TEMA 13 La integral definida. Aplicaciones

1. Integral definida.

Calcula la integral. $\int_{-1}^{4}(x^2+x-2)\,dx$

Calculamos una primitiva de la función $f(x)=x^2+x-2$: $\quad G(x)=\int(x^2+x-2)\,dx=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$

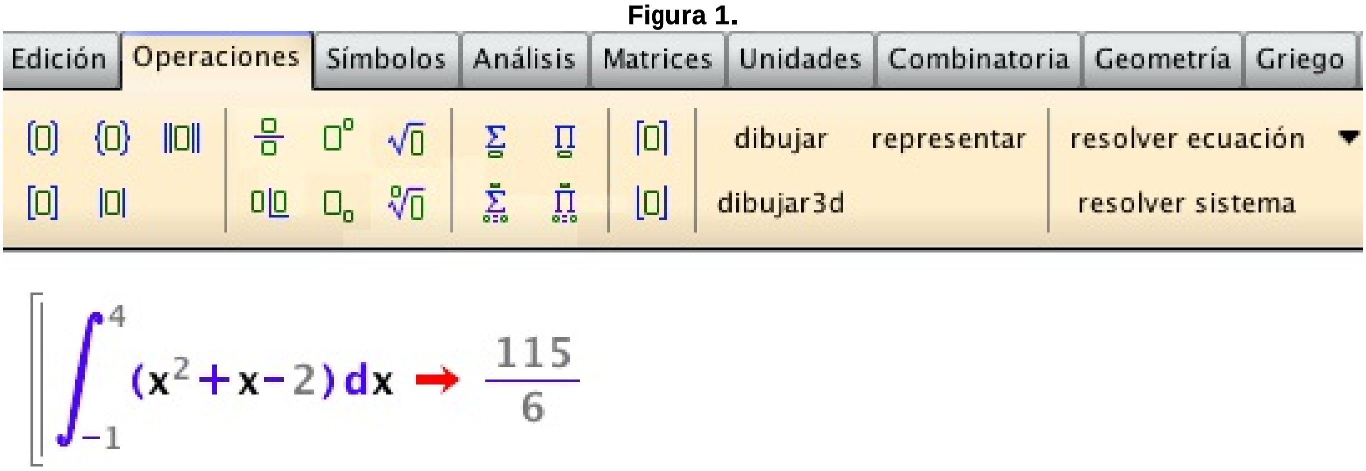
Según la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{4}(x^2+x-2)\,dx=G(4)-G(1)=\left(\frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}-8\right)-\left[\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2=\frac{64}{3}-\frac{13}{6}=\frac{115}{6}\right]$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para calcular la integral definida, sólo tenemos que rellenar la plantilla que nos da Wiris en Análisis. Una vez hecho esto, pulsamos igual y obtenemos el resultado.

Figura 1.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

2. Área bajo una curva.

Calcula el área que determina la curva: $y=x^2+x-2$ **con el eje X entre las abscisas -1 y 4.**

La función corta al eje X en -2 y en 1. Para calcular el área habrá que calcular por separado el área entre -1 y 1 y entre 1 y 4, cambiar de signo la negativa y sumarlas.

$$\int (x^2+x-2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1} = -\frac{7}{6}-\frac{13}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$\int (x^2+x-2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1} = -\frac{64}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{135}{6}$$

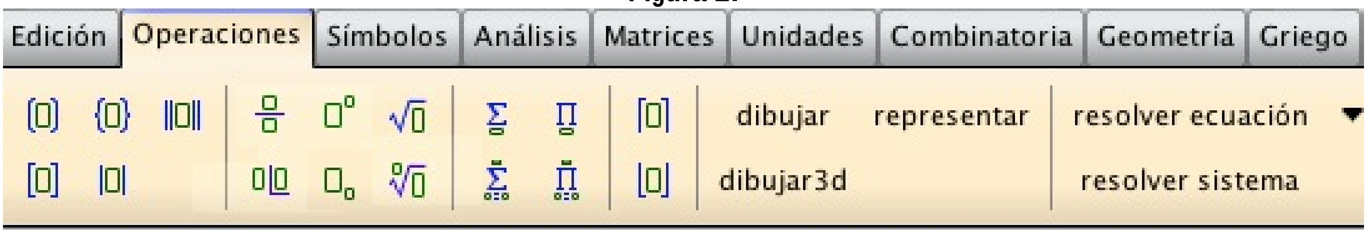
Área: $-\frac{10}{3}+\frac{135}{6}=\frac{155}{6}=25{,}83u^2$

Este problema no es el mismo que el anterior, en el que la integral calculada nos da el resultado de restarle al área sobre el eje X (entre 1 y 4) el área bajo el eje X (entre -1 y 1).

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Lo primero que debemos hacer es calcular la primera integral definida de la misma manera que en el ejercicio anterior:

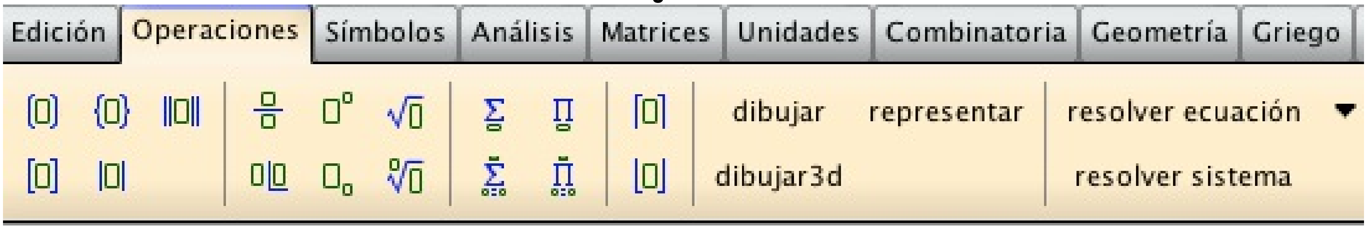
Figura 2.



$$\int_{-1}^{1} (x^2+x-2)\,dx \rightarrow -\frac{10}{3}$$

2. Ahora calculamos la segunda integral:

Figura 3.

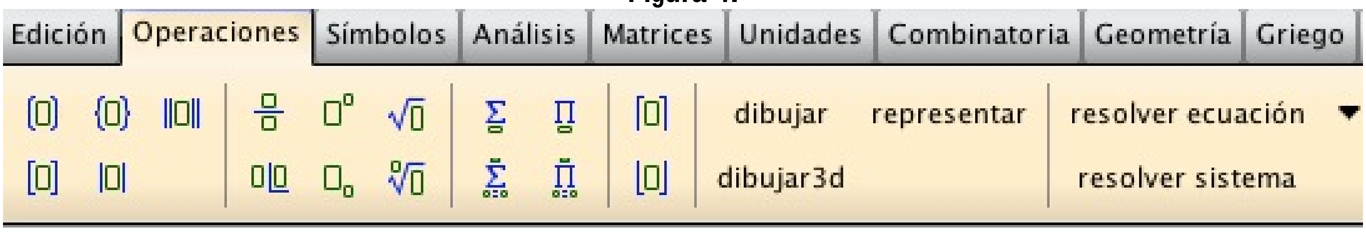


$$\int_{-1}^{1} (x^2+x-2)\,dx \rightarrow -\frac{10}{3}$$

$$\int_{1}^{4} (x^2+x-2)\,dx \rightarrow \frac{45}{2}$$

3. Por último sumamos los dos resultados anteriores:

Figura 4.



$$\int_{-1}^{1} (x^2+x-2)\,dx \rightarrow -\frac{10}{3}$$

$$\int_{1}^{4} (x^2+x-2)\,dx \rightarrow \frac{45}{2}$$

$$-\frac{10}{3}+\frac{45}{2} \rightarrow \frac{115}{6}$$

Figura 5.

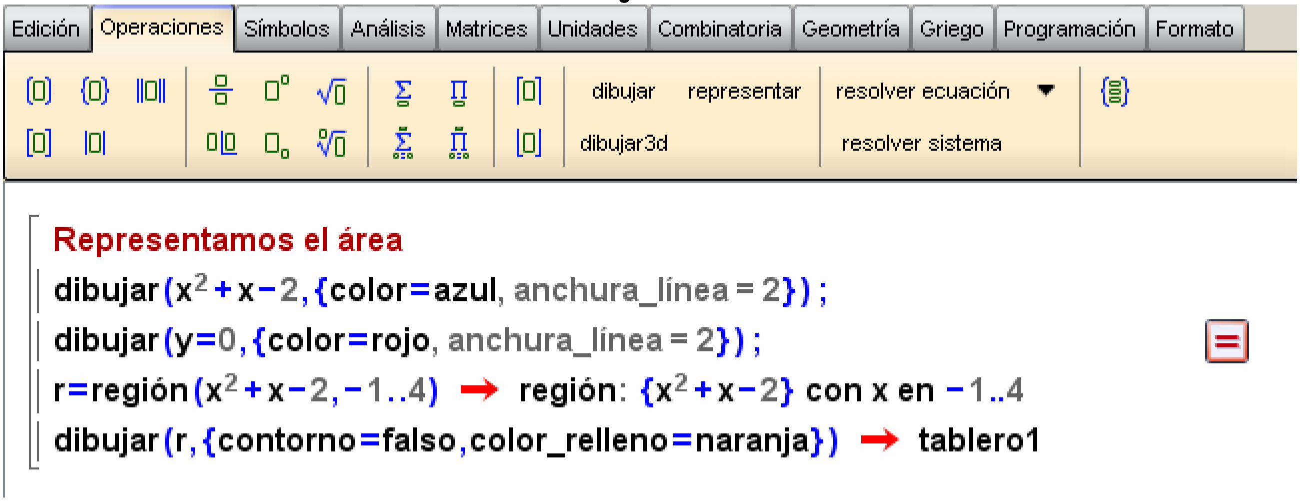
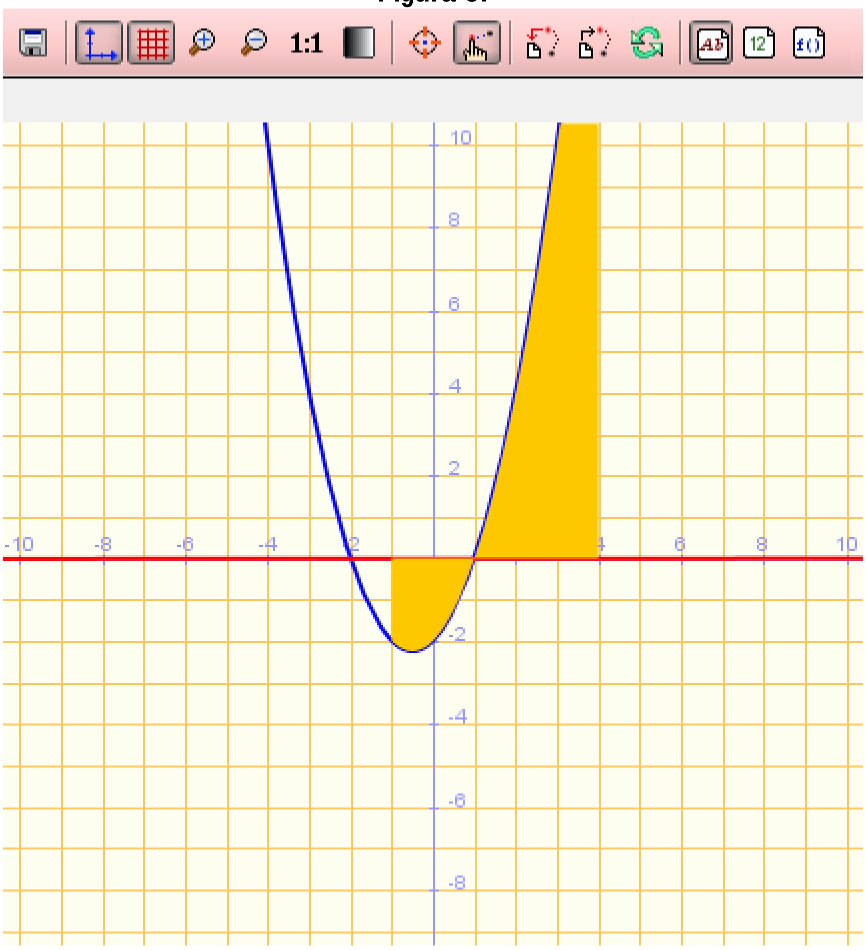


Figura 6.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

3. Área bajo una curva.

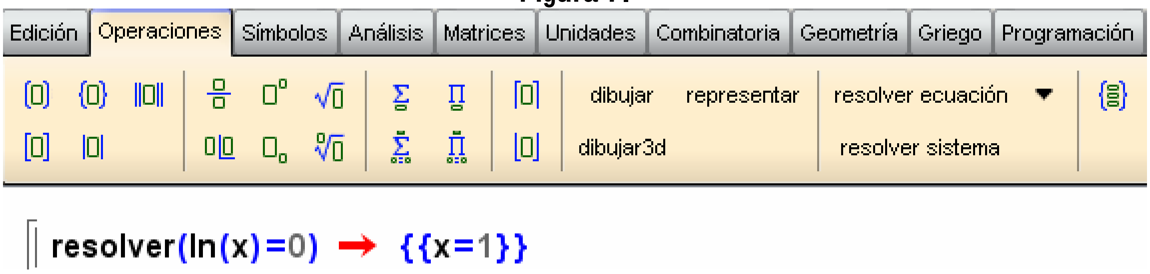
Halla el área de la región del plano encerrada por la curva y = ln x entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa x = e.

- Resolvemos la ecuación $\ln x = 0 \rightarrow X = 1$ La curva corta al eje OX en el punto de abscisa x = 1. entre 1 y ***e*** no hay raíces.
- Primitiva de $y = \ln x : G(x) = \int \ln x\, dx = x \ln x - x$ (por partes).
- $G(1) = 1\ln 1 - 1 = -1; G(e) = e \ln e - e = 0$
- $\int_1^e \ln x\, dx = G(e) - G(1) = 0 - (-1) = 1;$ Área $= 1u^2$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

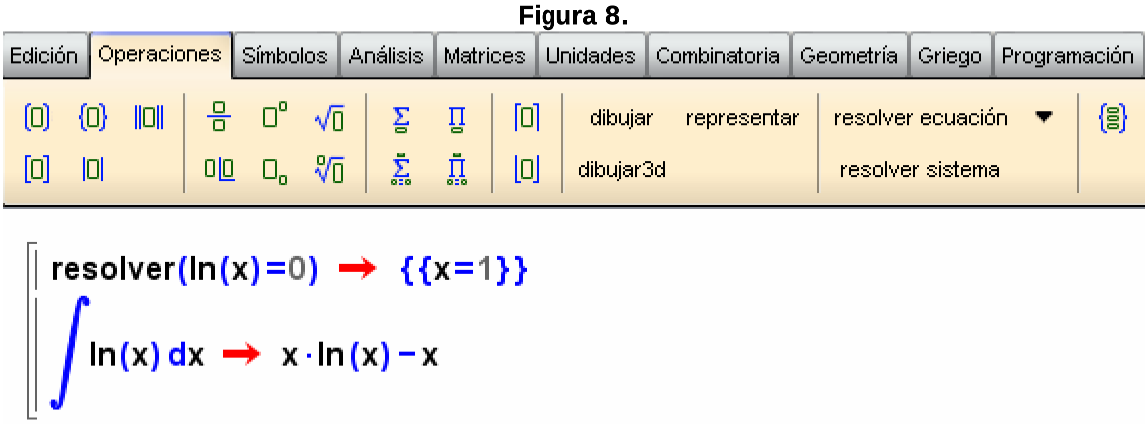
1. En este ejercicio empezamos resolviendo una ecuación:

Figura 7.



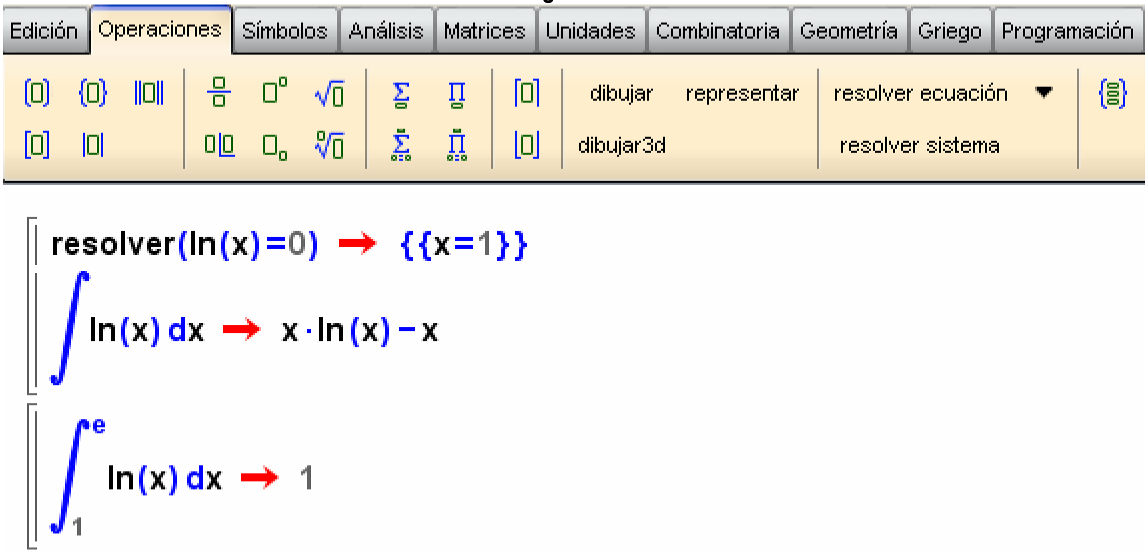
2. Ahora, el mismo logaritmo, lo integramos:

Figura 8.



3. Por último definimos la integral anterior y obtenemos nuestro resultado:

Figura 9.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

4. Área limitada por una curva y el eje OX.

Calcula el área entre la curva $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ ***y el eje X.***

Hallamos el área sin dibujar el recinto:

- Resolvemos la ecuación $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$. Las soluciones son x = 0, x = 2 y x = 3.

- Calculamos una primitiva de la función: $G(x) = \int \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2$

- Obtenemos el valor de la primitiva en cada uno de los puntos anteriores:

  $G(0) = 0,\ \ G(2) = \frac{8}{3},\ \ G(3) = \frac{9}{4}.$

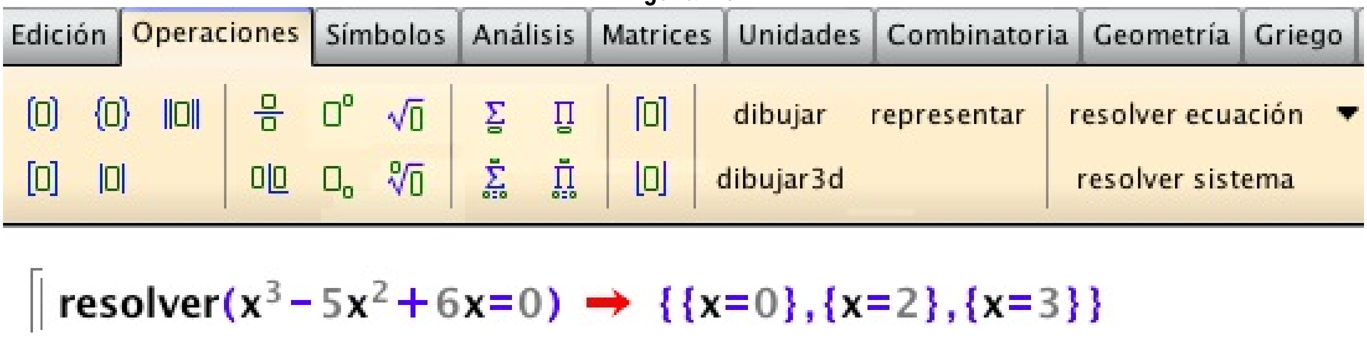
- Calculamos la integral en cada tramo: $\int_0^2 f(x)\,dx = G(2) - G(0) = \frac{8}{3}$
  $\int_2^3 f(x)\,dx = G(3) - G(2) = \frac{9}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{12}$

- Área: $\frac{8}{3} + \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{37}{12}u^2$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

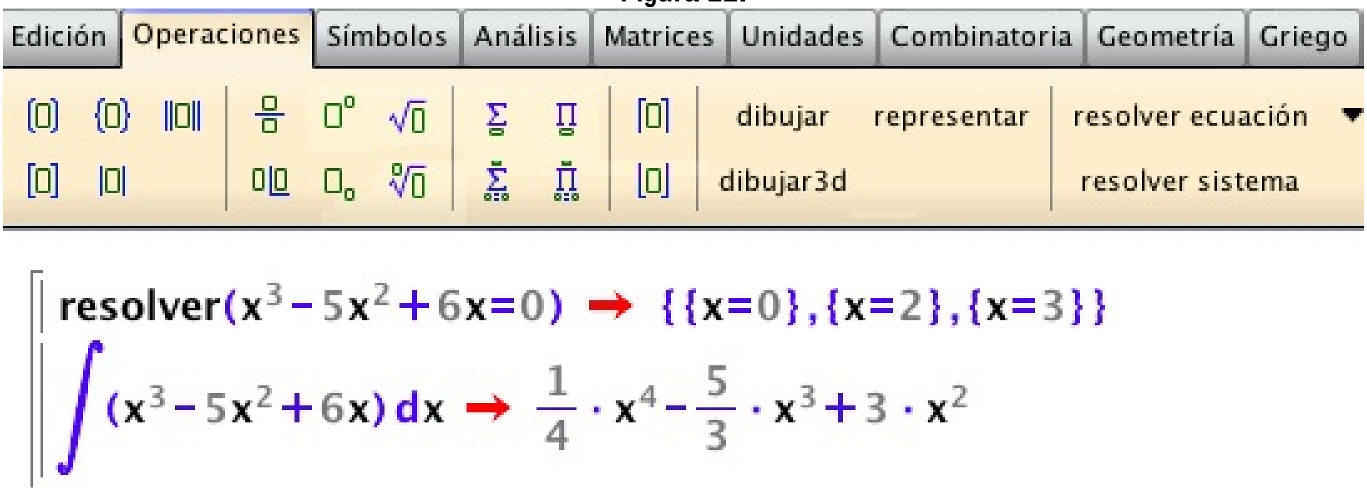
1. Para obtener la solución de este ejercicio seguimos los pasos del anterior. En primer lugar resolvemos la ecuación:

Figura 10.



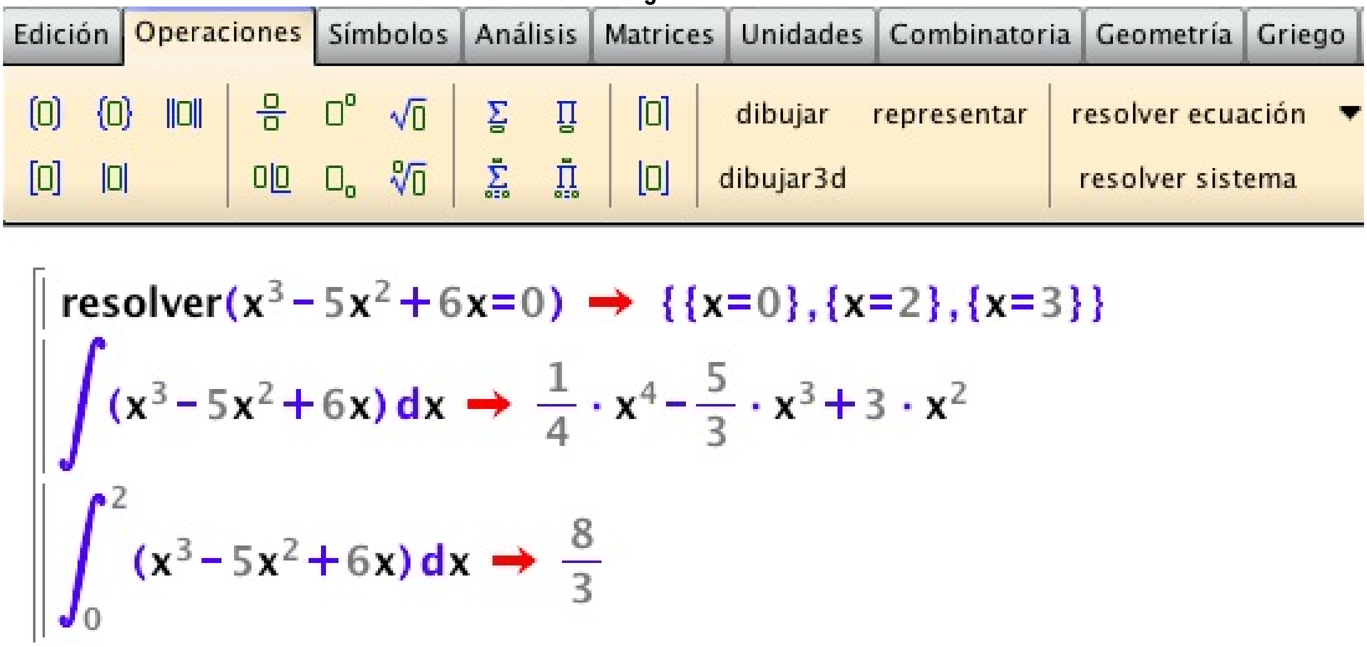
2. Ahora calculamos la integral:

Figura 11.



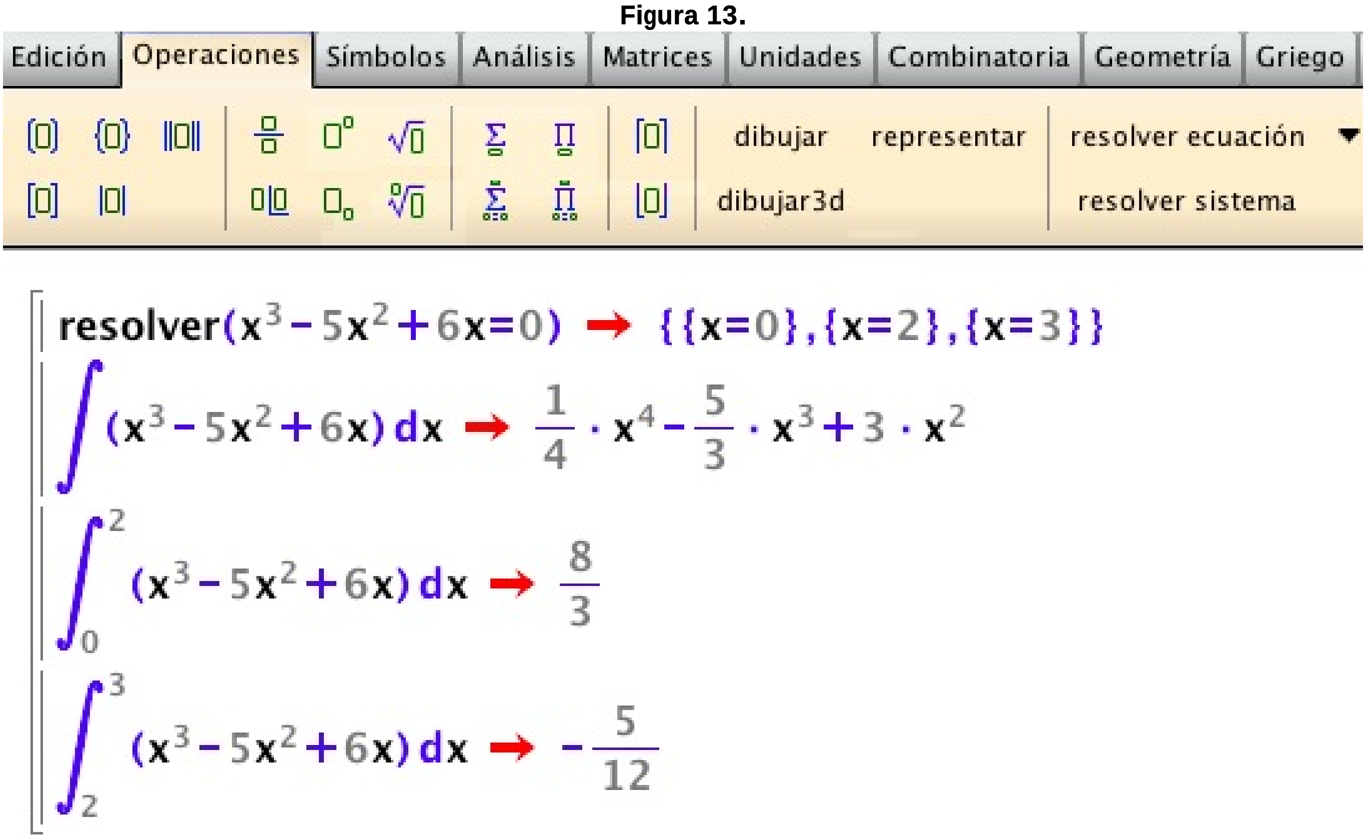
3. Después la definimos entre 0 y 2:

Figura 12.



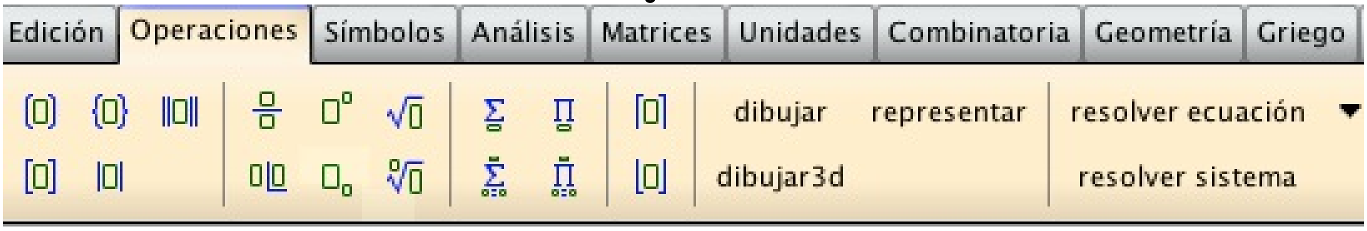
4. Lo mismo hacemos ahora, pero entre 2 y 3:

Figura 13.



5. Por último, sumamos los dos resultados anteriores, teniendo en cuenta que el segundo es negativo y debe ir en valor absoluto:

Figura 14.



$$\mathrm{resolver}(x^3-5x^2+6x=0) \rightarrow \{\{x=0\},\{x=2\},\{x=3\}\}$$

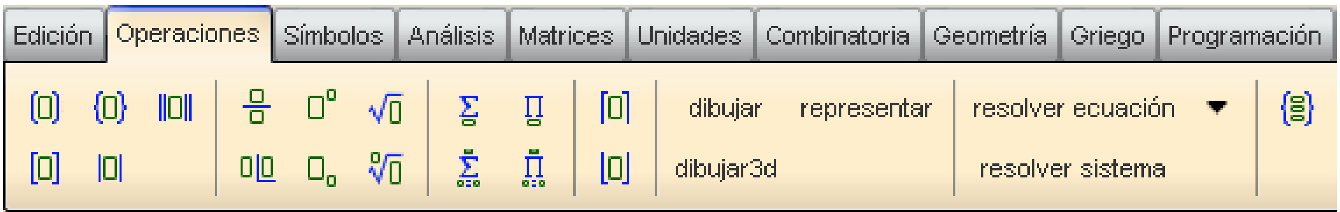
$$\int (x^3-5x^2+6x)\,dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{5}{3}\cdot x^3+3\cdot x^2$$

$$\int_0^2 (x^3-5x^2+6x)\,dx \rightarrow \frac{8}{3}$$

$$\int_2^3 (x^3-5x^2+6x)\,dx \rightarrow -\frac{5}{12}$$

$$\frac{8}{3}+\left|-\frac{5}{12}\right| \rightarrow \frac{37}{12}$$

Figura 15.



Ahora representamos el área

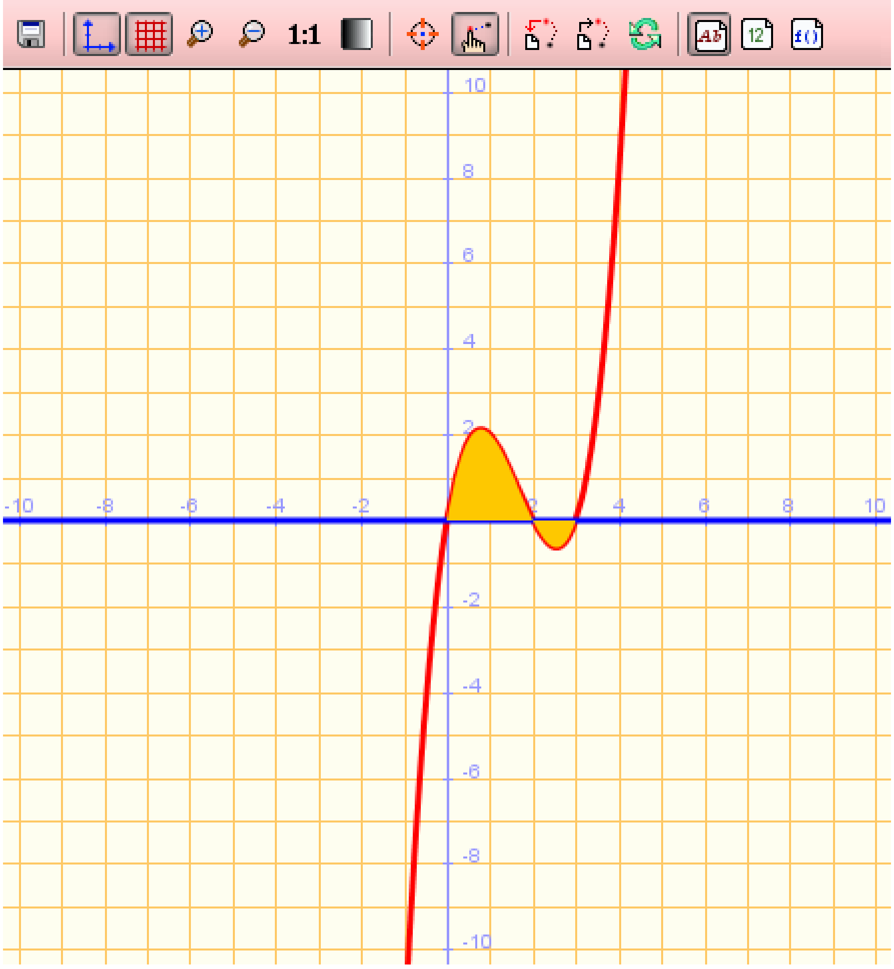
dibujar(x^3-5x^2+6x,{color=rojo,anchura_linea=3});

dibujar(y=0,{color=azul,anchura_linea=3});

r=región(x^3-5x^2+6x,0..3)

dibujar(r,{contorno=falso,color_relleno=naranja})

Figura 16.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

5. Área entre 2 curvas.

Halla el área limitada por las parábolas $y=\frac{x^2}{2}$ e $y^2=2x$. ***Representa el recinto cuya área se pide.***

Representamos las dos parábolas, $y=\frac{x^2}{2}$, de eje vertical e $y^2=2x$, de eje horizontal, y hallamos sus puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{2} \\ y^2=2x \end{array}\right\} x=0,\ x=2$$

El área perdida es la comprendida entre las curvas $y=\frac{x^2}{2}$ e $y=\sqrt{2x}$, que es igual al área comprendida entre la función diferencia, a la que llamamos h(x), y el eje OX.

$$h(x)=\frac{x^2}{2}-\sqrt{2x};\quad G(x)=\int\left(\frac{x^2}{2}-\sqrt{2x}\right)dx=\frac{1}{6}x^3-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$$

$$G(0)=0;\quad G(2)=\frac{8}{6}-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{8}}{3}=\frac{8}{6}-\frac{8}{3}=-\frac{8}{6}$$

$$\int_0^2 h(x)\,dx=G(2)-G(0)=-\frac{8}{6};\quad \text{Área}=\frac{8}{6}u^2=\frac{4}{3}u^2$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. El primer paso que seguiremos en este ejercicio es calcular el sistema $\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y^2=2x \end{array}\right\} x=0,\ x=2$ para calcular los puntos donde se cortan las dos curvas. También seria conveniente representar las dos curvas en un único tablero

2. Se representan ambas funciones en el mismo tablero como vemos a continuación:

Figura 17.

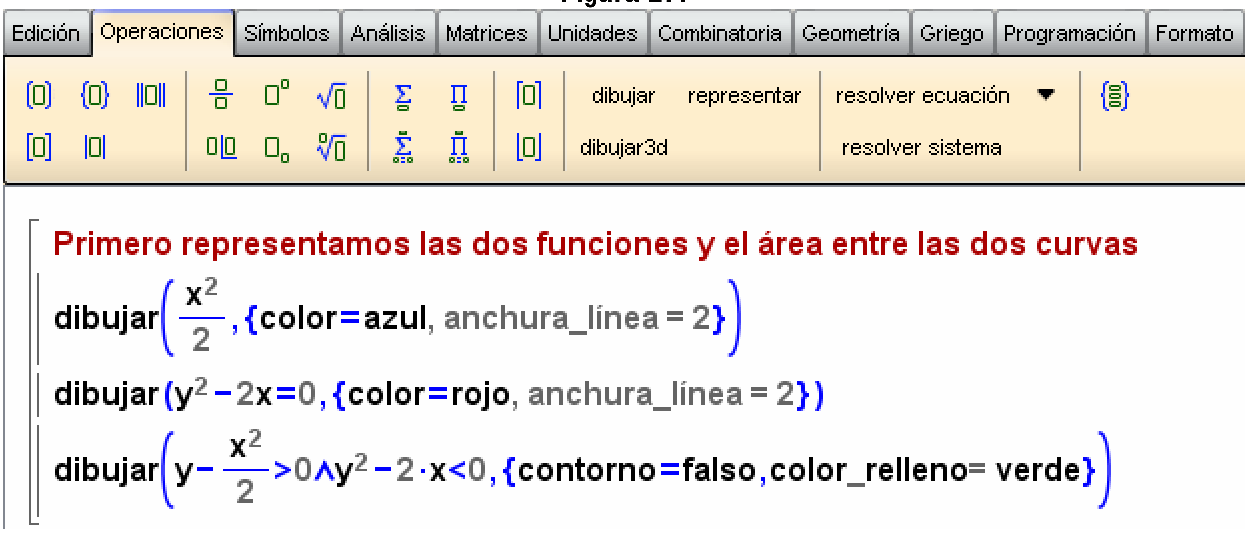
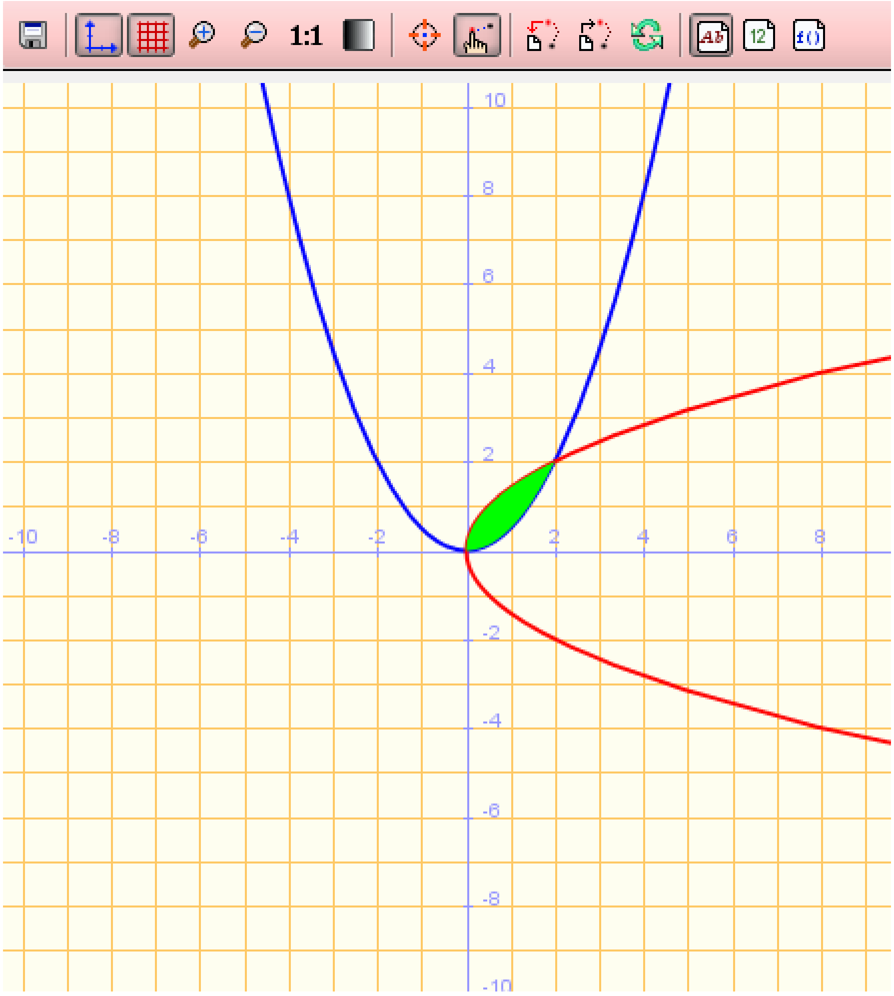
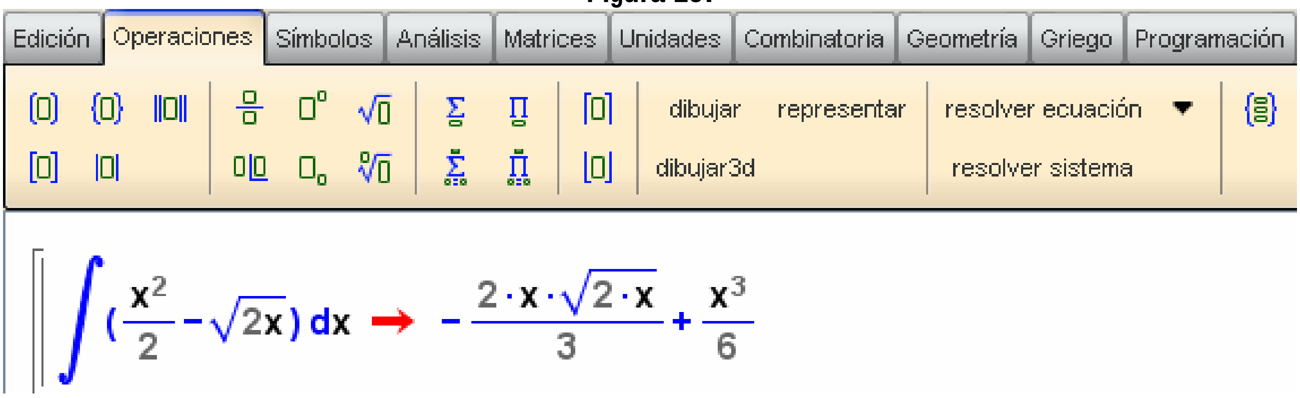


Figura 18.



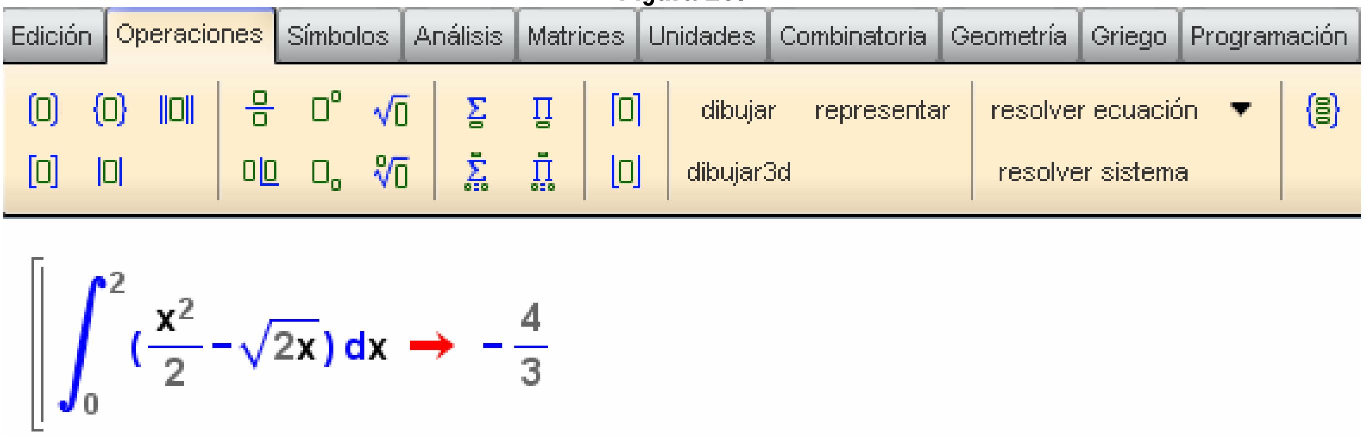
3. A continuación calcularemos la siguiente integral:

Figura 19.



4. Por último, definimos la integral entre 0 y 2, y calculamos el resultado:

Figura 20.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

6. Área entre 2 curvas.

Calcula el área comprendida entre las curvas f y g : $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1$

El área entre estas curvas es igual al área comprendida entre la función diferencia y el eje X.

$$f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 2x; \quad f(x) - g(x) = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 1$$

$$G(x) = \int \left(x^3 + x^2 - 2x\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$$

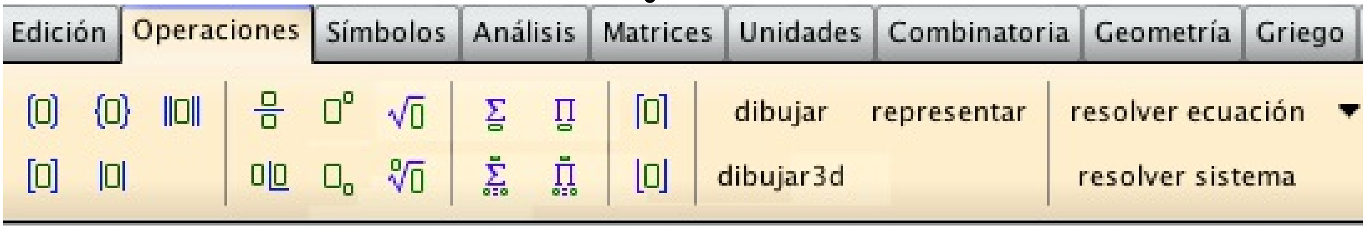
$$G(-2) = -\frac{8}{3}, G(0) = 0,\ \ G(1) = -\frac{5}{12}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{-2}^{0} (f-g)(x)\,dx = G(0) - G(-2) = \frac{8}{3} \\ \int_{0}^{1} (f-g)(x)\,dx = G(1) - G(0) = -\frac{5}{12} \end{array}\right\} Área = \frac{8}{5} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} u^2$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Nuestro primer paso es resolver la siguiente ecuación como hemos visto en temas anteriores:

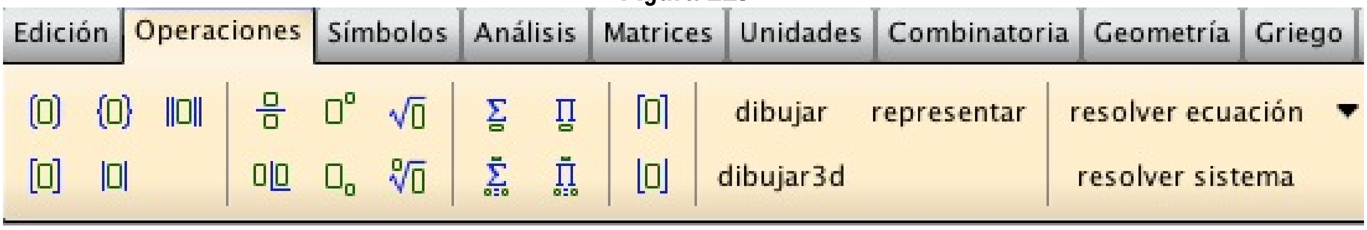
Figura 21.



$$\text{resolver}(x^3+x^2-2x=0) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$

2. Ahora calculamos la integral:

Figura 22.

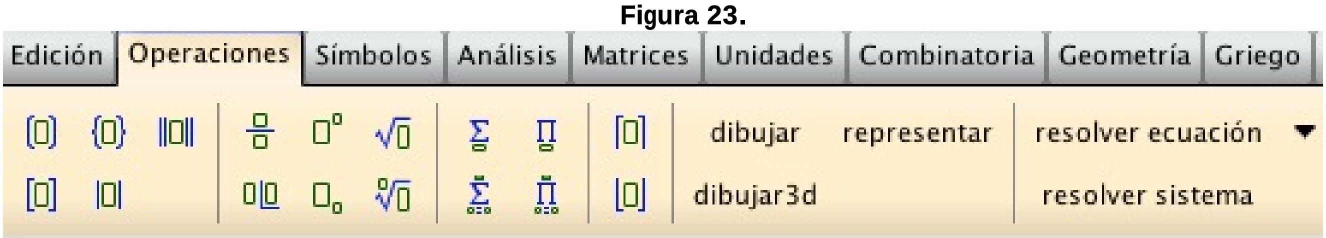


$$\text{resolver}(x^3+x^2-2x=0) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$

$$\int (x^3+x^2-2x)\,dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{3}\cdot x^3-x^2$$

3. El siguiente paso es calcular dos integrales, una definida entre -2 y 0 y la otra entre 0 y 1:

Figura 23.



$$\text{resolver}(x^3+x^2-2x=0) \rightarrow \{\{x=-2\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$

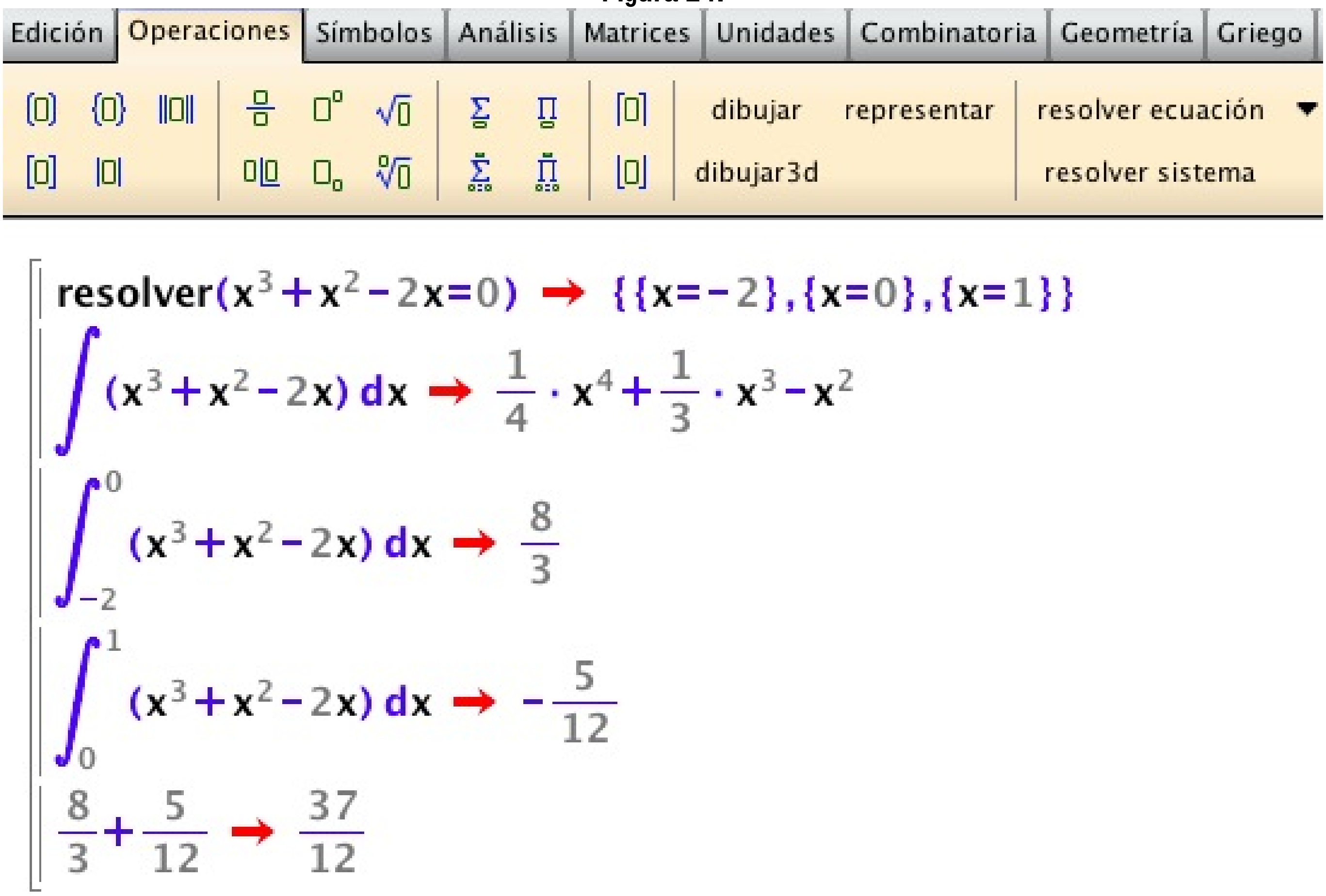
$$\int (x^3+x^2-2x)\,dx \rightarrow \frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{3}\cdot x^3-x^2$$

$$\int_{-2}^{0} (x^3+x^2-2x)\,dx \rightarrow \frac{8}{3}$$

$$\int_{0}^{1} (x^3+x^2-2x)\,dx \rightarrow -\frac{5}{12}$$

4. Por último, sumamos (en valor absoluto) los dos resultados anteriores:

Figura 24.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

7. Área de un recinto.

Calcula el área del recinto sombreado, donde la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 1$ ***y la de la recta es*** $y = 5 - x$.

Obtenemos el punto A resolviendo el sistema: $\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 1 \\ y = x - 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \rightarrow No\ nos\ importa \end{array}$

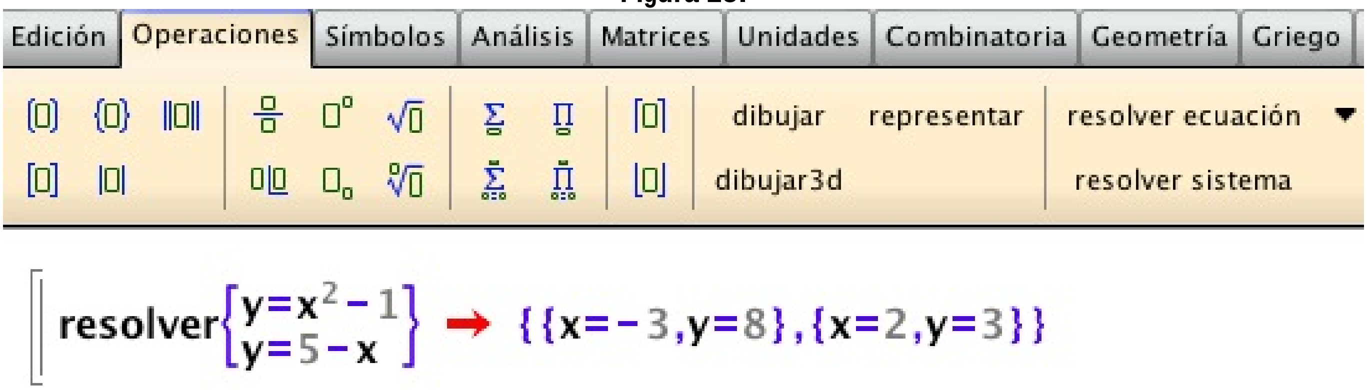
Calculamos el área del recinto ABC como suma de los recintos R_1 y R_2.

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx = \left[\dfrac{x^3}{3} - x\right]_2 = \dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3} \\[2em] R_2 = \int_2^5 (5 - x)\,dx = \left[5x - \dfrac{x^2}{2}\right]_2^5 = \dfrac{25}{2} - 8 = \dfrac{9}{2} \end{array}\right\} \text{Área} = R_1 + R_2 = \dfrac{35}{6} u^2$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

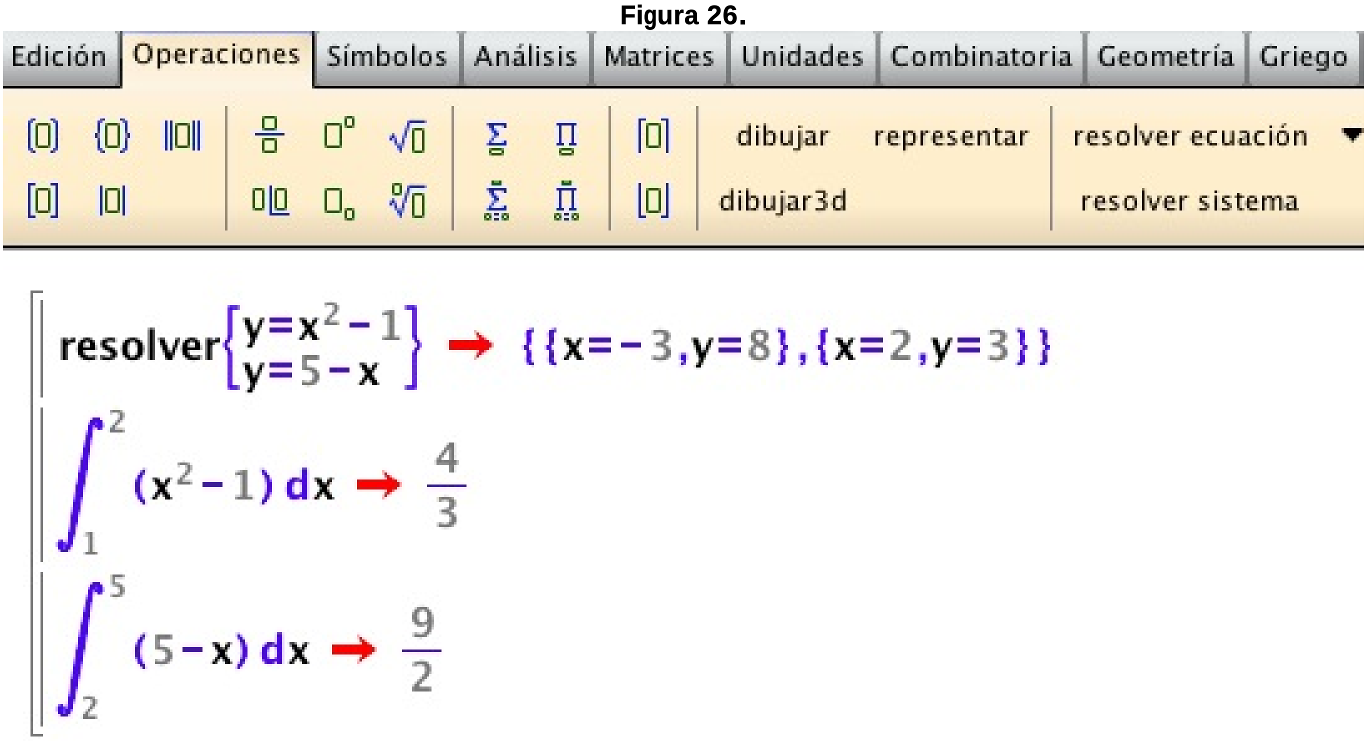
1. Lo primero que haremos es resolver el sistema (para ello, pinchamos en Operaciones, y dentro de ella en Resolver sistema):

Figura 25.



2. Ahora, calcularemos las dos integrales definidas:

Figura 26.



2. Por último, representaremos el área, aunque para ello, primero debemos calcularla:

Figura 27.

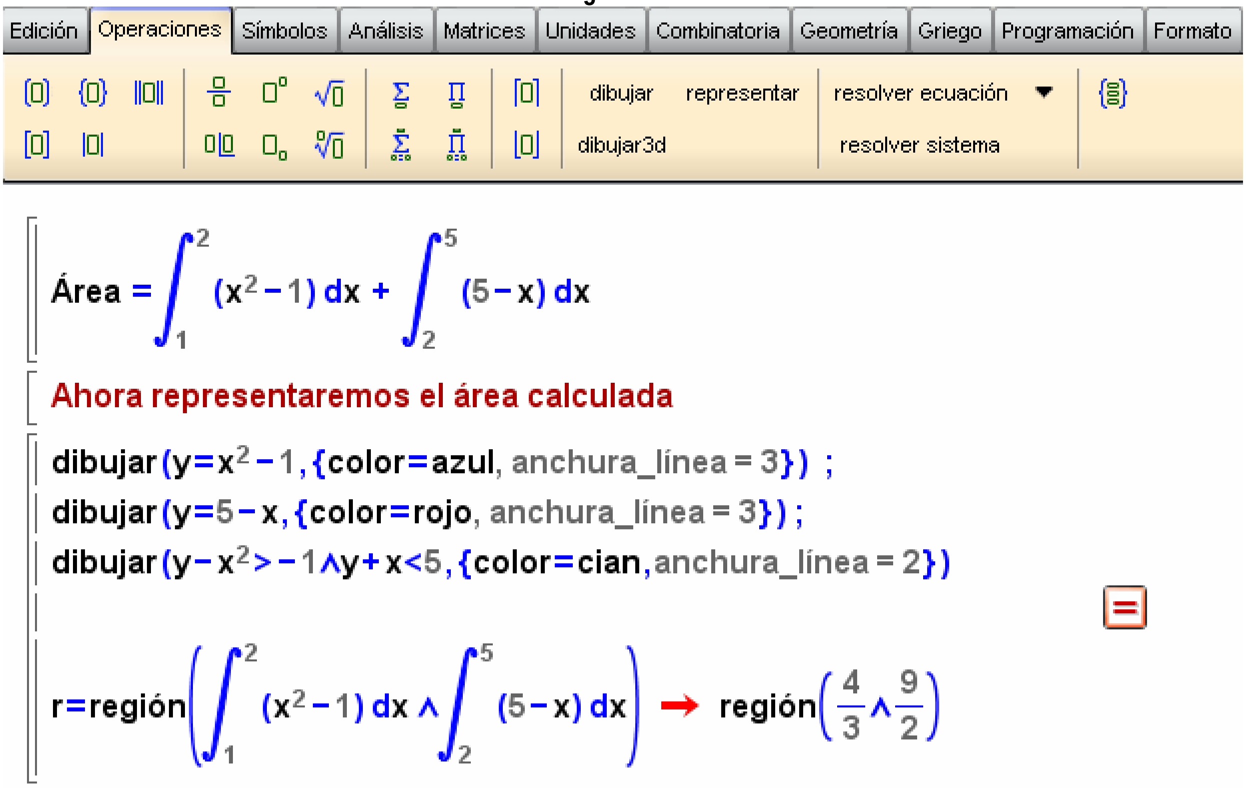
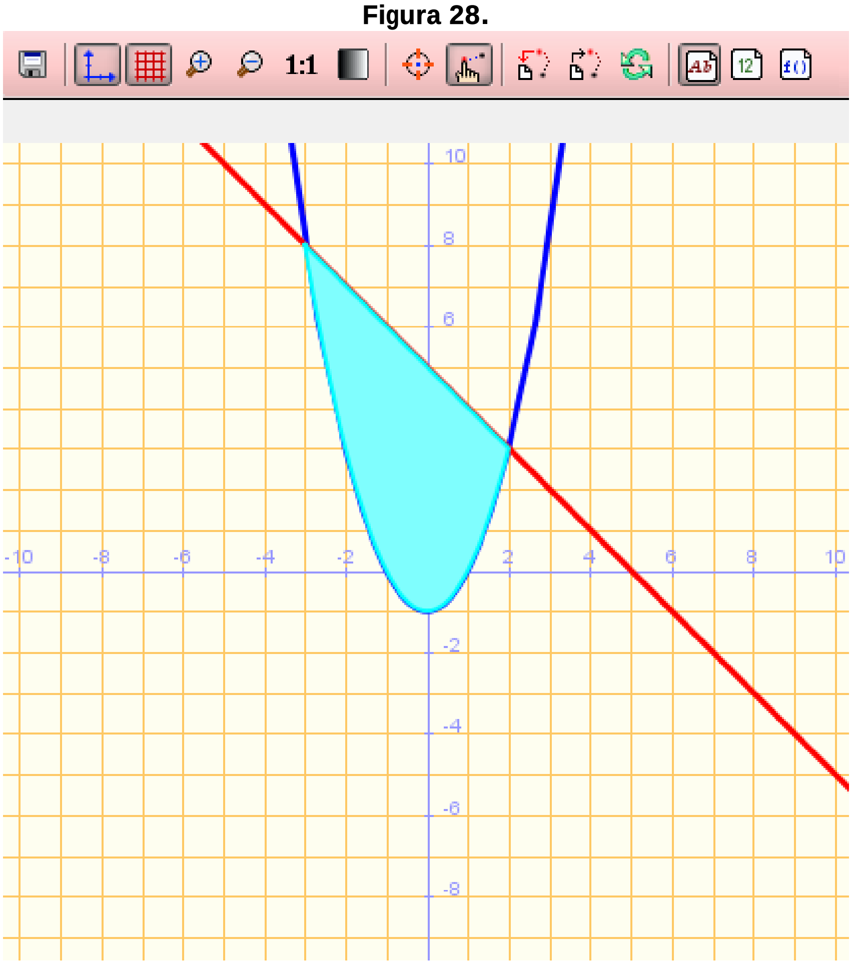


Figura 28.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

8. Área de un recinto.

Calcula el área del recinto plano limitado por las rectas y = x, y = 2x y la parábola $y = x^2$.

Representamos las rectas y la parábola para identificar el recinto. Puntos de corte:

$$\left.\begin{matrix} y = x \\ y = 2x \end{matrix}\right\} x = 0 : \quad \left.\begin{matrix} y = x \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix} : \quad \left.\begin{matrix} y = 2x \\ y = x^2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$$

Descomponemos el recinto OAB en suma de R_1 y R_2.

$$R_1 = \int_0^1 (2x - x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

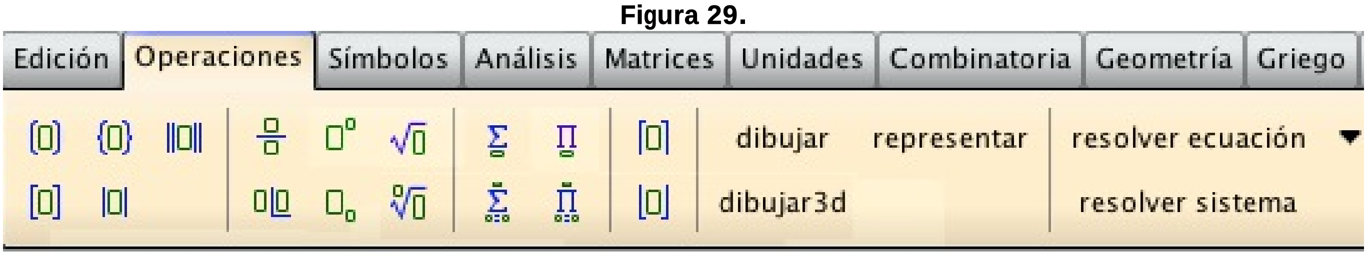
$$R_2 = \int_1^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

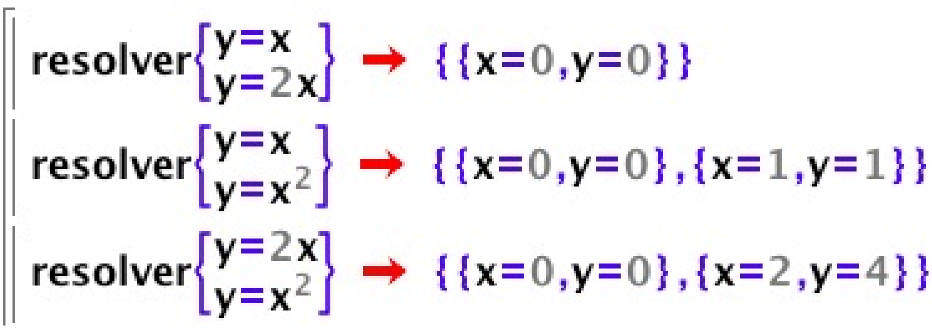
$$Área = R_1 + R_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} u^2$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, comprobaremos los resultados de los sistemas, y para ello, los resolveremos:

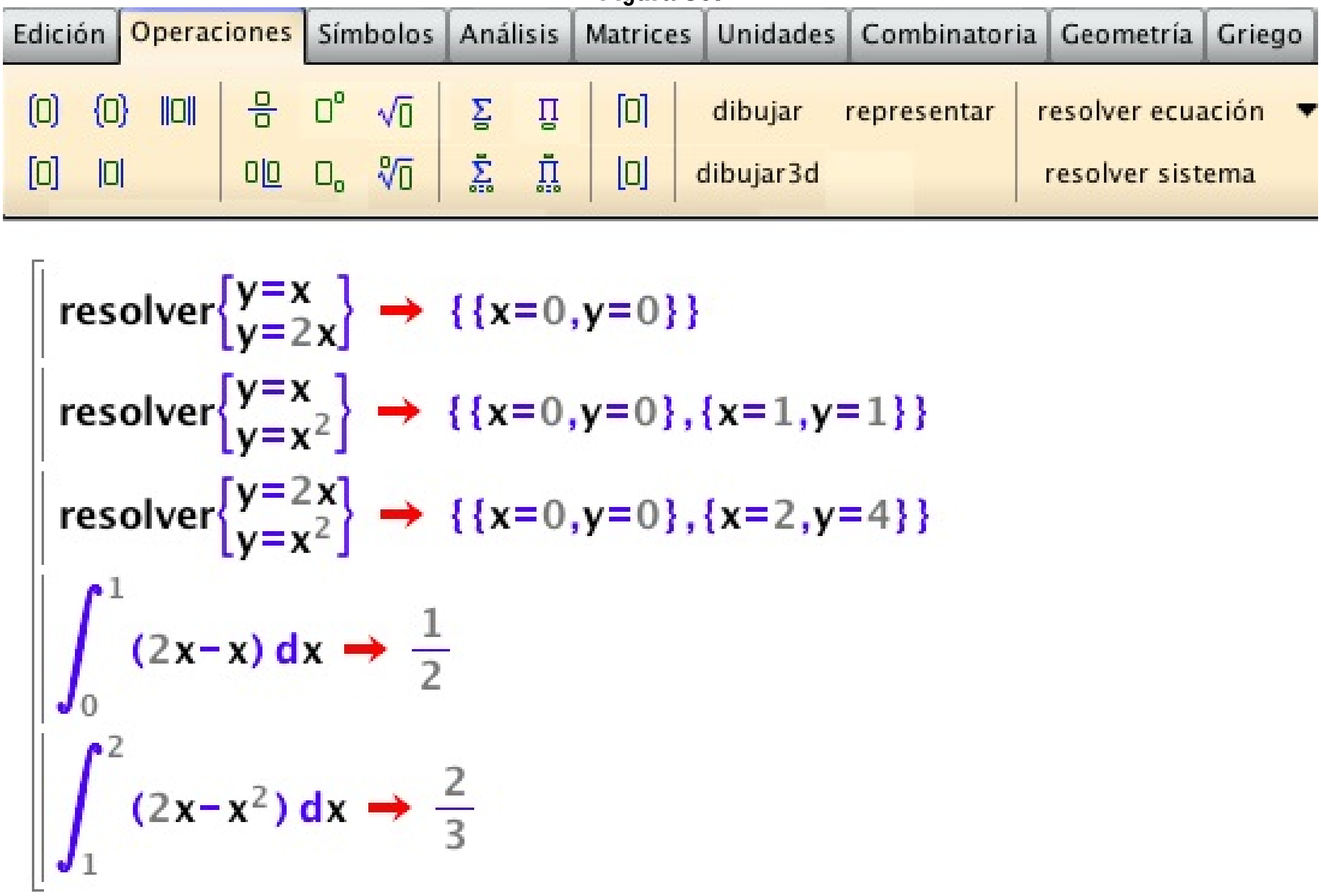
Figura 29.





2. Ahora calcularemos las integrales definidas como en el ejercicio anterior:

Figura 30.



3. Por último, sumamos los dos resultados:

Figura 31.

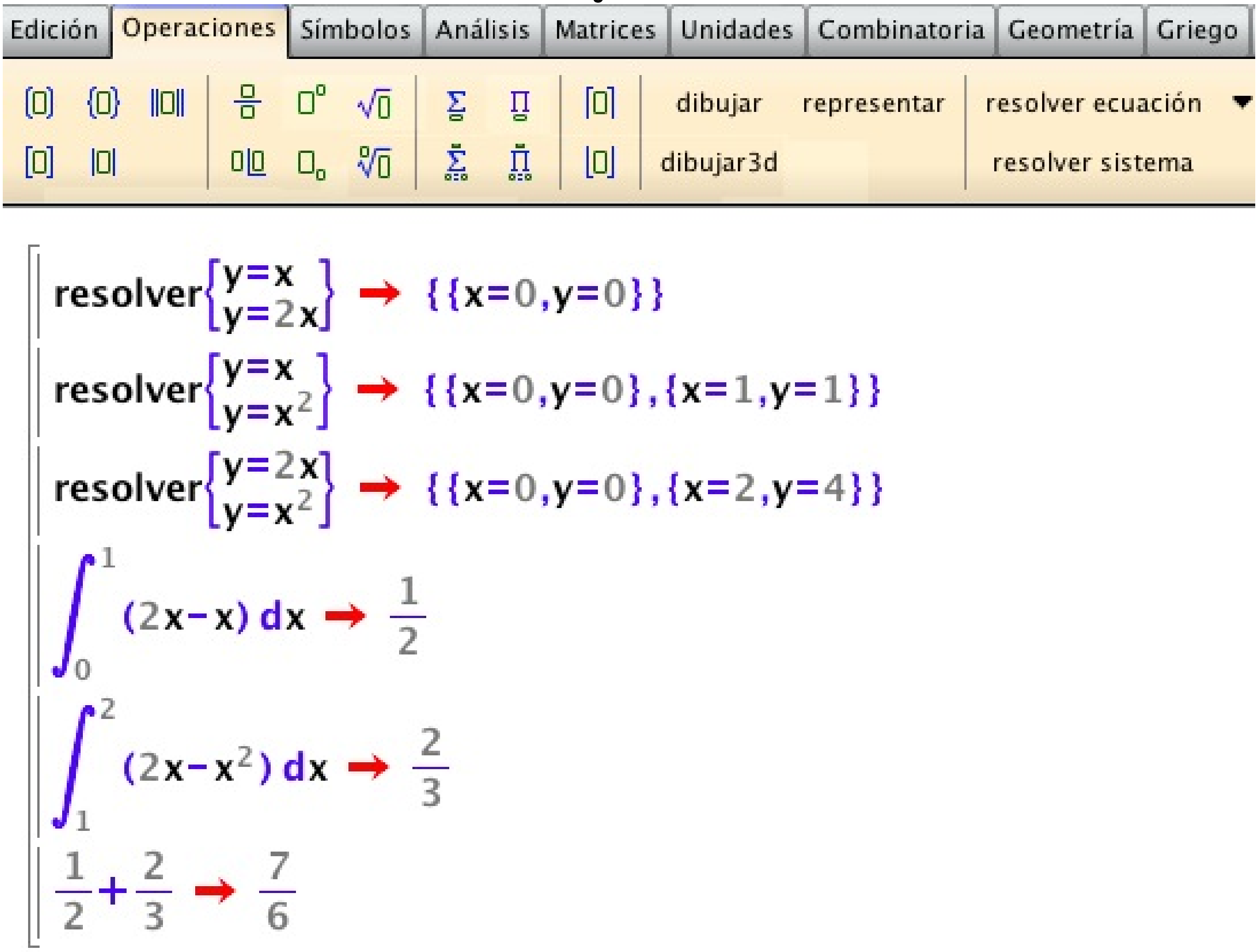


Figura 32.

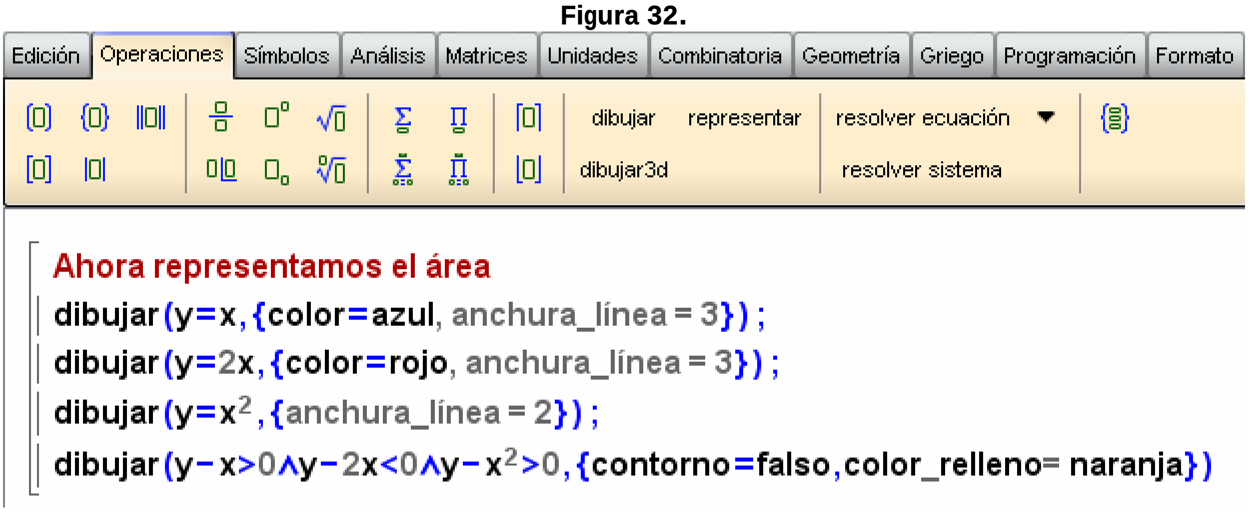
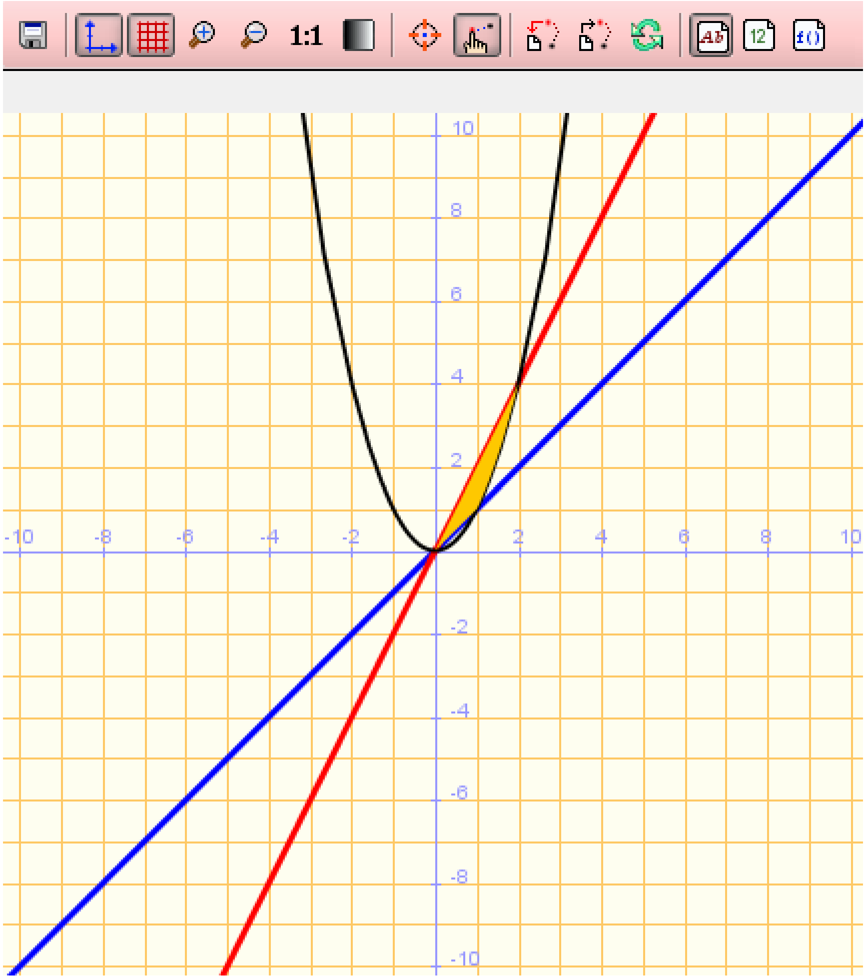


Figura 33.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

9. Volumen.

Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar alrededor del eje X la curva: $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ ***entre las rectas x = -1 y x = 2.***

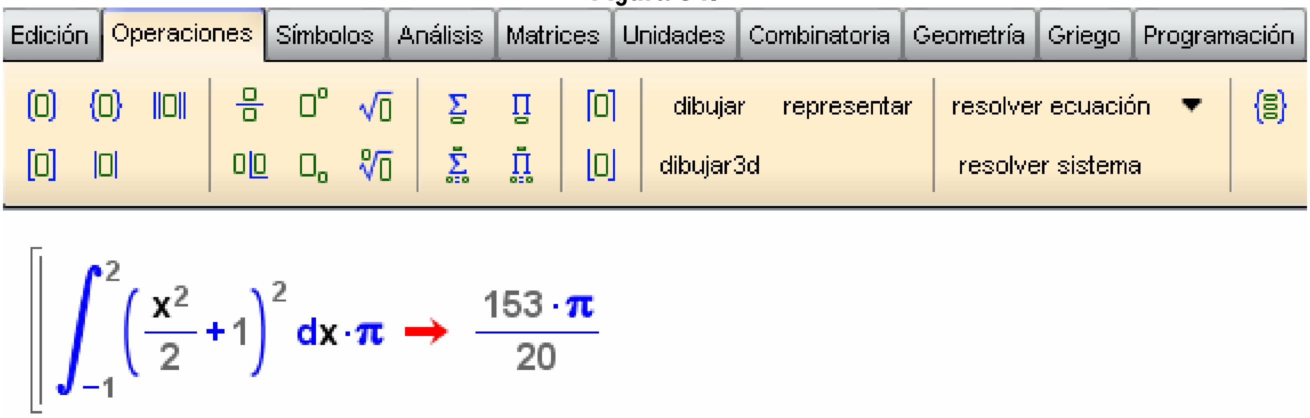
$$V=\pi\int_{-1}^{2} f(x)^2\,dx=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2 dx=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right)^2 dx=\pi\left[\frac{x^5}{20}+\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\pi\left[\frac{94}{15}-\left(-\frac{83}{60}\right)\right]_{-1}^{2}=7{,}65\pi\, u^3$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para el cálculo de este ejercicio sólo tenemos que calcular la integral definida:

Figura 34.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

10. Volumen.

Halla el volumen engendrado por la curva $y=\sqrt{x}$ al girar alrededor del eje Y entre y = 0 e y = 2.

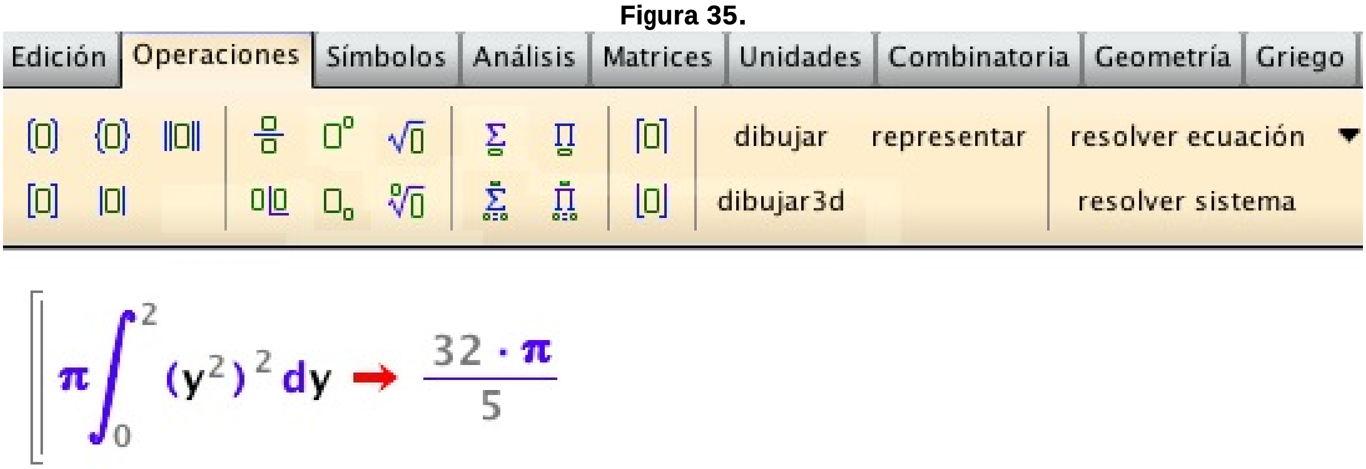
Se hace exactamente igual que al girar en torno al eje X, pero poniendo la función x = g (y). Así:

$V=\pi\int_a^b g(y)^2\,dy$: En este caso: $y=\sqrt{x}\rightarrow x=y^2 : V=\pi\int_0^2 (y^2)^2\,dy=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]=\frac{32}{5}\pi\,u^3$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. De nuevo, para el cálculo del volumen, calculamos la integral definida:

Figura 35.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

11. Volumen de una esfera.

Calcula el volumen de la esfera engendrada por la semicircunferencia de Centro C(3, 0) y radio 2 al girar alrededor del eje OX.

En primer lugar escribimos la ecuación de la circunferencia de centro (3, 0) y radio 2:

$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \rightarrow x^2 - 6x + 5 + y^2 = 0$$

Una de las semicircunferencias es: $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$

Los límites de la integración son los puntos donde la curva corta al eje OX:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

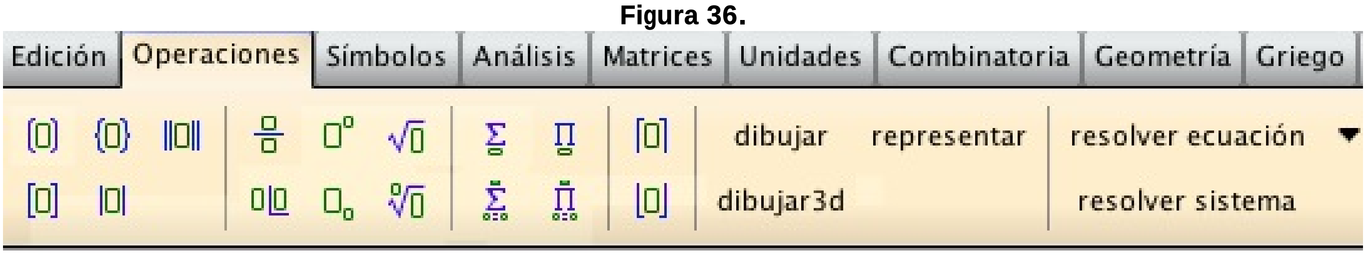
Por tanto el volumen de la esfera es:

$$V = \pi \int_1^5 (\sqrt{-x^2 + 6x - 5})^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 = \pi \left(\frac{25}{3} + \frac{7}{3} \right) \rightarrow V = \frac{32\pi}{3} u^3$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, resolveremos la ecuación:

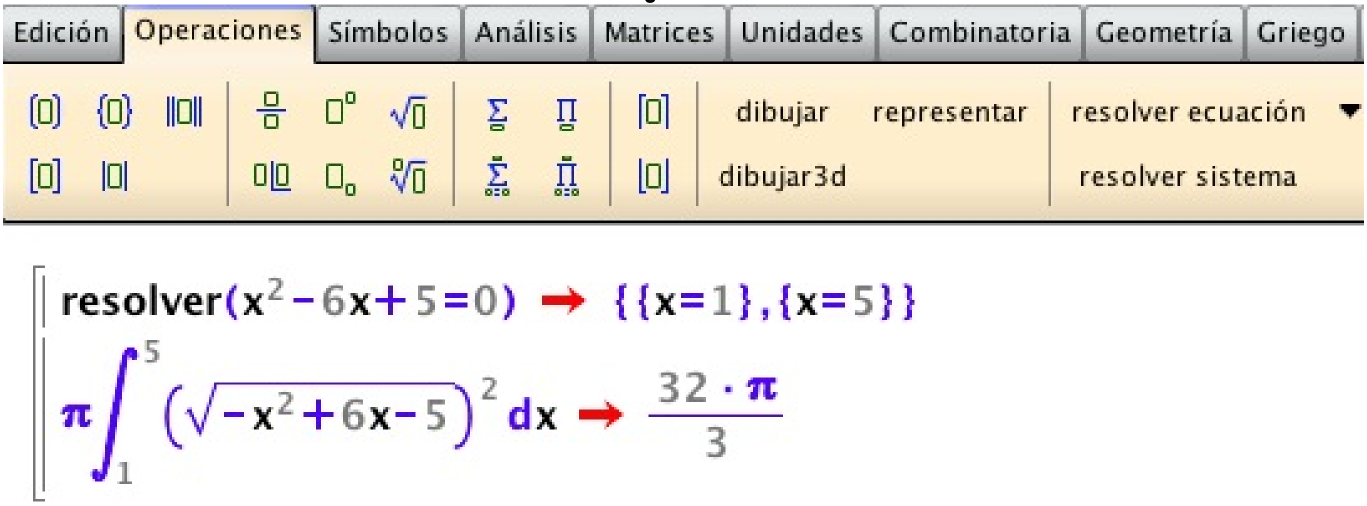
Figura 36.



$$\text{resolver}(x^2 - 6x + 5 = 0) \rightarrow \{\{x=1\},\{x=5\}\}$$

2. Por último, calculamos la integral definida para obtener el volumen:

Figura 37.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

12. Función integral.

Sea $F(x)=\int_1^{x^2}(t^2-1)\,dt$***. Halla los puntos extremos de dicha función.***

Por el teorema fundamental del cálculo. Sabemos que; $F´(x)=\left[\left(x^2\right)^2-1\right]2x=2x^5-2x$

Para ver cuáles son los posibles puntos extremos, hacemos $F´(x)=0$ y obtenemos:

$$x_1=0,\ \ x_2=1,\ x_3=-1\rightarrow F´´(x)=10x^4-2\ \begin{cases} F´´(0)<0 \\ F´´(1)>0 \\ F´´(-1)>0 \end{cases}$$

Hay un máximo relativo en $x_1=0$ y dos mínimos relativos en $x_2=1$ y en $x_3=-1$. Los valores de estos extremos son:

$$F(0)=\int_1^0(t^2-1)\,dt=-\int_5^1(t^2-1)\,dt=-\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$F(0)=\int_1^1(t^2-1)\,dt=0$$

$$F(0)=\int_1^1(t^2-1)\,dt=0$$

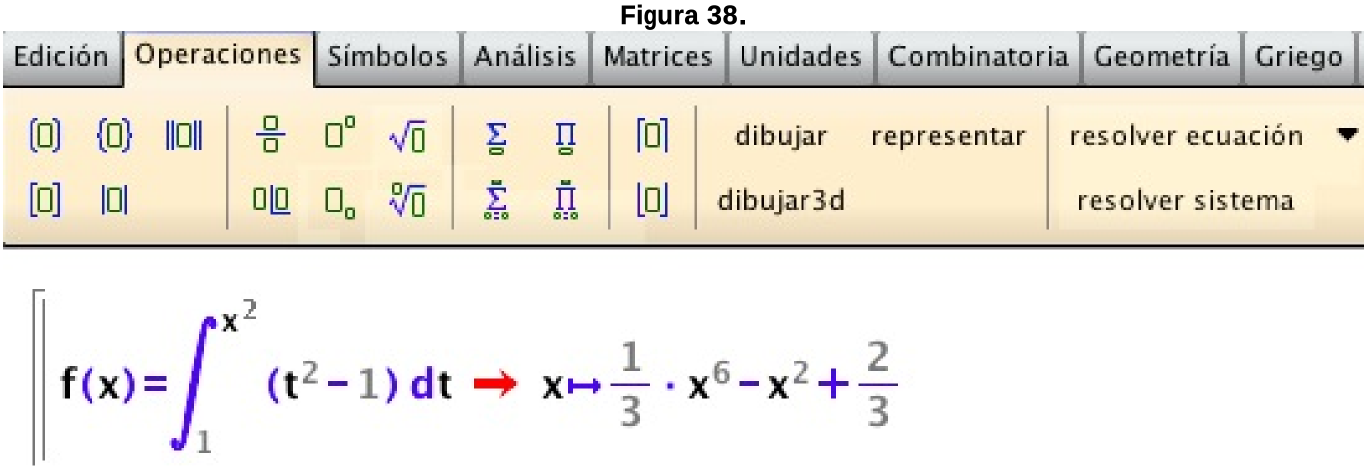
Máximo: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

Mínimos: $(1,0)$ y $(-1,0)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

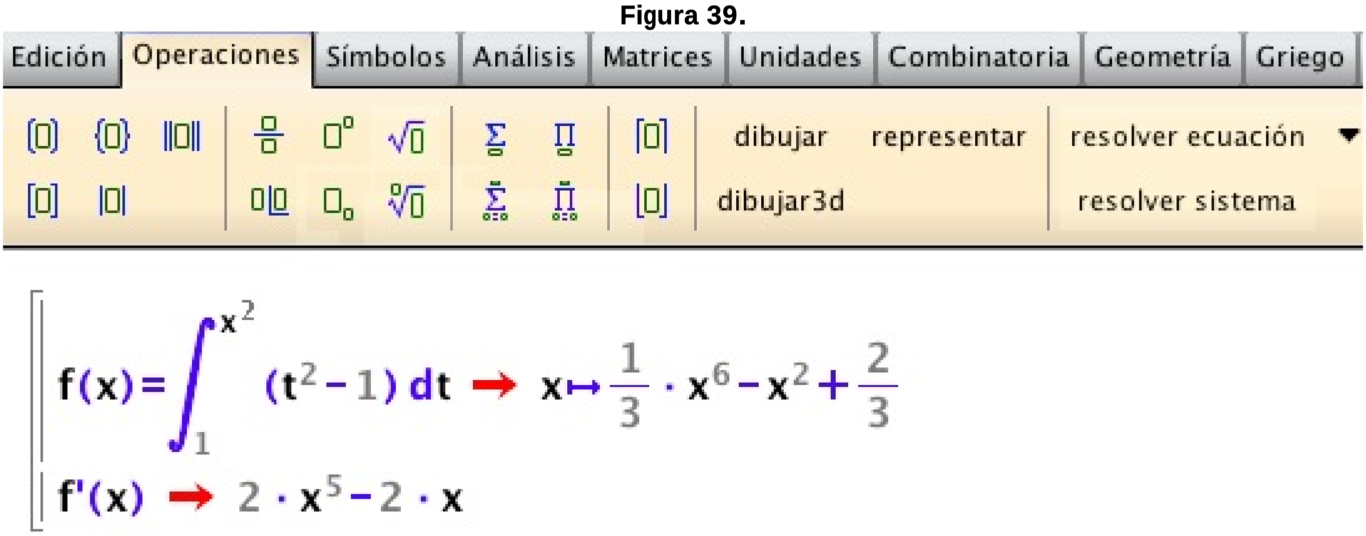
1. Para resolver este ejercicio es muy importante que nos aseguremos de escribirlo todo dentro del mismo bloque. En primer lugar, escribimos la integral y le damos un nombre, en este caso f(x):

Figura 38.



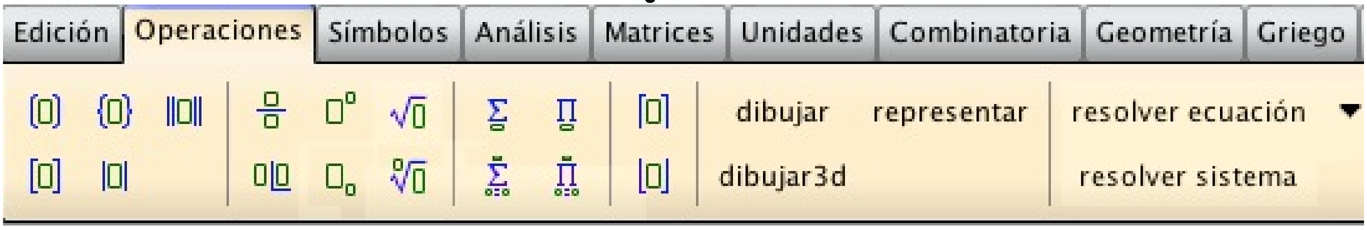
2. Después, calculamos f'(x) para poder calcular el tercer paso:

Figura 39.



3. Ahora, igualamos f'(x) a 0:

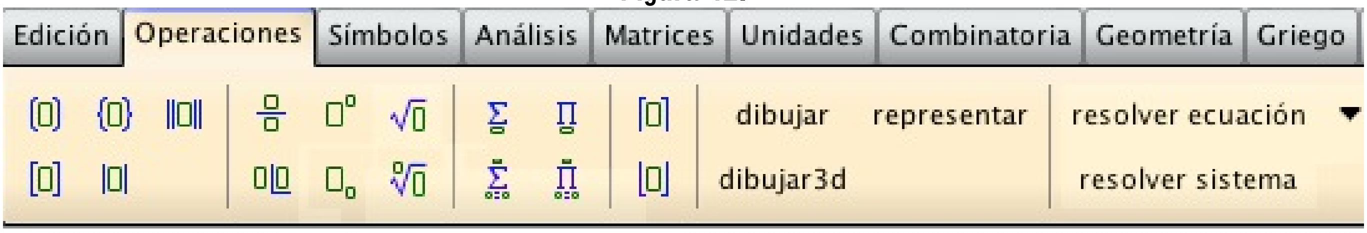
Figura 40.



$$f(x)=\int_{1}^{x^2}(t^2-1)\,dt \rightarrow x\mapsto \frac{1}{3}\cdot x^6-x^2+\frac{2}{3}$$
$$f'(x) \rightarrow 2\cdot x^5-2\cdot x$$
$$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$

4. En este cuarto paso, calculamos f’’(x):

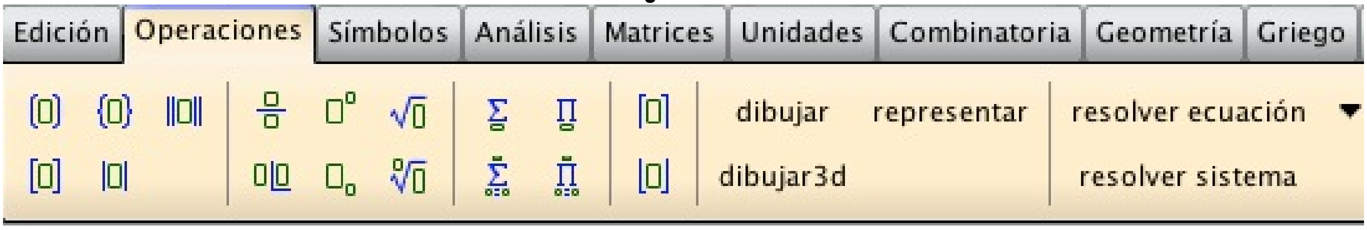
Figura 41.



$$f(x)=\int_{1}^{x^2}(t^2-1)\,dt \rightarrow x\mapsto \frac{1}{3}\cdot x^6-x^2+\frac{2}{3}$$
$$f'(x) \rightarrow 2\cdot x^5-2\cdot x$$
$$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$
$$f''(x) \rightarrow 10\cdot x^4-2$$

5. Ahora sustituimos los puntos extremos en f’’(x):

Figura 42.



$$f(x)=\int_1^{x^2}(t^2-1)\,dt \rightarrow x\mapsto\frac{1}{3}\cdot x^6-x^2+\frac{2}{3}$$

$$f'(x) \rightarrow 2\cdot x^5-2\cdot x$$

$$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$

$$f''(x) \rightarrow 10\cdot x^4-2$$

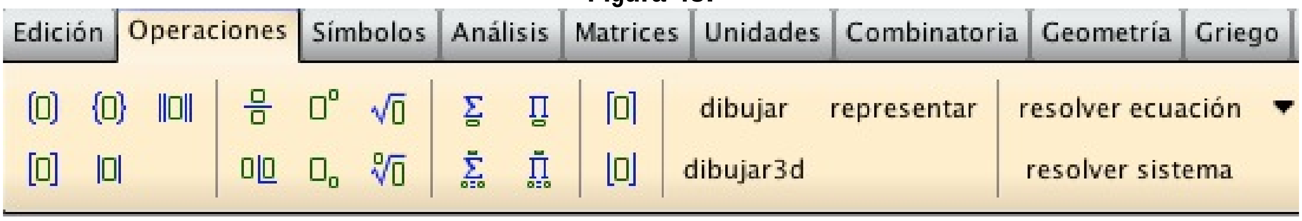
$$f''(0) \rightarrow -2$$

$$f''(1) \rightarrow 8$$

$$f''(-1) \rightarrow 8$$

6. Igual que en el paso anterior, utilizamos los puntos extremos, pero esta vez los sustituimos en f(x):

Figura 43.



$$f(x)=\int_1^{x^2}(t^2-1)\,dt \rightarrow x\mapsto\frac{1}{3}\cdot x^6-x^2+\frac{2}{3}$$

$$f'(x) \rightarrow 2\cdot x^5-2\cdot x$$

$$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=0\},\{x=1\}\}$$

$$f''(x) \rightarrow 10\cdot x^4-2$$

$$f''(0) \rightarrow -2$$

$$f''(1) \rightarrow 8$$

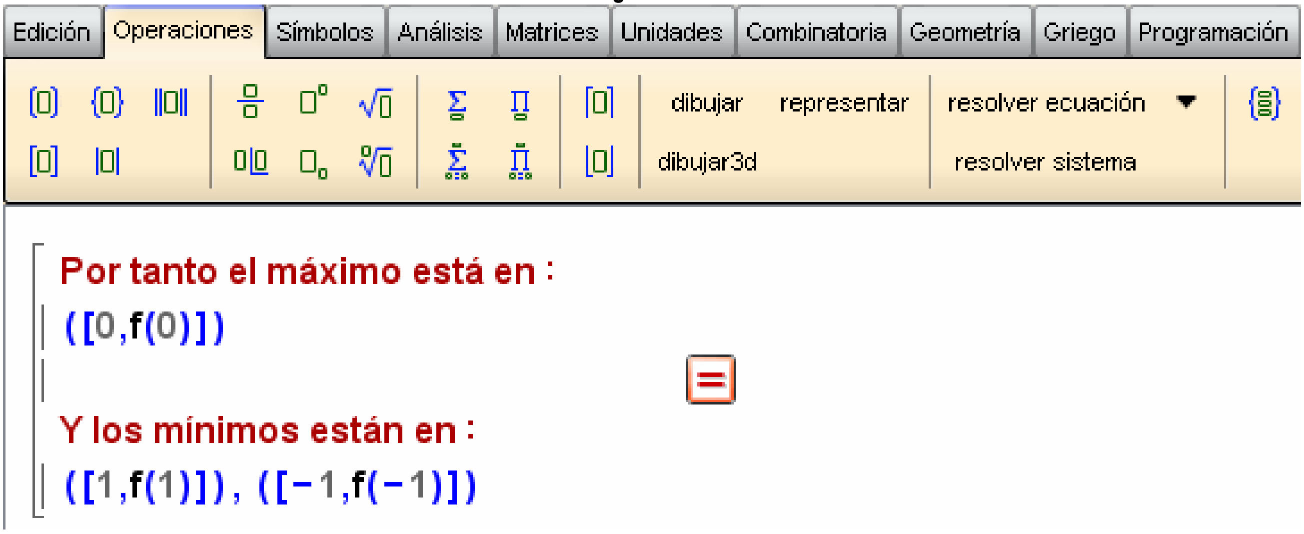
$$f''(-1) \rightarrow 8$$

$$f(0) \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$f(1) \rightarrow 0$$

$$f(-1) \rightarrow 0$$

Figura 44.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web: