiva.

Halla $f(x)$ ***sabiendo que:*** $f(0)=1, \quad f'(0)=2, \quad f''(x)=3x$

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int 3x\,dx=\frac{3x^2}{2}+G_1 \rightarrow f'(0)=G_1=2$$

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2}+2$$

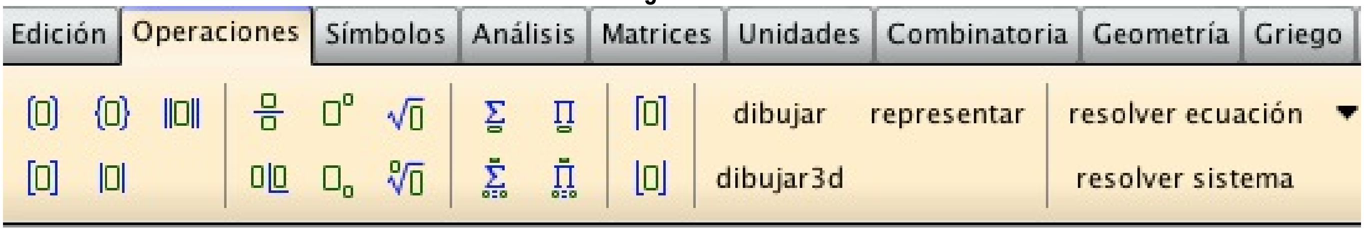
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\frac{3x^2}{2}+2\right)dx=\frac{x^3}{2}+2x+C_2$$

$$f(0)=C_2=1 \rightarrow f(x)=\frac{x^3}{2}+2x+1$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio, resolveremos en primer lugar la integral de f'':

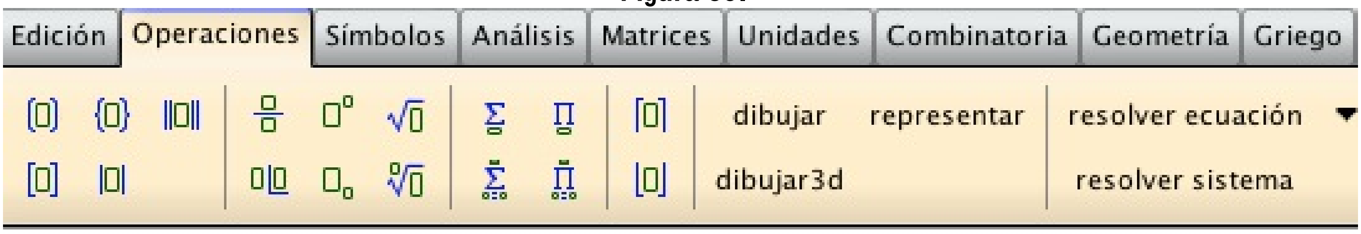
Figura 59.



$$\int 3x\,dx \rightarrow \frac{3}{2}\cdot x^2$$

2. También calcularemos la integral de f':

Figura 60.



$$\int 3x\,dx \rightarrow \frac{3}{2}\cdot x^2$$

$$\int \frac{3}{2}\cdot x^2+2\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^3+2\cdot x$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

12. Función primitiva.

a) ***Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquier punto viene dada por la función*** $f(x) = x e^{2x}$

b) ***Obtén de esta familia, la curva que pasa por el punto A (0, 2).***

a) Buscamos todas las $F(x)$ tales que $F'(x) = f(x) = xe^{2x}$. Es decir, las primitivas de $f(x)$.

Integramos por partes: $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dv \\ dv = e^{2x}\,dx \rightarrow v = \dfrac{1}{2}\cdot e^{x} \end{cases}$ $\quad \int x e^{2x}\,dx = x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot e^{2x} - \int \dfrac{1}{2}\cdot e^{2x}\,dx = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + k$

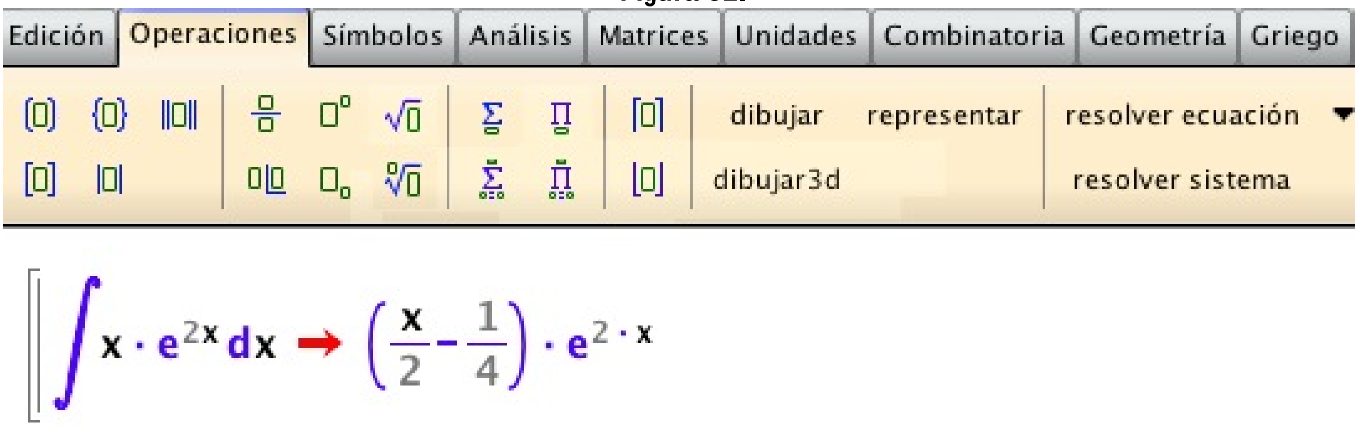
b) Si queremos que la curva pase por A (0, 2), se debe cumplir: $\dfrac{0\cdot e^{2\cdot 0}}{2} - \dfrac{e^{2\cdot 0}}{4} + k = 2 \rightarrow k = \dfrac{9}{4}$

La curva pedida es: $F(x) = \dfrac{x\,e^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + \dfrac{9}{4}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

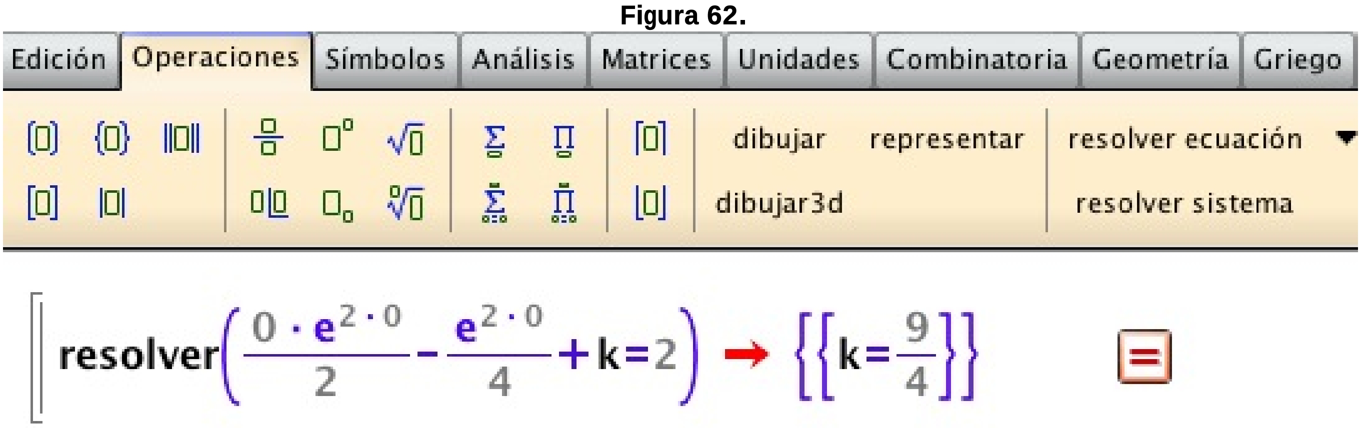
1. Calcularemos la integral de f(x):

Figura 61.



2. Ahora, resolveremos la ecuación resultante de igualar el resultado del paso anterior (después de sustituir x por 0) a 2:

Figura 62.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS