TEMA 3 Determinantes

1. Cálculo de rango de una matriz.

Halla el rango de la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Para resolver el problema tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-4\neq 0$ por tanto $ran(A)\geq 2$ porque ya hay 2 filas linealmente independientes.

Veamos si la tercera depende linealmente de las 2 primeras:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 5 & -2\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 5\end{vmatrix}=0 \qquad \longrightarrow$$

La 3ª fila es combinación lineal de las 2 primeras.

Comprobamos si la cuarta fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1+2+2-4\neq 0 \qquad \longrightarrow$$

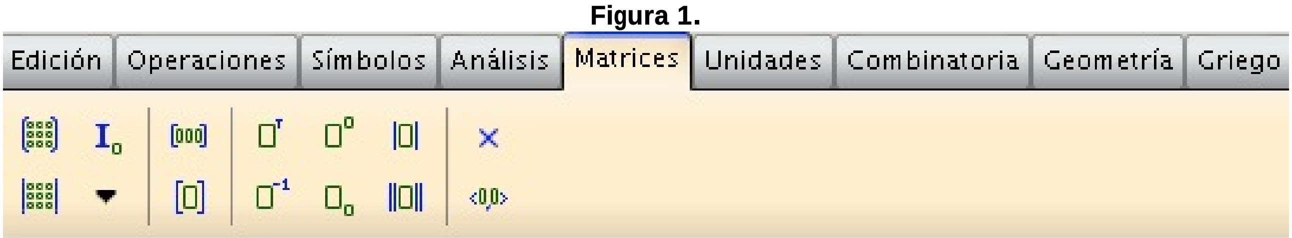
Las filas 1ª, 2ª y 4ª son linealmente independientes.

Por tanto $ran(A)=3$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para hallar el rango de la matriz, escribimos rango y a continuación la matriz. Después pulsamos el botón de igual y obtenemos directamente este:

Figura 1.



$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow 3$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

2. Resolver una ecuación.

Resuelve la ecuación siguiente: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Restamos la cuarta columna a las otras tres y desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x-2 & -3 & 1 & 2 \\ x^2-4 & -3 & 5 & 4 \\ x^3-8 & -9 & 19 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ x^2-4 & -3 & 5 \\ x^3-8 & -9 & 19 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -(-3)\cdot(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-2 & 1 & 5 \\ x^2+2x-15 & -16 & 19 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

(1) La primera columna es múltiplo de (x-2) y la segunda, de, (-3).

$$\overset{2}{=} 3\cdot(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-3 & -4 & 5 \\ x^2+2x-15 & -16 & 19 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

(2) Resaltamos la tercera columna a las otras dos.

$$\overset{(3)}{=} 3\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(-4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ x+5 & 4 & 19 \end{vmatrix} =$$

(3) La primera columna es múltiplo de x-3 y la segunda, de (-4)

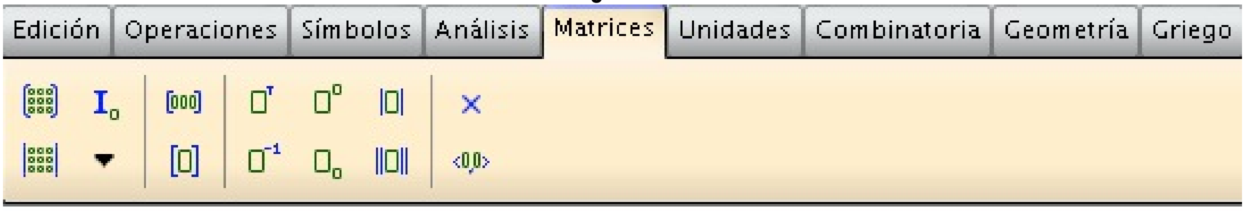
$$= -12\cdot(x-2)\cdot(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow\ = -12\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(-x-1) = 0$$

Por tanto, las soluciones son: x=2; x=3; x=-1.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Teniendo la siguiente igualdad:

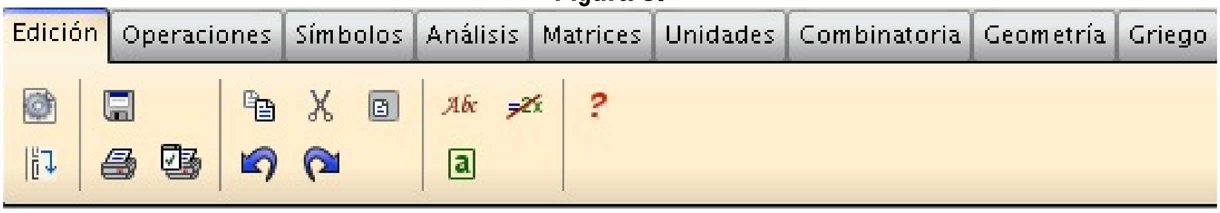
Figura 2.



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0?$$

2. Usaremos argumentos vacíos junto con el signo de interrogación final para poder saber si nuestros cálculos son o no correctos:

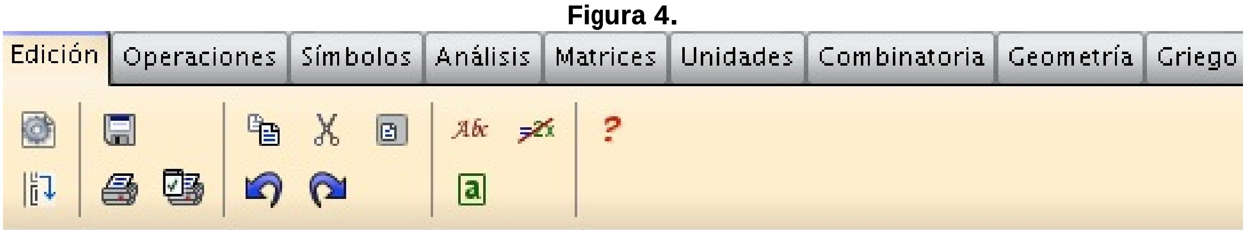
Figura 3.



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ? & -1 & 3 & 2 \\ ? & 1 & 9 & 4 \\ ? & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0?$$

Como Wiris no reconoce la incógnita a la hora de resolver el determinante, podemos comprobar si el determinante es igual a cero sustituyendo las soluciones de la ecuación resultante. Lo haremos con una de ellas, por ejemplo x=3

Figura 4.



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 9 & 4 \\ 27 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0? \rightarrow \text{cierto}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

3. Estudio de una matriz que depende de un parámetro.

Estudia el rango de las matrices M y N según los valores de a:

$$M=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Hallamos los valores que anulan el determinante de M:

$$|M| = (a+1)^3 + 1 + 1 - 3\cdot(a+1) = 0 \longrightarrow a^3 + 3a^2 = 0 \longrightarrow a^2(a+3) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

- Para $a = 0$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Solo hay una fila linealmente independiente, luego $ran(M) = 1$

- Para $a = -3$: $M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Sabemos que $|M| = 0$.

  Buscamos un menor de orden 2 distinto de 0, por ejemplo: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ luego $ran(M) = 2$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -3 \longrightarrow |M| \neq 0$ y, por tanto, $ran(M) = -3$

Hemos comprobado que la fila es combinación lineal de las otras 2. Por tanto: $ran(N) = 2$ ya que

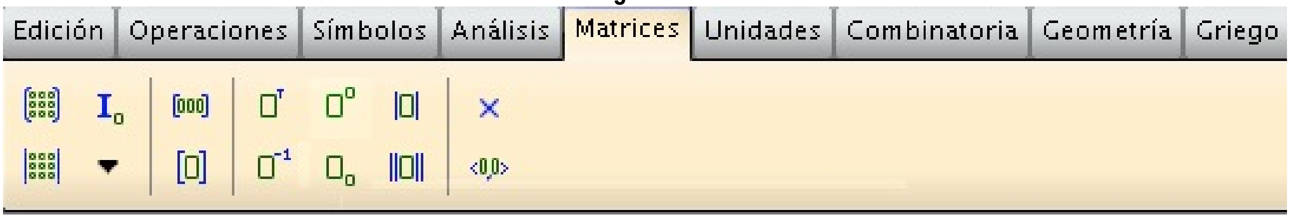
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar hallamos los valores que anulan el determinante de M:

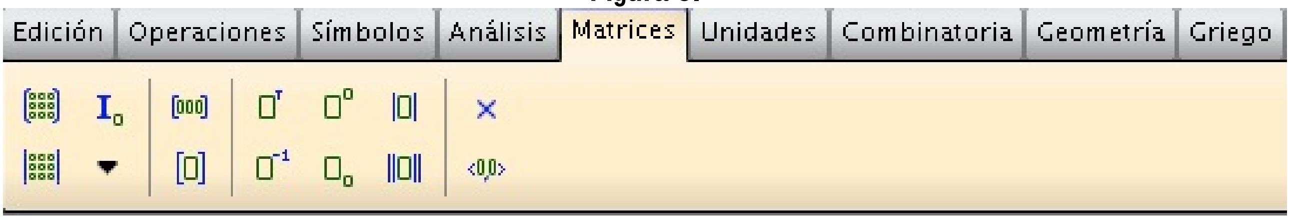
Figura 5.



$$\text{resolver}((a+1)^3+1+1-3\cdot(a+1)=0) \rightarrow \{\{a=-3\},\{a=0\}\}$$

2. Para a=0 obtendremos su rango:

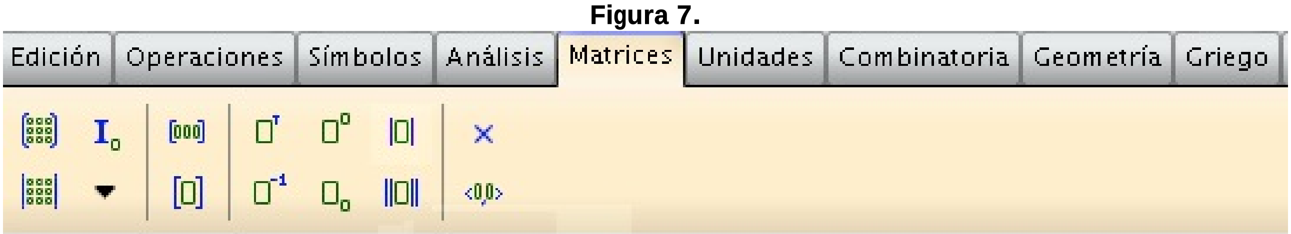
Figura 6.



$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1$$

3. Para a=-3 calculamos su rango y su determinante respectivamente:

Figura 7.

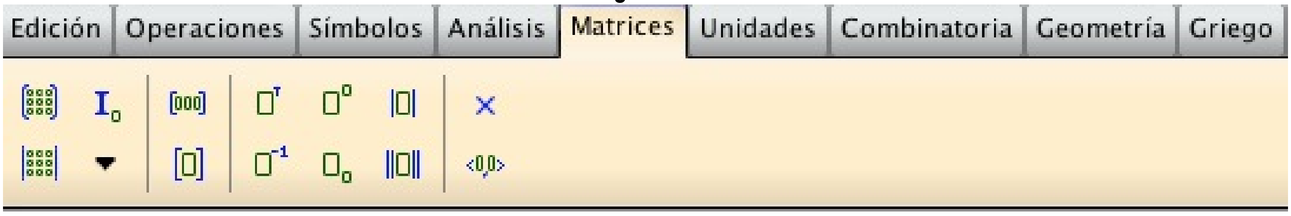


$$\text{rango}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

$$\left|\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| \rightarrow 0$$

4. Por último, escogemos un valor para a distinto de 0 y de -3 como 1, y lo sustituimos en M, después calculamos su rango:

Figura 8.



$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 3$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

b) Buscamos el valor de a que hace 0 el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & a & -1 \end{vmatrix} = -7a-7 \longrightarrow 7a-7=0 \longrightarrow a=-1$$

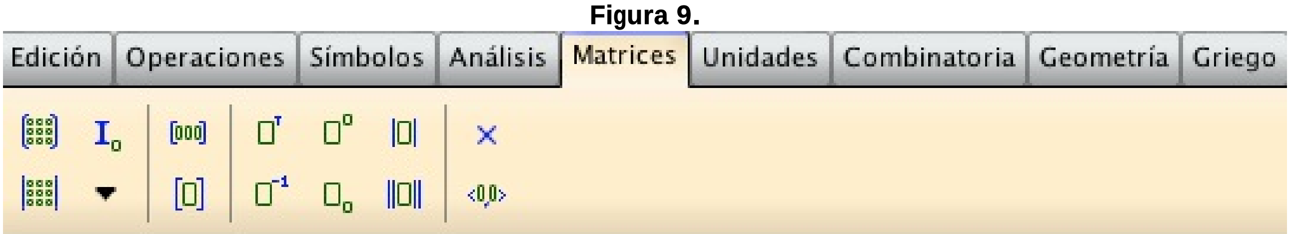
- Para $a \neq -1$, $ran(N)=3$, ya que el menor de orden 3 formado por las 3 primeras columnas es distinto de 0.
- Para $a=-1$, calculamos los menores de orden 3 formados por la 1ª, 2ª y 4ª columna y por la 1ª, 2ª y 5ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -6-6+12=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calcularemos el rango para un valor de a distinto de -1, en este caso hemos elegido a=0:

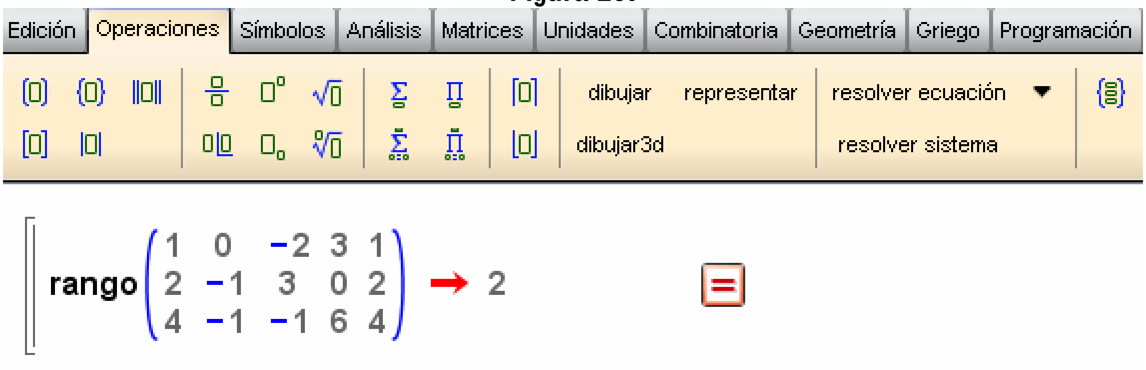
Figura 9.



$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow 3$$

2. De la misma forma que en la figura 9, calcularemos el rango de la matriz, sólo que esta vez, lo haremos para a= -1:

Figura 10.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

4. Propiedades de los determinantes y rango de una matriz.

Sea B una matriz 3 x 3 cualquiera. Indica, justificando las respuestas, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $ran(B)=2,$ ***entonces*** $ran(B^2)=2.$

b) Si $ran(B)=3,$ ***entonces*** $ran(B^3)=3.$

c) Si $ran(B)=3,$ ***entonces*** $ran(B^{-1})=3.$

a) Falsa. Si $ran(B)=2,$ entonces: $|B|=0$ y $|B^2|=|B|\cdot|B|=0$ esto nos indica que $ran(B^2)\le 2.$

El rango de (B^2) puede ser igual a 1, como prueba el siguiente ejemplo:

$$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \longrightarrow B^2=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad ran(B)=2,\ ran(B^2)=1.$$

b) Verdadera. Si $ran(B)=3,$ entonces: $|B|\neq 0$ y $|B^3|=|B|^3\neq 0$ por tanto, $ran(B^3)=3.$

c) Verdadera. Como: $BB^{-1}=I \longrightarrow |B\cdot B^{-1}|=|I| \longrightarrow |B|\cdot|B^{-1}|=1 \longrightarrow |B^{-1}|=\dfrac{1}{|B|}\neq 0$

Ya que $|B|\neq 0,$ porque $ran(B)=3.$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para comprobar que hemos realizado correctamente estos tres apartados, utilizaremos los argumentos vacíos. Para ello, escribiremos B como una matriz 3x3 que podremos rellenar como queramos, y posteriormente, sabremos si se cumplen las otras dos condiciones:

Figura 11.

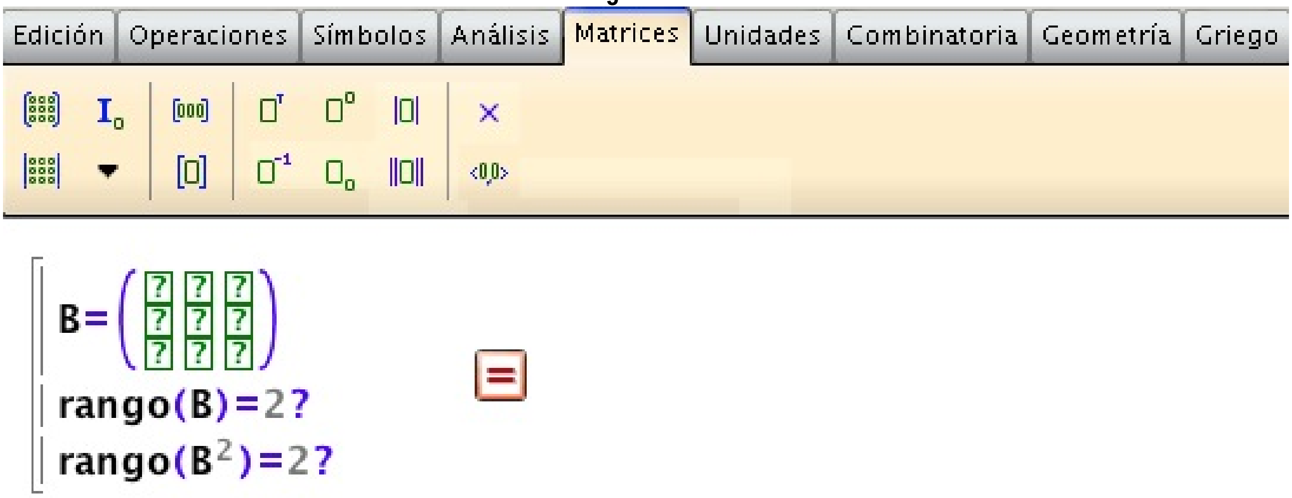


Figura 12.

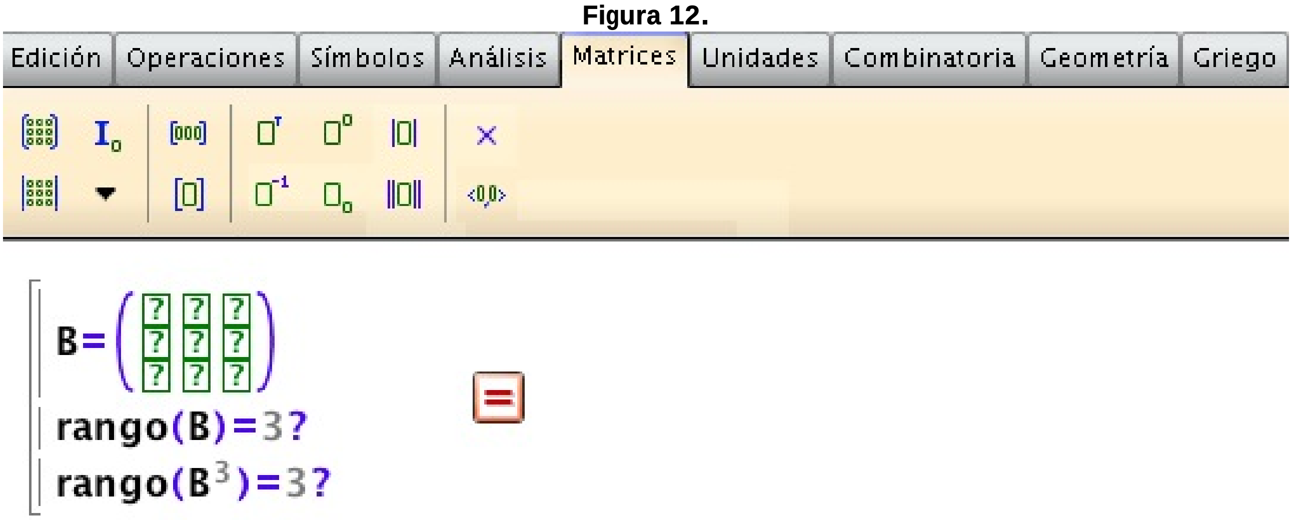
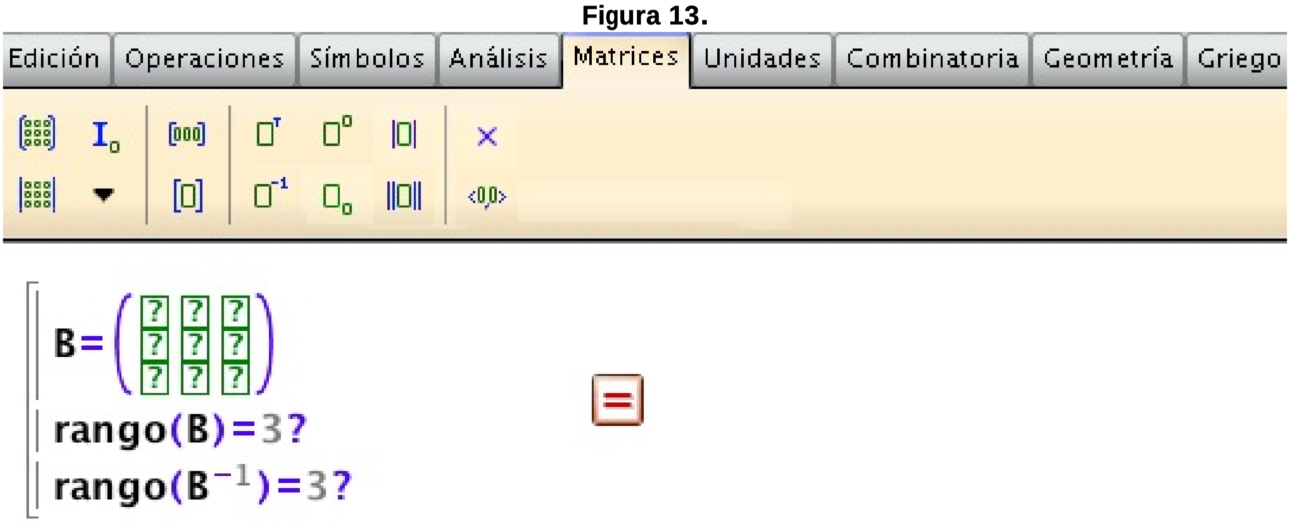
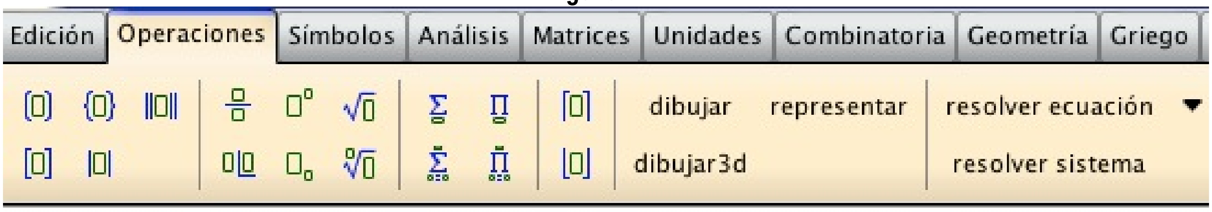


Figura 13.



2. Ahora lo veremos con un ejemplo. Recordamos que tenemos que introducir los datos y al pulsar igual obtenemos nuestra respuesta:

Figura 14.

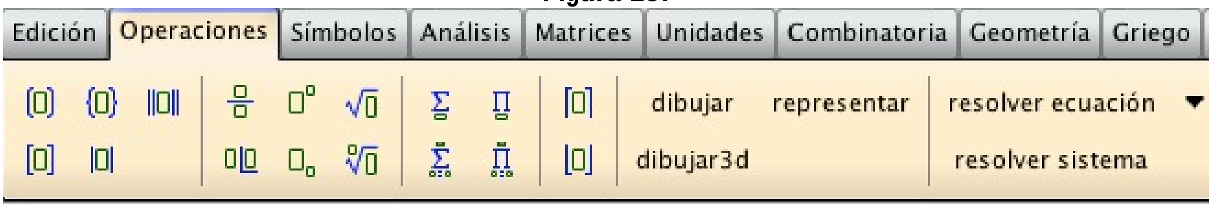


$$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(B)=2? \rightarrow \text{cierto}$$

$$\text{rango}(B^2)=2? \rightarrow \text{falso}$$

Figura 15.

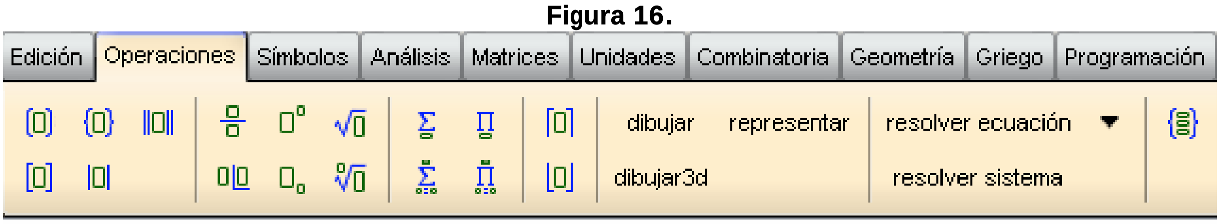


$$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(B)=3? \rightarrow \text{falso}$$

$$\text{rango}(B^3)=3? \rightarrow \text{falso}$$

Figura 16.



$$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(B)=3? \rightarrow \text{falso}$$

$$\text{rango}(B^{-1})=3?$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web: