TEMA 4 Resolución de sistemas mediante Determinantes

1. Estudio del carácter de un sistema (Teorema de Rouché)

Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas y resuélvelos si tienen solución:

$$a)\begin{cases} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ x+y-z=2 \\ 2x-y+t=0 \end{cases}$$

a) Calculamos el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,\ \ ran(A)=2.$

Hallamos el rango de la matriz ampliada; $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; $|A'|=0$. Por tanto, $ran(A')=2.$

Como $ran(A)=2.$ el sistema es compatible. También es determinado porque el rango es igual al número de incógnitas. Para resolverlo tomamos las dos primeras ecuaciones que forman el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$ y aplicamos la regla de Cramer:

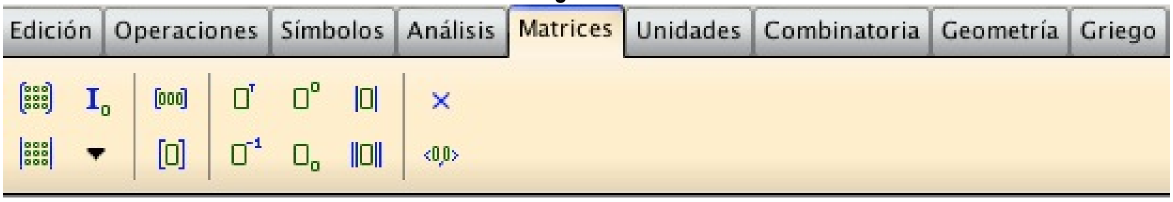
$$\left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ 4x+y=-1 \end{array}\right\} x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{5}=1, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{5}=-5 \ \text{ Solución (1, -5).}$$

Esta solución verifica también la tercera ecuación.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, escribimos la matriz A y calculamos su rango. Para ello, solo tenemos que ir a la pestaña Matrices y pinchar en el botón que tiene su símbolo. Entonces elegimos cuantas filas y columnas debe tener y posteriormente la rellenamos. Entonces, pulsando el botón ‘intro’ en nuestro teclado (una vez situado el cursor al final de la línea) escribimos ‘rango(A)’ y pulsamos igual, obteniendo:

Figura 1.

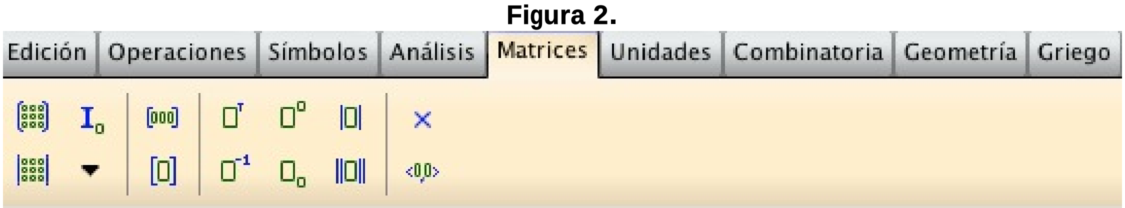


$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) \rightarrow 2$$

2. De la misma forma, calculamos el rango de la matriz ampliada:

Figura 2.



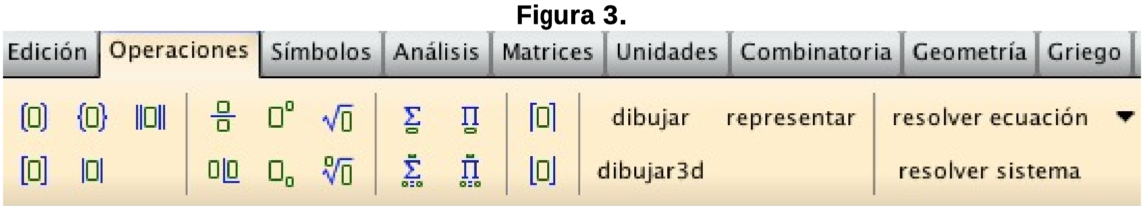
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 4 & 1 & -1\\ 5 & 2 & -5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\ 4 & 1 & -1\\ 5 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) \rightarrow 2$$

Por tanto el sistema es compatible determinado

3. Por último, resolveremos el sistema de ecuaciones, pinchando en la pestaña Operaciones, y luego en resolver sistema. A continuación indicamos el número de ecuaciones del sistema, rellenamos los huecos y pinchamos en igual, obteniendo la solución a nuestro problema:

Figura 3.



$$\text{resolver}\begin{Bmatrix}x-y=6\\ 4x+y=-1\end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=1, y=-5\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = 0. \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \longrightarrow ran(A) = 2.$

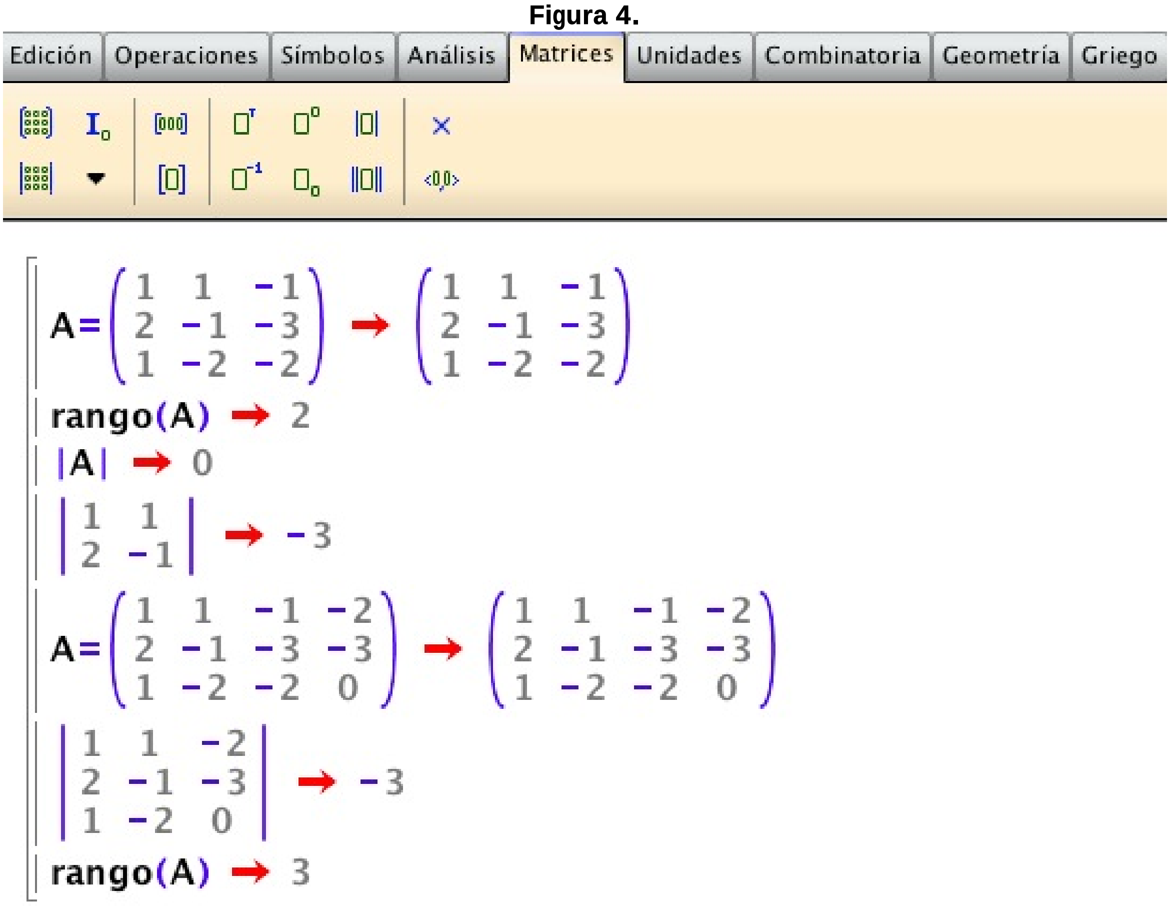
$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow ran(A') = 3.$

Como $ran(A) \neq ran(A'),$ el sistema es incompatible.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

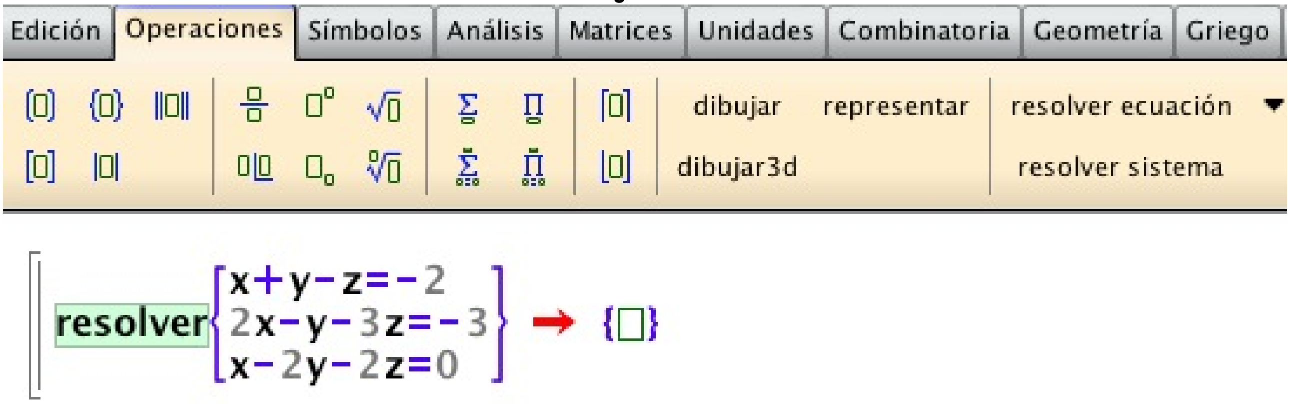
1. Para este ejercicio, iremos introduciendo la matriz correspondiente, y después calcularemos su rango y su determinante según proceda. Primero lo haremos con A, y luego con A', aunque la llamaremos también A, ya que si le ponemos el apóstrofe, confundimos nuestra orden.

Figura 4.



2. Por último, resolveremos el sistema de ecuaciones:

Figura 5.



Para obtener un determinante, nos situamos en Matrices y pinchamos sobre el símbolo que representa los determinantes. Indicamos cuantas filas y columnas tendrá y las rellenamos. Luego pulsamos el botón igual y obtenemos el resultado. También podemos usar el botón con un rectángulo y dos barras a los lados (aunque en este sólo tenemos que escribir el nombre de la matriz ya escrita: en este caso A).

Si vemos la resolución del sistema con Wiris se puede ver que como es un sistema incompatible nos da como solución un rectangulo en blanco y un mensaje de aviso que dice *“Aviso, Dificultad. No es posible encontrar un resultado o solución”*.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \longrightarrow ran(A)=3$

El menor de orden 3 distinto de 0 que encontramos en A es también de A´. Por tanto $ran(A')=3$ y el sistema es compatible. Como el rango es menor que el número de incógnitas, es indeterminado. Para resolverlo, tenemos en cuenta el menor no nulo de A y consideramos z como parámetro $(z=\lambda)$.

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-t=-\lambda \\ x+y=2+\lambda \\ 2x-y+t=0 \end{array}\right\}$$ Aplicamos la regla de Cramer y se obtiene:

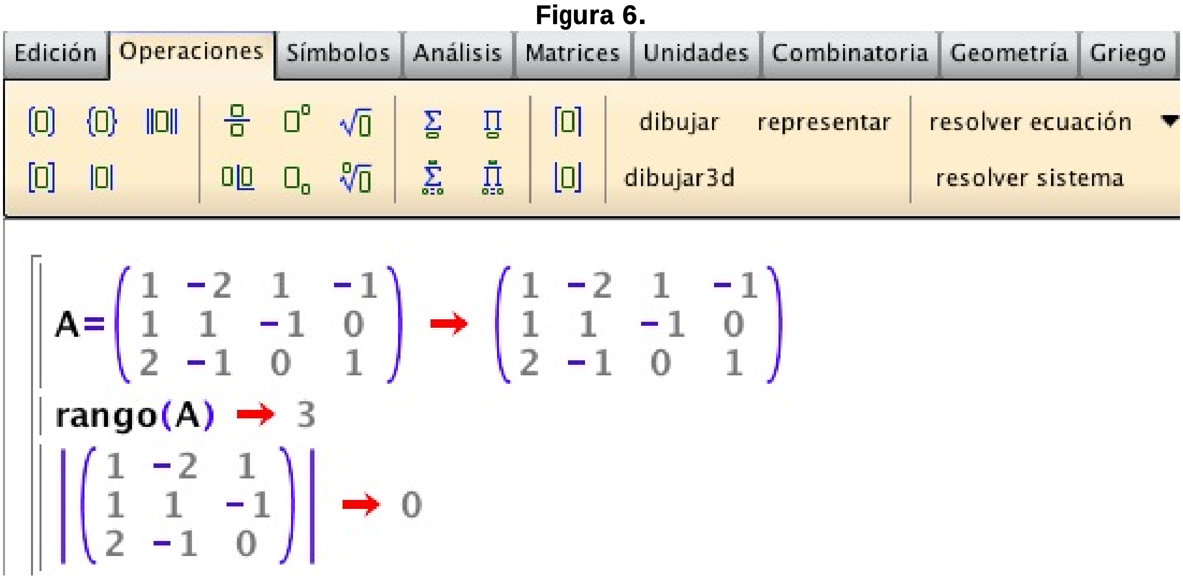
$$x=\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 2+\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6}; t=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -\lambda \\ 1 & 1 & 2+\lambda \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{6}$$

Por lo que las soluciones que se obtienen son: $(1+\frac{\lambda}{3}, 1+\frac{2}{3}\lambda, \lambda, -1)$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

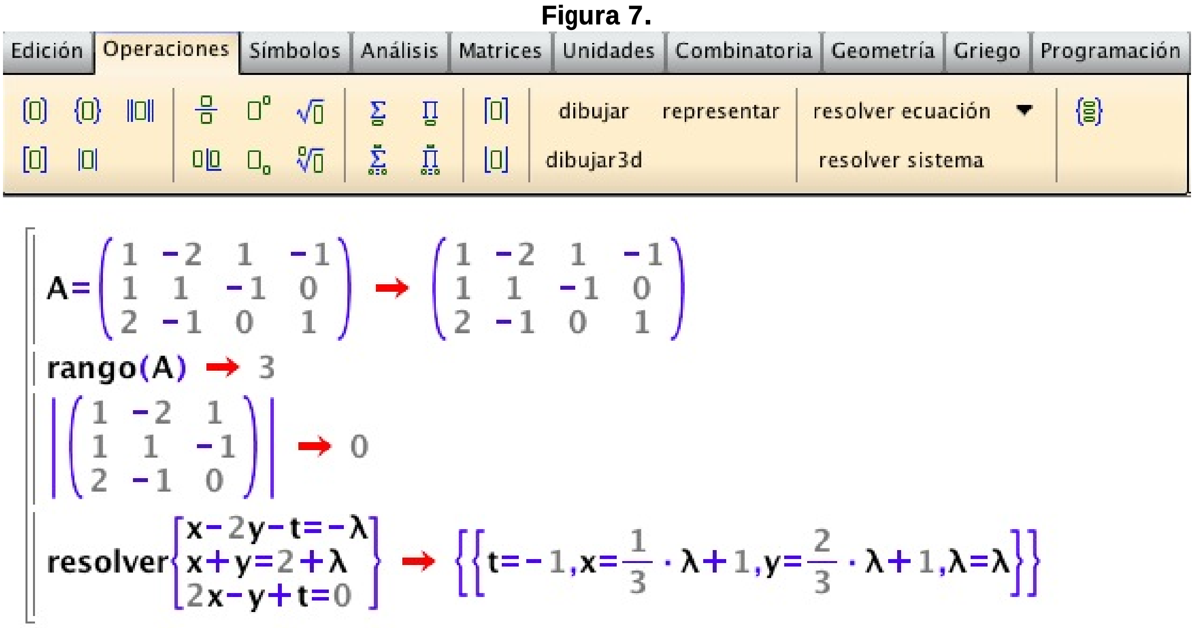
1. Para este apartado también calcularemos el determinante y el rango de la matriz A:

Figura 6.



2. Por último resolvemos el sistema planteado, y así obtenemos las soluciones:

Figura 7.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

2. Discusión de un sistema (Teorema de Rouché)

Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sean compatibles:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(m+1)y+mz=m+1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{cases}$

a) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{pmatrix}$.

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$, $ran(A)=3=ran(A')$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de m distinto de 0 y 1, tenemos un sistema con solución única:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2-m};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m^2+m};\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{m^2-m}$$

Solución: $\left(\frac{m}{m-1},\frac{-1}{m-1},\frac{m}{m-1)}\right)$.

- Si $m=0$ $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ $\longrightarrow$ $ran(A)=2$.

Como en A' hay dos filas iguales, $ran(A')=2=ran(A)$. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos x al segundo miembro: $x=\lambda, y=1-\lambda, z=0$.

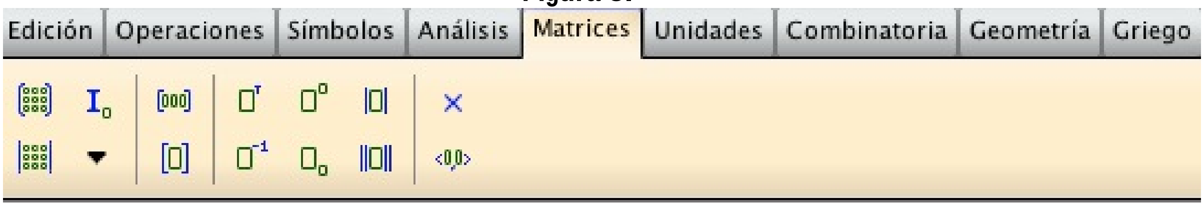
- Si $m=1$ $\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \longrightarrow ran(A)=2$; $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\neq 0 \longrightarrow$

$ran(A')=3$. Por tanto, el sistema es incompatible.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Primero calculamos el rango de la matriz A cuando m=2 (para saber cuál es el rango para cualquier m distinta de 0 o 1):

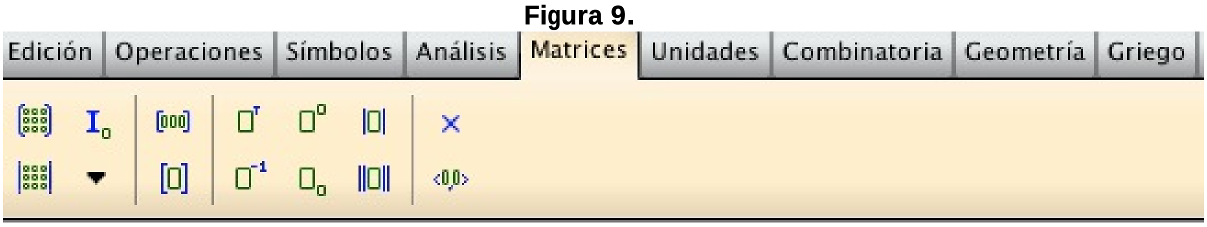
Figura 8.



$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \rightarrow 3$$

2. Ahora calcularemos cuál es el rango para m=0:

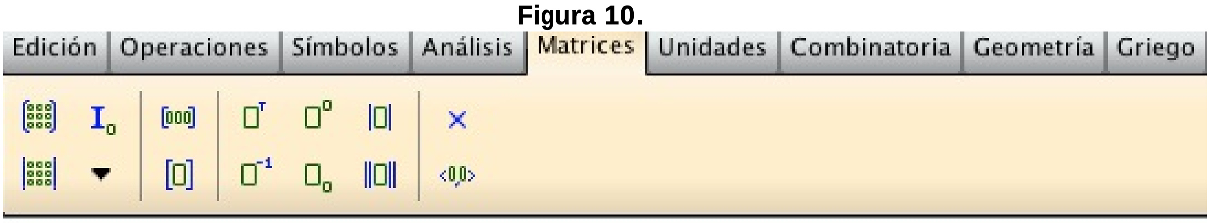
Figura 9.



$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow 2$$

3. Veremos también el rango cuando m=1:

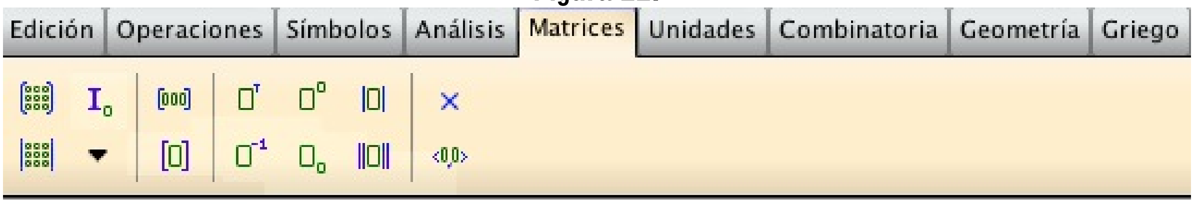
Figura 10.



$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \rightarrow 2$$

4. Calcularemos el rango de A’ cuando m=1:

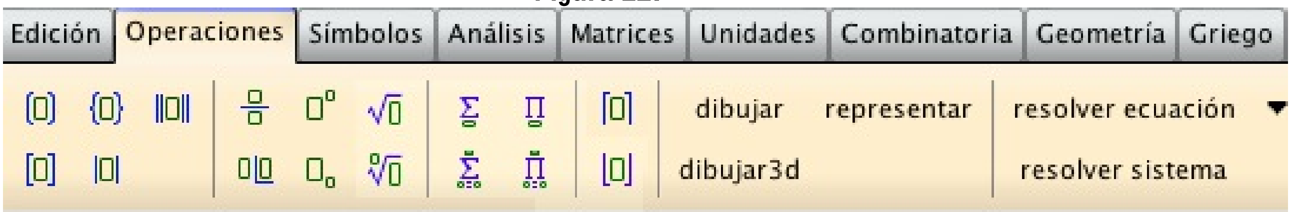
Figura 11.



$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 3$$

5. Ahora resolveremos el sistema para m=2:

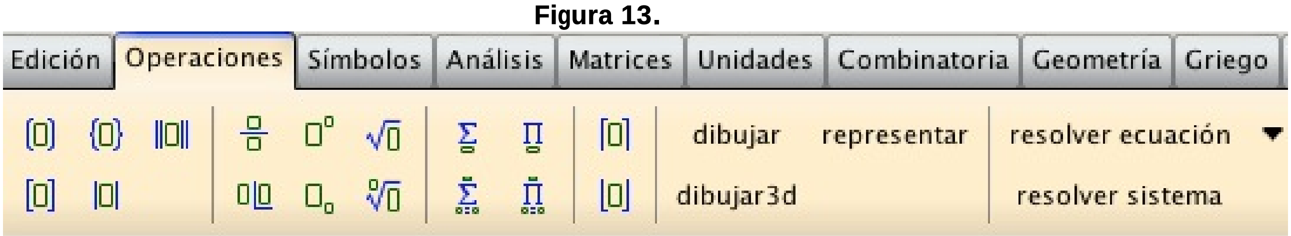
Figura 12.



$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ 2y+z=0 \\ x+3y+2z=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=2, y=-1, z=2\}\}$$

6. En este paso calcularemos los resultados del sistema para m=0:

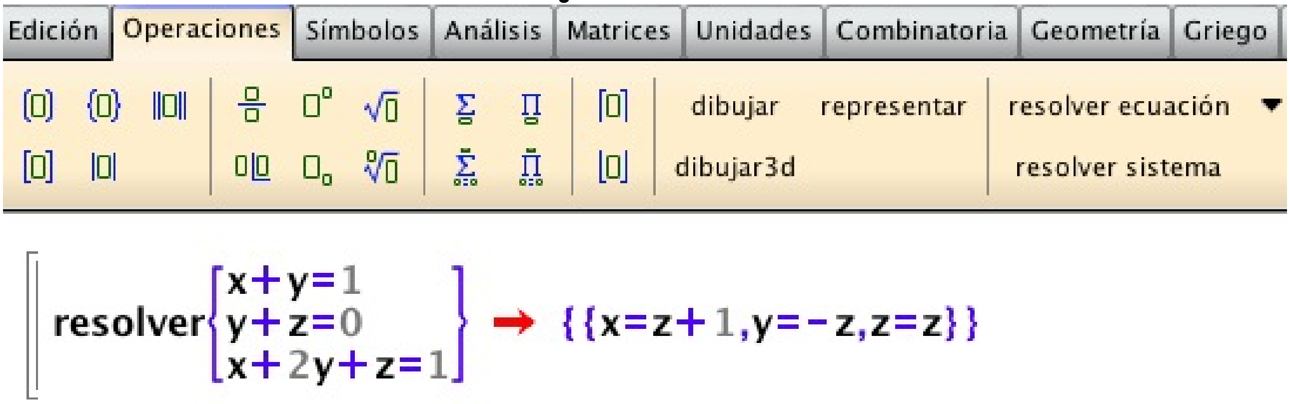
Figura 13.



$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ z=0 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=-y+1, y=y, z=0\}\}$$

7. Por último, resolveremos el sistema para m=1:

Figura 14.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

b) Como el rango de A' puede ser 4, empezamos estudiando su rango:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & 0 & 2 & 1+a^2 \\ 3+a & 0 & 0 & 1+a^2 \\ 6+a & 0 & 2 & 3a+a^2 \end{vmatrix} = -4(a-2)^2$$

- Si $a \neq 2, ran(A') = 4 > ran(A),$ el sistema es incompatible.

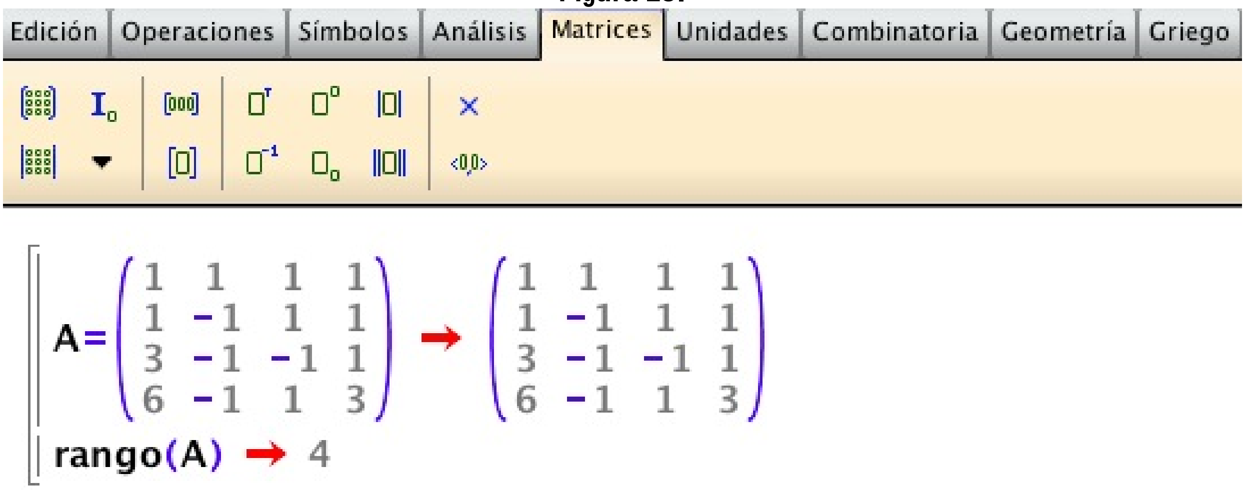
- Si $a = 2, ran(A') < 4.$ puesto que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, ran(A) = ran(A') = 3$

  El sistema es compatible determinado. Para resolverlo, tomamos las tres primeras ecuaciones, que forman un menor distinto de cero, y aplicamos la regla de Cramer, obteniendo: $x = 1, y = 1, z = 1$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

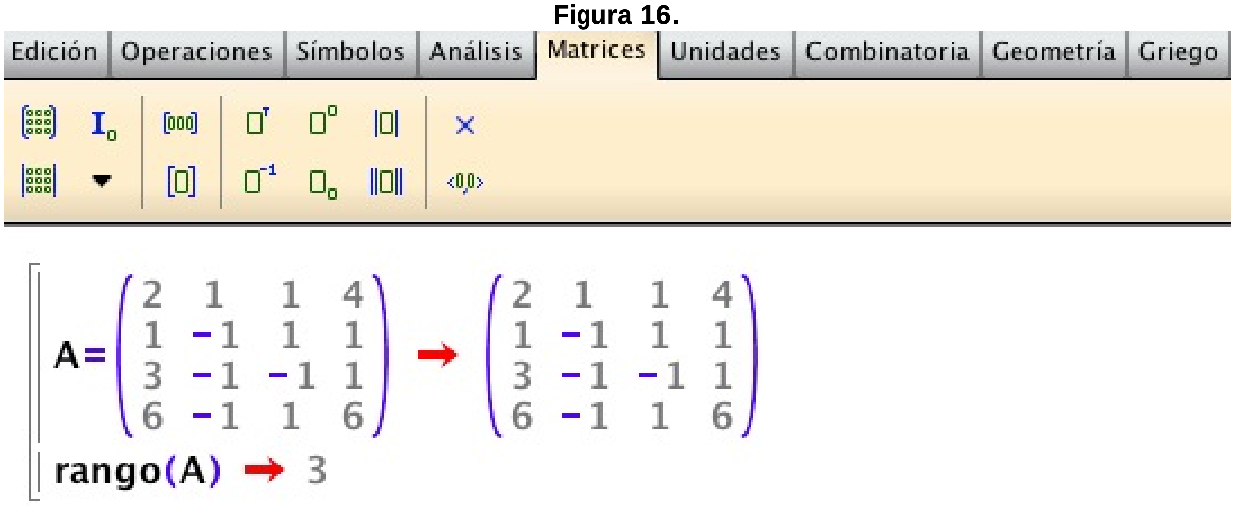
1. Calcularemos el rango para un valor de a distinto de 2 (por ejemplo a=1):

Figura 15.



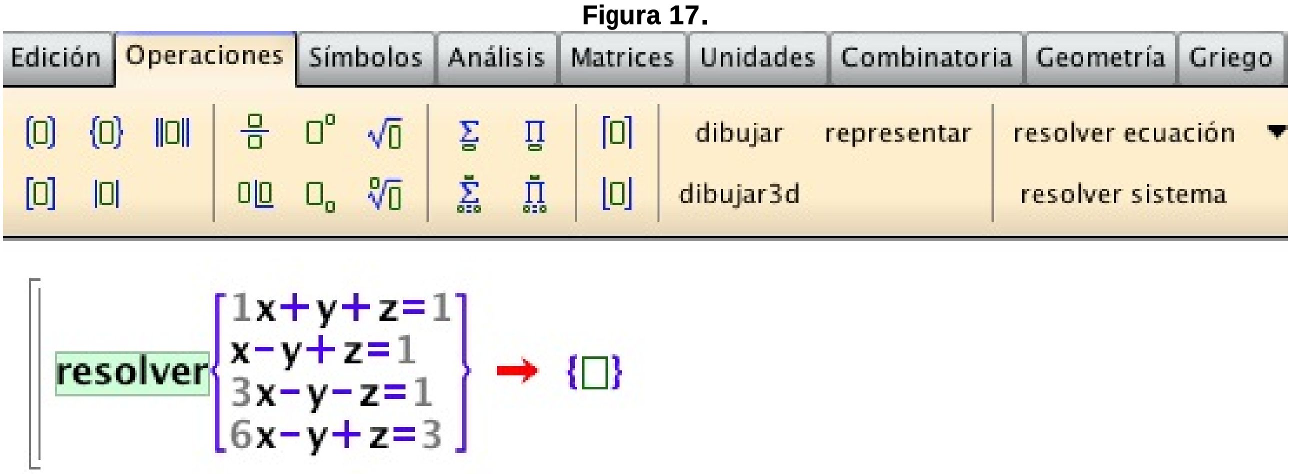
2. Ahora veremos cuál es el rango de A cuando a=2:

Figura 16.



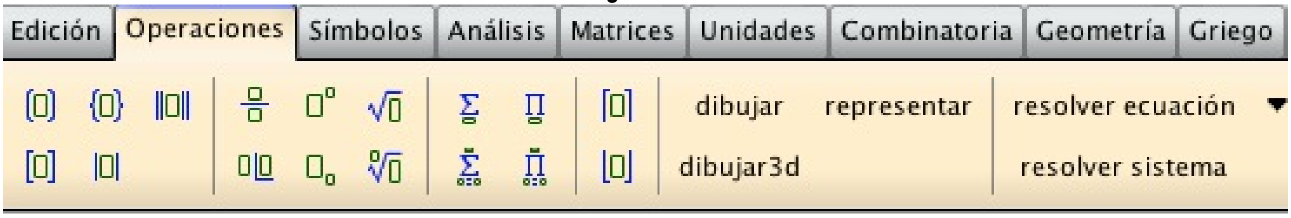
3. En este paso resolveremos el sistema para a=1:

Figura 17.



4. Por último, resolvemos el sistema para a=2:

Figura 18.



$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} 2x+y+z=4 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=1, y=1, z=1\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Sistema homogéneo.

Estudia y resuelve el siguiente sistema según los valores de k:

$$\begin{cases} (1-k)x+y=0 \\ x+(1-k)y+z=0 \\ y+(1-k)z=0 \end{cases}$$

Por ser un sistema homogéneo, el rango de la matriz de coeficientes es igual al de la matriz ampliada. Tiene, al menos, la solución trivial X = 0, Y = 0, Z = 0.

Para que tenga otras soluciones, el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que el numero de incógnitas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ 1 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1-k \end{vmatrix} = -k^3+3k^2-k-1=0$$ Comprobamos que k = 1 es solución de esta ecuación:

$-k^3+3k^2-k-1=(k-1)(-k^2+2k+1)=0$ Soluciones: k = 1, k = 1 - $\sqrt{2}$, k = 1 + $\sqrt{2}$

- Si k ≠ 1, k ≠ 1 - $\sqrt{2}$, k ≠ 1 + $\sqrt{2}$, el sistema es compatible determinado. El sistema solo tiene solución trivial (0, 0, 0)
- k = 1, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow ran(A)=2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

El sistema es compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+z=0 \end{array}\right\}$ Solución: $(-\lambda, 0, \lambda)$

- Si $k=1+\sqrt{2}$, $A=\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ En este caso , $ran(A)=2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

El sistema es compatible indeterminado. $\left.\begin{array}{r} x-\sqrt{2}y+z=0 \\ y-\sqrt{2}z=0 \end{array}\right\}$ Solución: $(\lambda, \sqrt{2}\lambda, \lambda)$

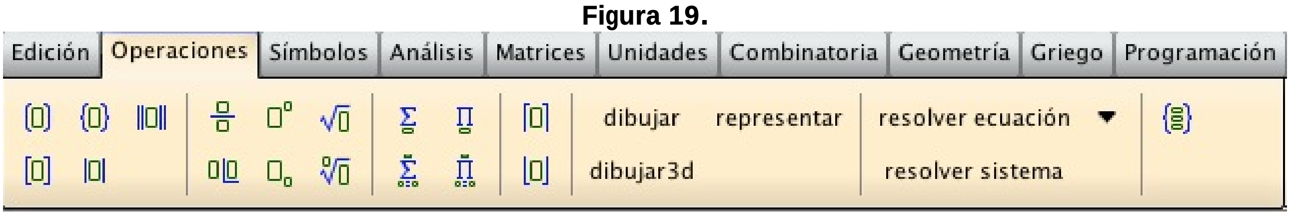
- Si $k=1-\sqrt{2}$, $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ En este caso , $ran(A)=2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

El sistema es compatible indeterminado $\left.\begin{array}{r} x+\sqrt{2}y+z=0 \\ y+\sqrt{2}z=0 \end{array}\right\}$ Solución: $(\lambda, -\sqrt{2}\lambda, \lambda)$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, resolvemos la ecuación para saber los valores de k para los que el sistema es compatible determinado:

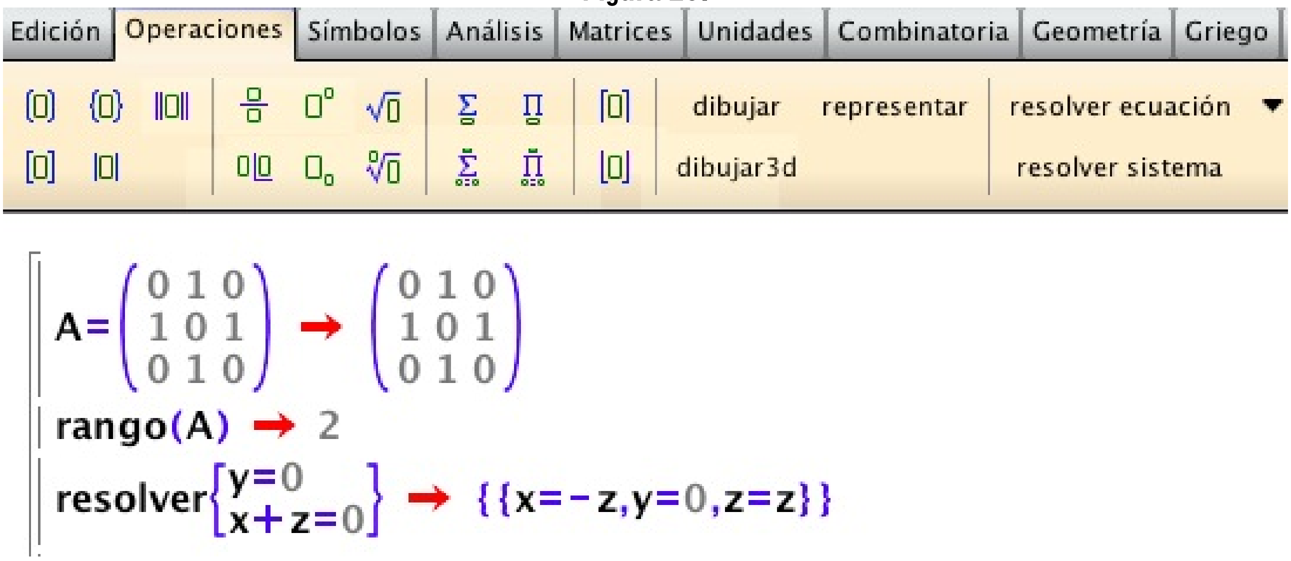
Figura 19.



resolver$(-k^3+3k^2-k-1=0)$ → $\{\{k=1\},\{k=-\sqrt{2}+1\},\{k=\sqrt{2}+1\}\}$

2. Después averiguamos el rango y la solución para k=1:

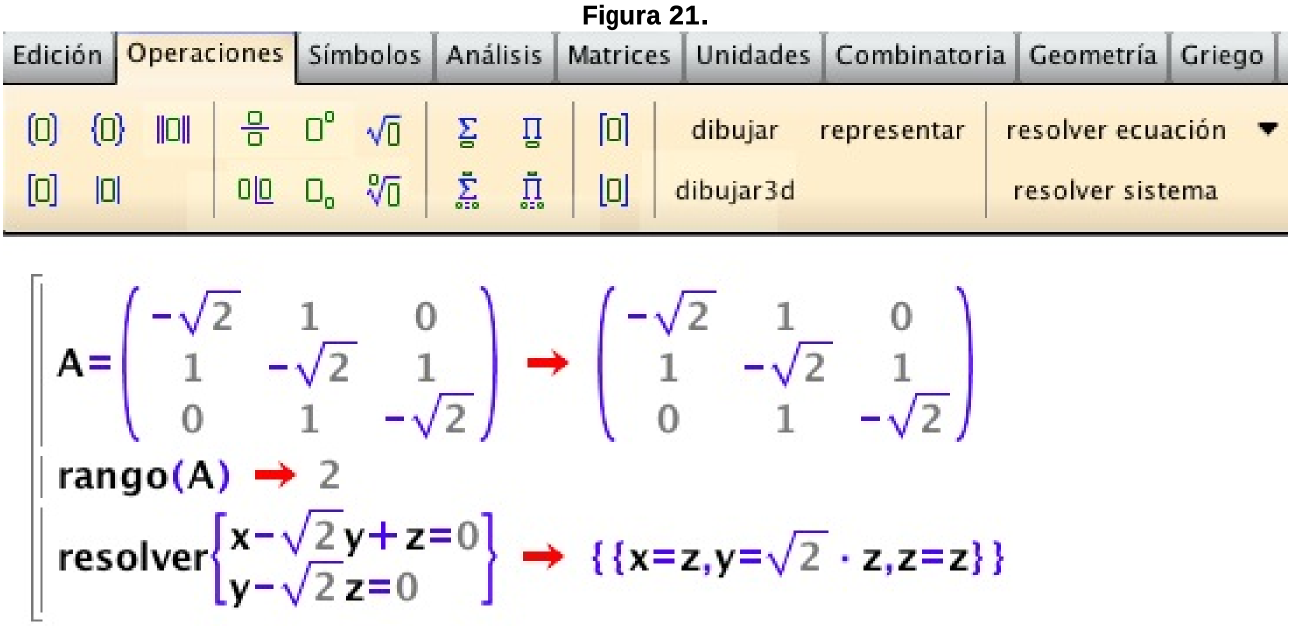
Figura 20.



Se puede comprobar que Wiris en lugar de dar la solución en función de un valor λ lo da en función de z, pero la solución es la misma.

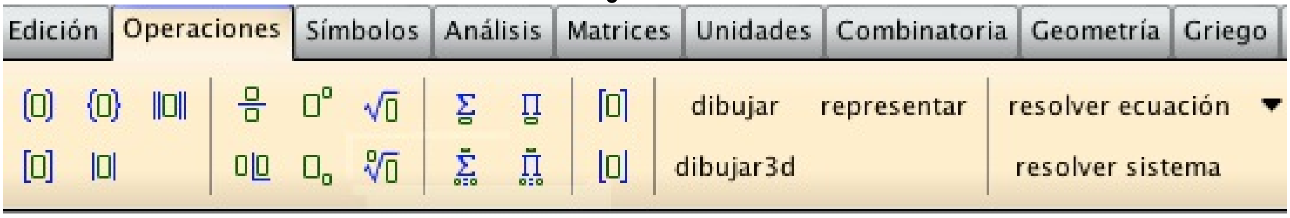
3. A continuación averiguamos el rango y la solución para $k=1+\sqrt{2},$:

Figura 21.



4. Por último veremos cuál es el rango y las soluciones para $k=1-\sqrt{2},$:

Figura 22.



$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) \rightarrow 2$$

$$\text{resolver}\begin{cases} x+\sqrt{2}y+z=0\\ y+\sqrt{2}z=0\end{cases} \rightarrow \{\{x=z, y=-\sqrt{2}\cdot z, z=z\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

4. Forma matricial de un sistema.

Expresa este sistema en forma matricial y resuélvelo utilizando la matriz inversa: $\begin{cases} x+y+z=3\\ 2x-y+z=2\\ x-y+z=1\end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \longrightarrow AX=C$$

Para resolverlo, vamos a obtener la matriz X multiplicando la igualdad $AX=C$ por A^{-1} por la izquierda:

$$(A^{-1}A)\cdot X = A^{-1}C \longrightarrow IX = A^{-1}C \longrightarrow X = A^{-1}C$$

Comprobamos que $|A|=-2\neq 0$ y hallamos A^{-1}: $\longrightarrow$ $Adj(A)=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$

$$[Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

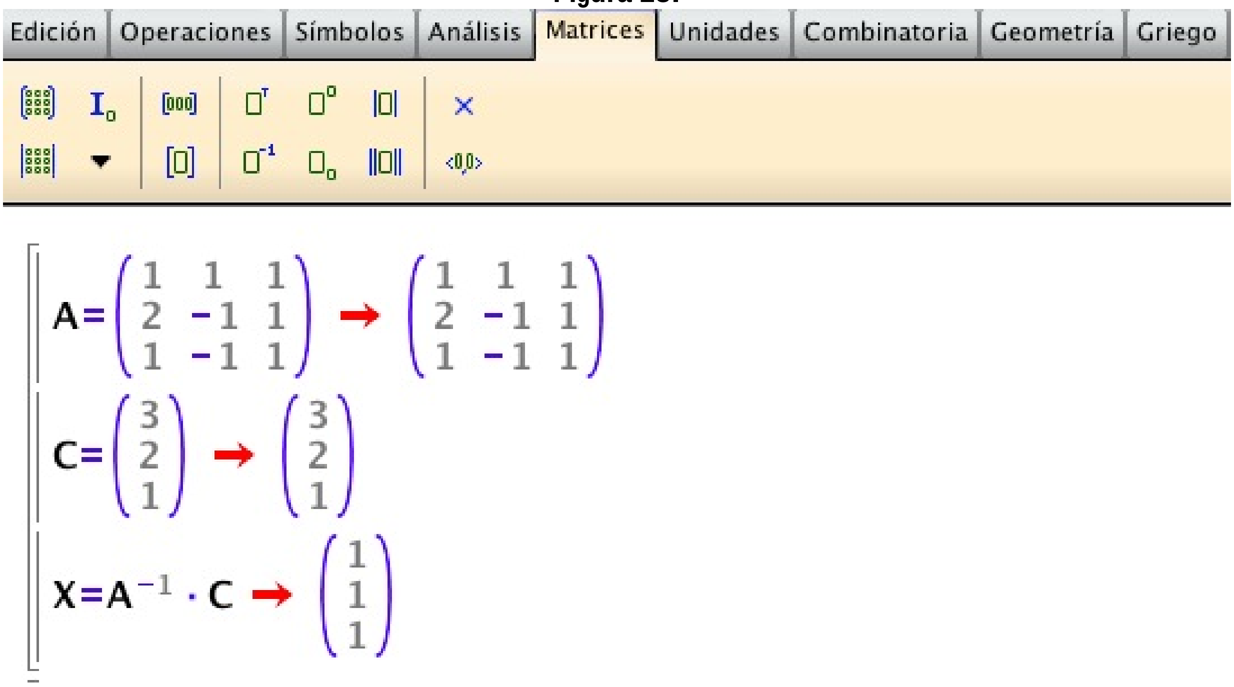
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es (1, 1, 1).

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para obtener la solución a este sistema, sólo tenemos que escribir las matrices A y C igual que en el planteamiento, y luego multiplicar la inversa de A por C, obteniendo así la matriz X de los resultados:

Figura 23.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

5. Matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$$

a) Dada la matriz A determina para que valores del parámetro m existe A^{-1}.

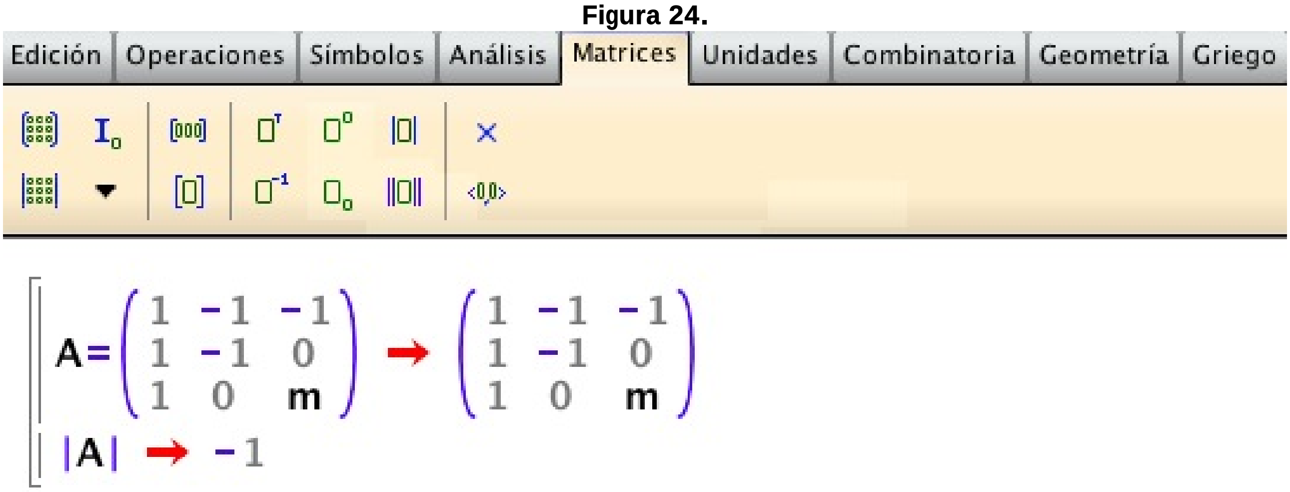
b) Para $m = -1$, ***resuelve*** $\det\left[A^{-1} - xI\right] = 0.$

a) Para que una matriz cuadrada sea regular, es necesario y suficiente que su determinante no sea nulo. Calculamos el determinante de A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = -1$ Como $|A| \neq 0$ para cualquier valor de m, afirmamos que A^{-1} siempre existe.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Escribiremos la matriz, y a esta le calcularemos su determinante:

Figura 24.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

b) Para $m = -1$, calculamos A^{-1}:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - xI = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{pmatrix};$$

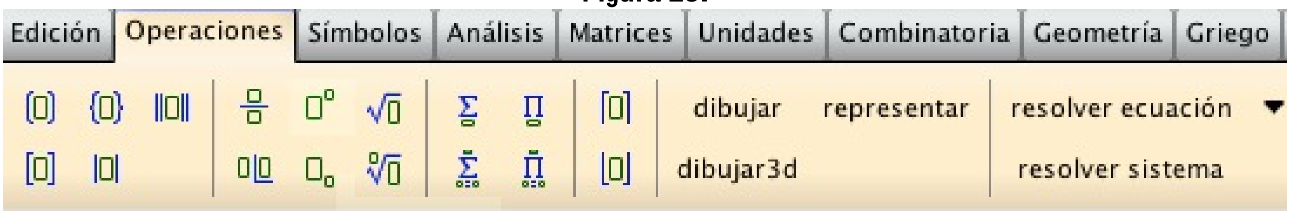
$$\left|A^{-1} - xI\right| = -x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \longrightarrow -(x+1)\cdot(x^2+1) = 0$$

Solución: x = -1

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Sustituimos m por -1 en la matriz y la escribimos. Después escribimos el determinante que queremos calcular (recordemos que la matriz identidad, la escribiremos pulsando el botón que corresponde a una I con un rectángulo en el superíndice e indicando el tamaño). Una vez obtenido este, resolvemos la ecuación que se nos plantea pulsando 'resolver ecuación' y rellenándola:

Figura 25.



$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}-xI_3| \rightarrow \left|\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}+\left(-x\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\right)\right|$$

$$\text{resolver}(-x^3-x^2-x-1=0) \rightarrow \{\{x=-1\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

6. Ecuaciones matriciales.

a) Resuelve la ecuación AX + B = C donde: $A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\\3&4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\1&-2\end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz A sabiendo que verifica la siguiente igualdad: $A\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

c) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ ***siendo X una matriz columna, discute y resuelve la ecuación matricial:*** $AA^{-1}X=\lambda X$ ***Según los valores del parámetro real*** λ**.**

a) Despejamos la matriz X: $AX+B=C \longrightarrow AX=C-B \longrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$

y por tanto $X=A^{-1}(C-B)$.

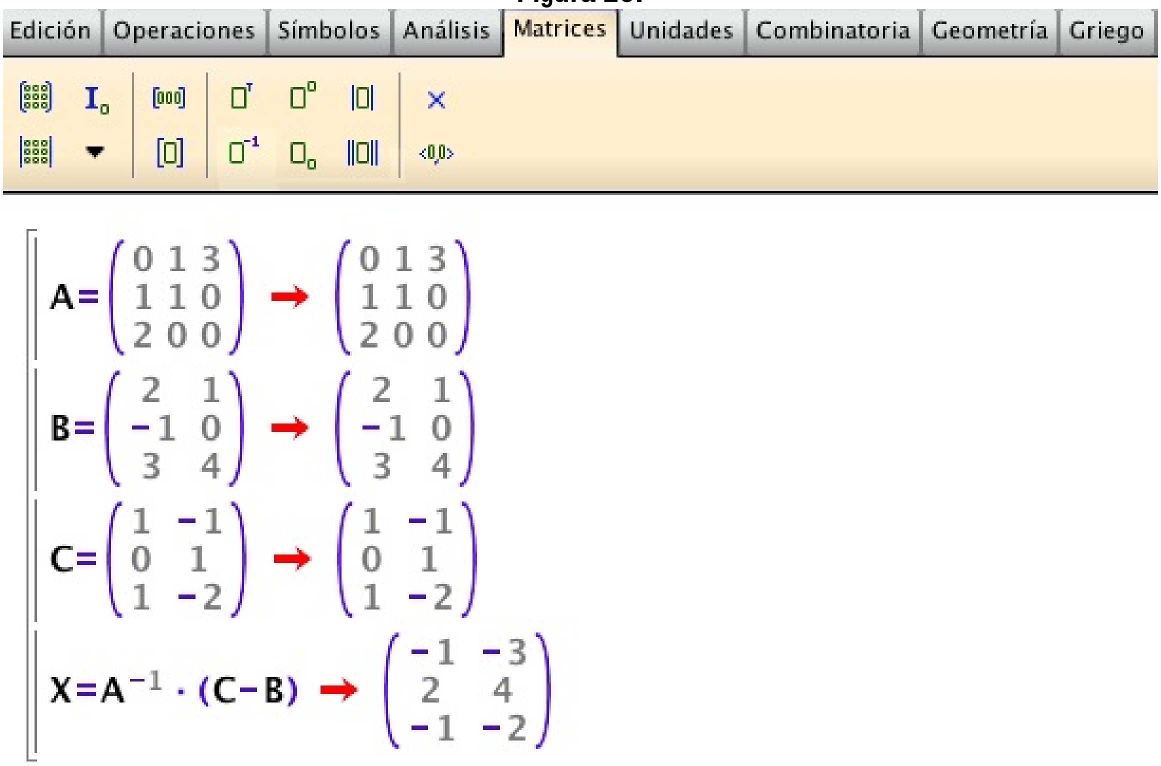
Hallamos $C - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$.

Calculamos $X = A^{-1}(C - B)$ efectuando el producto y se obtiene: $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para este apartado, escribimos las matrices A, B y C, y después escribimos la ecuación para averiguar X ($X = A^{-1}(C - B)$). Para obtener el resultado, pulsamos el botón igual:

Figura 26.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

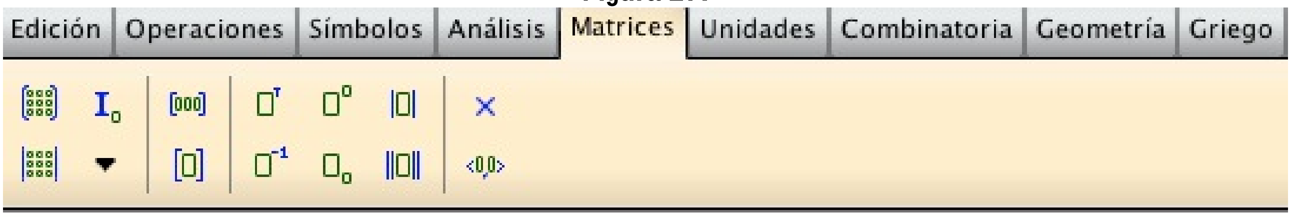
b) La ecuación es del tipo AB=2I. Despejamos A multiplicando por B^{-1} por la derecha: $ABB^{-1} = 2IB^{-1}$ y se obtiene que $A = 2B^{-1}$.

Calculamos B^{-1}: $|B| = 6 \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. De nuevo escribimos la matriz B y luego, la ecuación que despeja A:

Figura 27.



$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$A=2\cdot B^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

c) $AA^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ La matriz X debe ser de dimensión 2 x 1.

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}x=\lambda x\\2y=\lambda y\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)x=0\\(2-\lambda)y=0\end{cases}$$

Es un sistema homogéneo: $A=\begin{pmatrix}1-\lambda&0\\0&2-\lambda\end{pmatrix} \longrightarrow |A|=(1-\lambda)(2-\lambda) \quad |A|=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ o } \lambda=2$

- Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 2$. El sistema solo tiene la solución trivial, X=0, Y=0: $X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

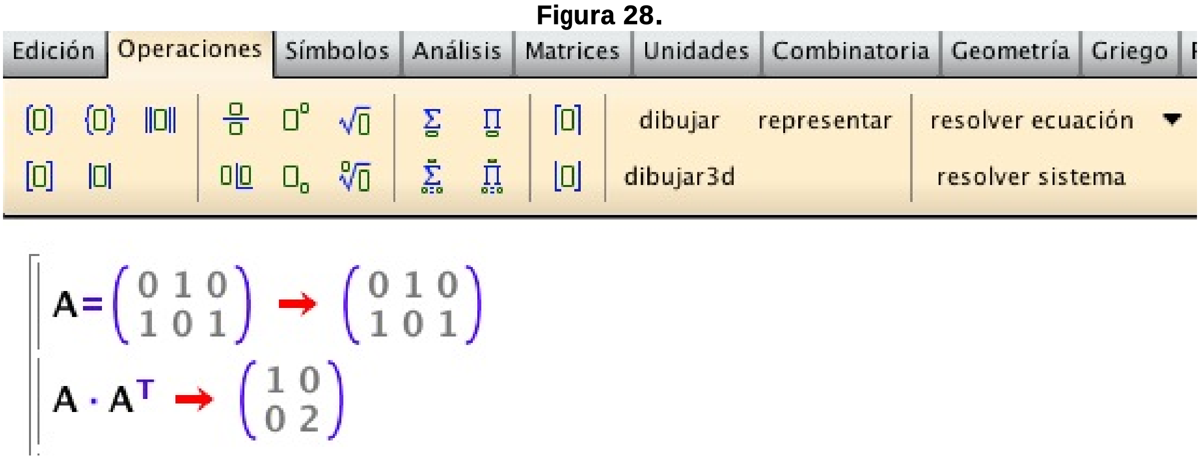
- Si $\lambda=1$, $ran(A)=1$. El sistema es compatible indeterminado con soluciones X = t, Y = 0: $X=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$

- Si $\lambda = 2$, $ran(A) = 1$. El sistema es compatible indeterminado con soluciones X=0, Y = s: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

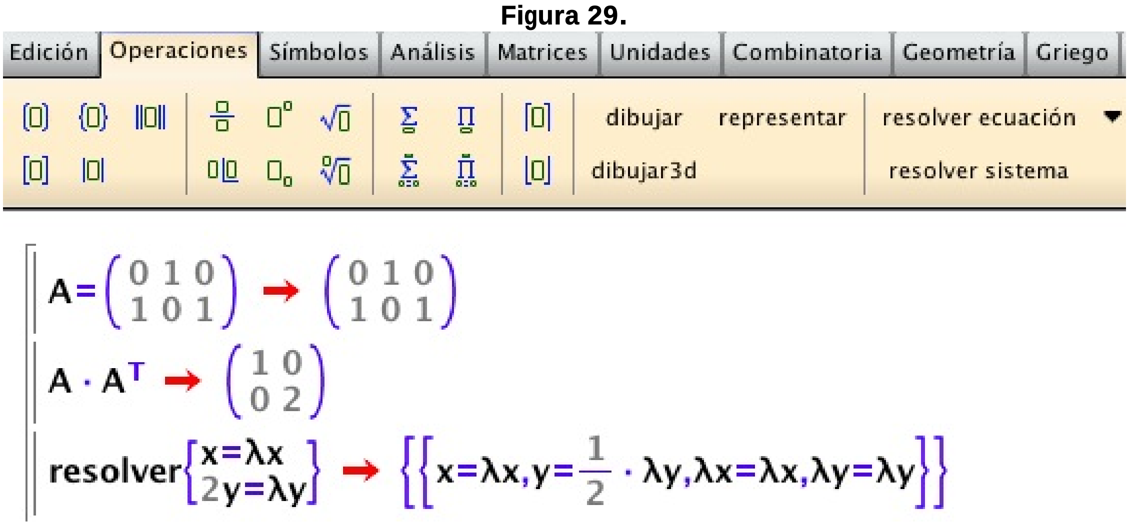
1. Primero debemos escribir la matriz, para obtener el resultado de multiplicar esta por su traspuesta:

Figura 28.



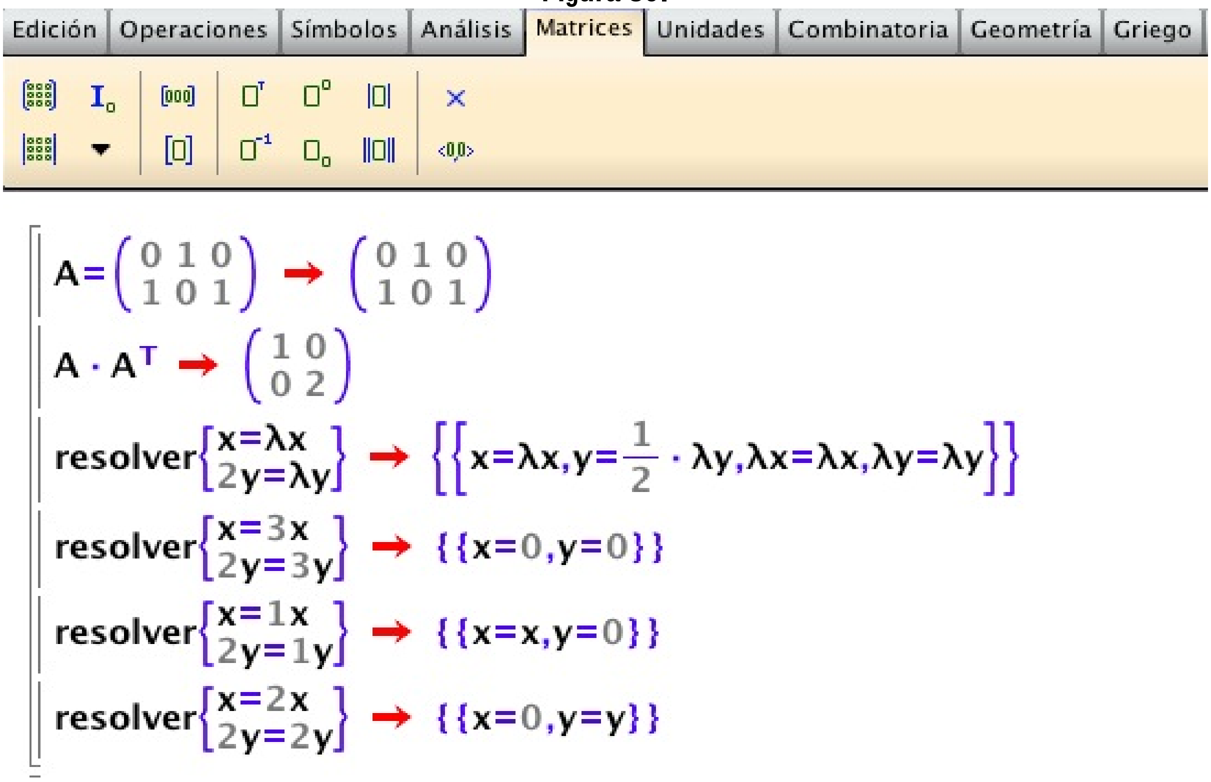
2. Resolvemos el sistema de ecuaciones que se nos plantea.

Figura 29.



3. Por último, sustituiremos en el sistema un valor $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$. como por ejemplo 3, después un valor $\lambda = 1$, y por último un valor $\lambda = 2$, obteniendo así los siguientes resultados:

Figura 30.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web: