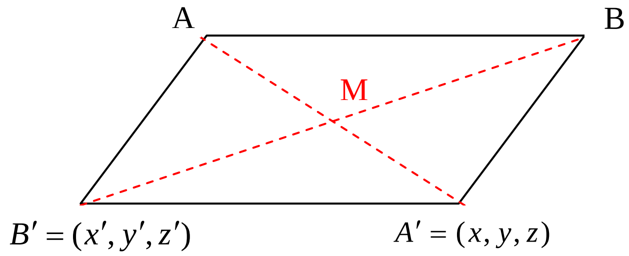
TEMA 6 Puntos, rectas y planos en el espacio

1. Punto medio.

Los puntos A (2, 1, 0) y B (-1, 3, -2) son vértices de un paralelogramo cuyo centro es el punto M (1, 1, 1). Halla Los otros dos vértices y las ecuaciones del lado AB.

A y B son vértices consecutivos ya que el punto medio de AB no es M.



M es el punto medio de $\overline{AA'}$: $\left(\frac{2+x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{0+z}{2}\right) = (1,1,1) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2+x}{2} = 1 \rightarrow x = 0 : \frac{1+y}{2} = 1 \rightarrow y = 1 : \frac{z}{2} = 1 \rightarrow z = 2$

Luego $A' = (0, 1, 2)$

M es el punto medio de $\overline{BB'}$: $\left(\frac{-1+x'}{2}, \frac{3+y'}{2}, \frac{-2+z'}{2}\right) = (1,1,1) \rightarrow x' = 3, y' = -1, z' = 4 \rightarrow B' = (3,-1,4)$

Ecuación del lado AB: vector dirección $\overrightarrow{AB} = (-3,2-2);$ punto A (2, 1,0), ecuación vectorial:

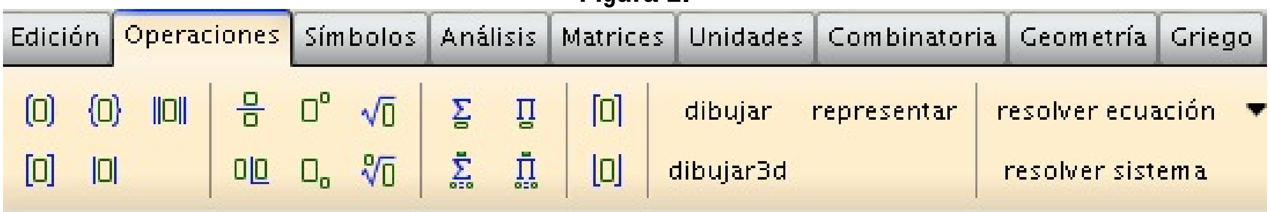
$$(x, y, z) = (2,1,0) + \lambda(-3,2,-2) \rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$ Ecuaciones paramétricas.

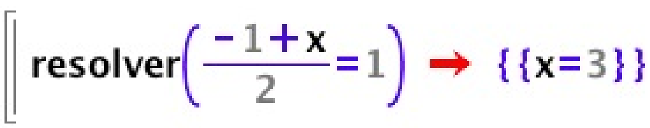
Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio tenemos que resolver tres ecuaciones, para obtener el punto B. Haremos la correspondiente a la coordenada x para ver el procedimiento. Después lo haremos con y y z de igual manera.

Primero pinchamos en la pestaña Operaciones, y después en Resolver Ecuación (también podemos escribir directamente: resolver). A continuación rellenaremos los huecos y pulsaremos el botón de igual, obteniendo el resultado para x.

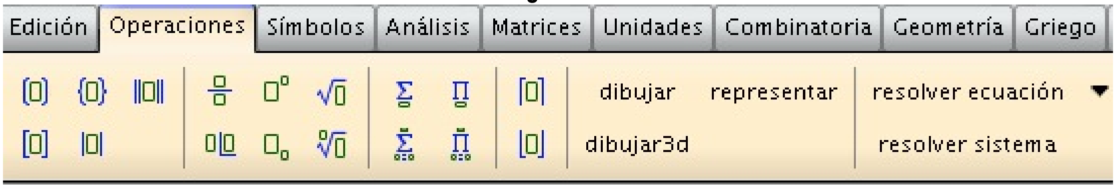
Figura 1.

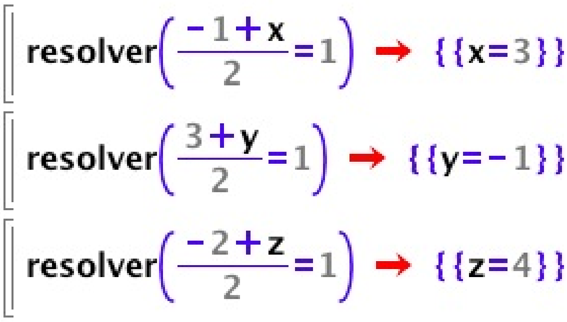




2. Ahora haremos lo mismo con y y z, obteniendo el punto:

Figura 2.

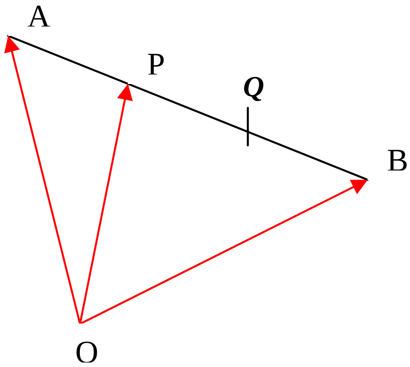




Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

2. Puntos de división.

Halla las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales, siendo A (1, 3, 0) y B (-2, 5, -4).



Primero se hallará en punto ***P*** y después se hallará el punto ***Q***, para ello:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \ ; \quad \overrightarrow{OP} = (1,3,0) + \frac{1}{3}\left[(-2,5,-4) - (1,3,0)\right] =$$

$$= \left(0, \frac{11}{3}, -\frac{4}{3}\right) \to P = \left(0, \frac{11}{3}, -\frac{4}{3}\right);$$

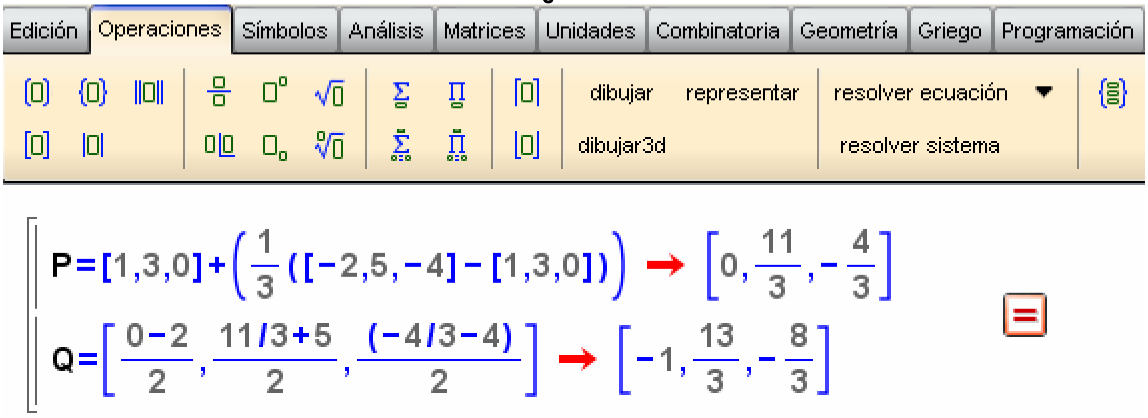
Q es el punto medio de $\overline{PB} \to$

$$\to Q = \left(\frac{0-2}{2}, \frac{(11/3+5)}{2}, \frac{(-4/3)-4}{2}\right); \quad Q = \left(-1, \frac{13}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolveremos el vector P y el Q introduciéndolos en Wiris como corchetes y resolviéndolos como operaciones:

Figura 3.



**Para poner los corchetes tenemos dos opciones: una es con el teclado, y la otra, pinchando en Operaciones, y posteriormente, en el símbolo en el que aparecen dos corchetes a los lados de un rectángulo.*

** Para escribir las fracciones, nos quedamos dentro de la pestaña Operaciones, y pinchamos sobre el símbolo representado por la barra fraccionaria con un rectángulo en el numerador y otro en el denominador.*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

3. Ecuaciones implícitas en una recta.

Comprueba que los planos $\alpha : x - y + z - 4 = 0$ ***y*** $\beta : 2x + y - z + 1 = 0$ ***se cortan y halla las ecuaciones paramétricas de la recta que determinan.***

Como $\vec{n_\alpha}(1,-1,1)$ y $\vec{n_\beta}(2,1,-1)$ no son proporcionales, α y β se cortan en una recta *r*. Las ecuaciones paramétricas de *r* se obtienen resolviendo el sistema que forman α y β: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

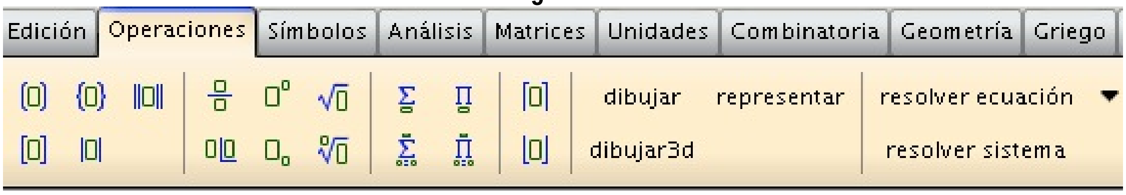
También podemos obtener las ecuaciones paramétricas hallando el vector dirección y un punto de *r:*

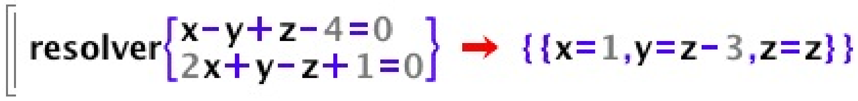
Vector dirección de $r = \vec{n} \cdot \vec{n} = (0,3,3)$. Tomamos $\vec{d_r}(0,1,1)$. Obtenemos un punto de r, haciendo por ejemplo, z=0 en las ecuaciones de los planos y resolviendo el sistema que resulta. Obtenemos P (1, -3, 0). Con $\vec{d_r}$ y P escribimos las ecuaciones paramétricas de r.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este ejercicio, resolveremos el sistema. Con Wiris la solución del sistema sale en función de z en vez de salir en función del parámetro, pero es la misma solución.

Figura 4.





Recordamos que para resolver un sistema pinchamos en la pestaña Operaciones, después en resolver sistema, indicamos en la ventana emergente cuántas ecuaciones tendrá nuestro sistema y rellenamos los huecos. Después pulsamos en el botón igual y obtenemos la solución.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

4. Posición de dos rectas.

Estudia la posición relativa de las rectas r y s: $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$ $\quad s: \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5-6\lambda \end{cases}$

$$r: \begin{cases} p_r(0,2,1) \\ \overrightarrow{d_r}(2,-1,3) \end{cases}; \quad s: \begin{cases} p_s(2,0,5) \\ \overrightarrow{d_s}(-2,2,-6) \end{cases}; \quad \overrightarrow{PP'}(2,-2,4); \quad ran(\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s}) = ran\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$$

$\rightarrow$ r y s tienen distinta dirección. $ran(\overrightarrow{d_r}, \overrightarrow{d_s} \overrightarrow{PP'}) = ran\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 3$ $\boxed{\text{r y s se cruzan}}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calculamos el rango de ambas matrices. Para ello, pinchamos en la pestaña Matrices, luego en el símbolo de matrices, rellenamos con los datos y escribimos ‘rango’, para luego pulsar el botón ‘igual’ y obtener el resultado. Además, representaremos las dos rectas con los dos puntos que tenemos de ambas:

Figura 5.

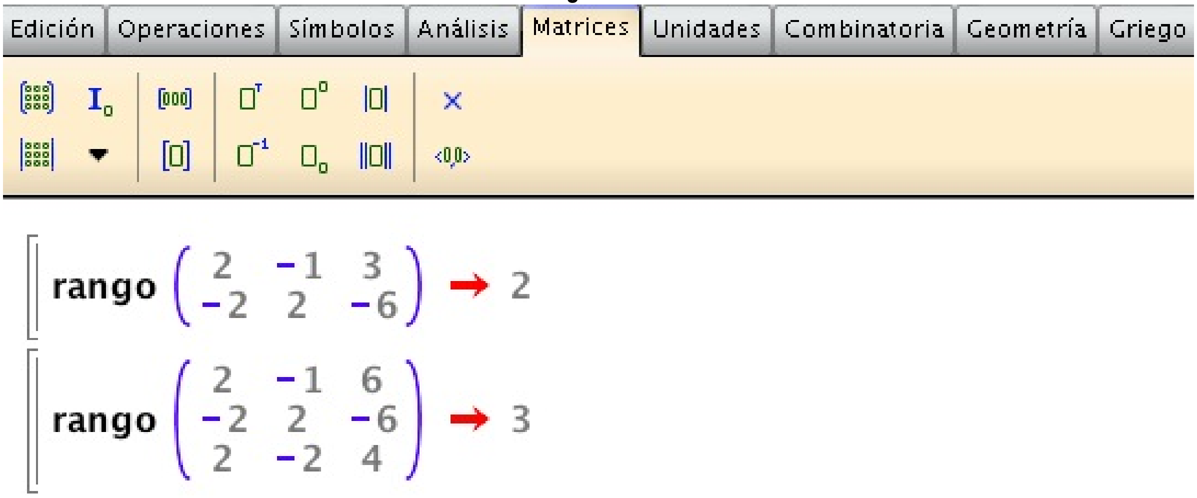
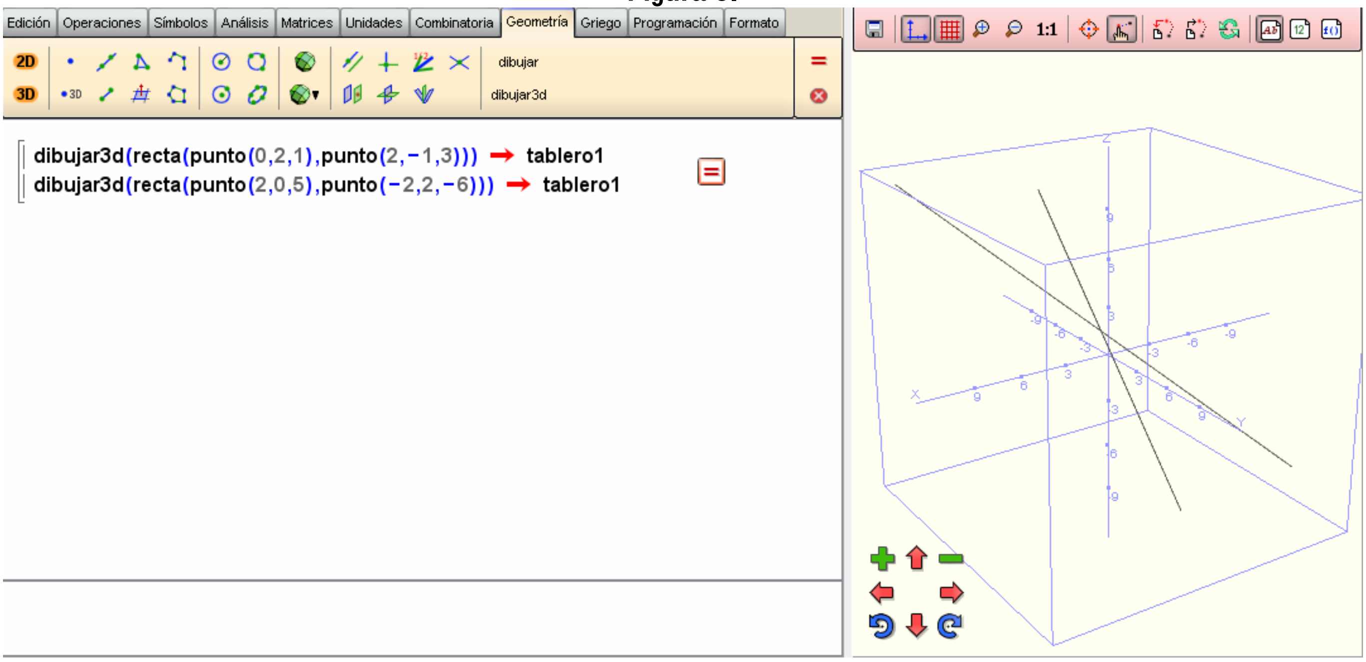


Figura 6.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

5. Rectas que se cortan.

a) Comprueba que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m.

$$r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$$

b) Halla el punto de intersección para el caso m = 6.

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$$

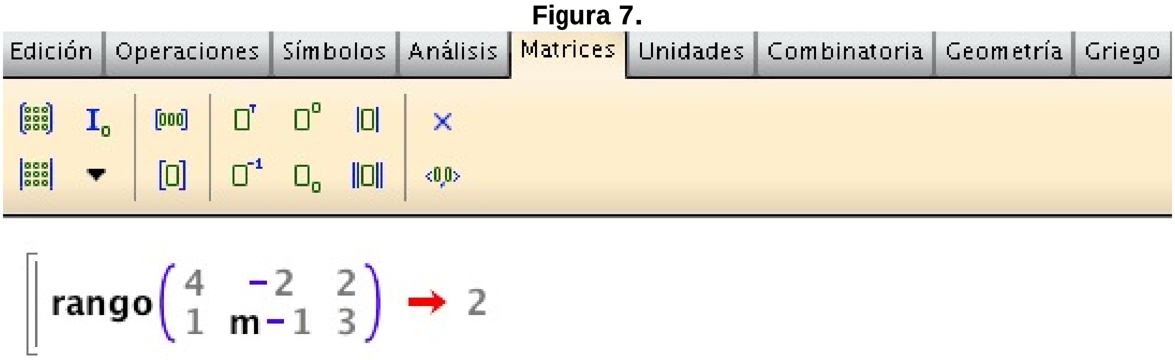
a) $ran\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ para cualquier valor de m, ya que $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \overrightarrow{PP'}(2,-2,4)$;

$ran\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \\ 1 & m-1 & 3 \end{pmatrix} = 2$ para cualquier valor de m, r y s se cortan.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

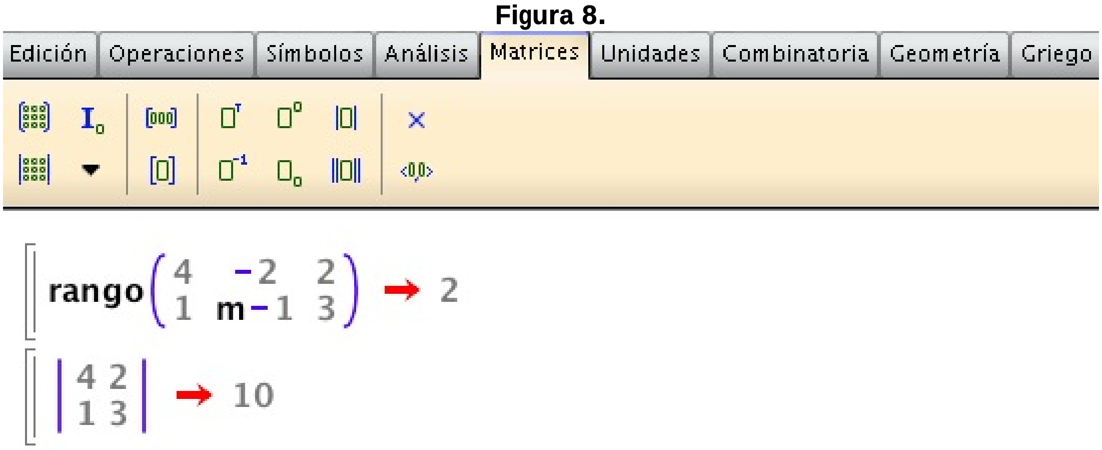
1. Calcularemos el rango de la matriz (para hacerlo pinchamos en la pestaña Matrices, luego en el símbolo para insertar una matriz, indicamos cuántas filas y columnas tiene, y rellenamos cada hueco hasta obtener la matriz tal y como la vemos; y por último pulsamos igual):

Figura 7.



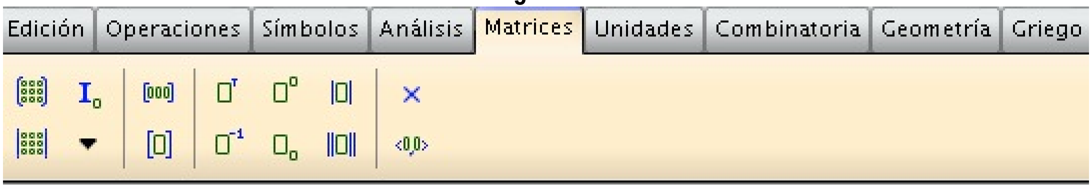
2. Después calcularemos el determinante de la primera y la tercera columna (para ello, pinchamos en la pestaña Matrices, luego en el símbolo para insertar un determinante, escribimos cuántas filas y columnas queremos que tenga, y rellenamos los huecos, pulsando igual para obtener el resultado):

Figura 8.



3. Por último, calculamos el rango de la segunda matriz, de la misma forma que la primera:

Figura 9.



$$\text{rango}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow 10$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \\ 1 & m-1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

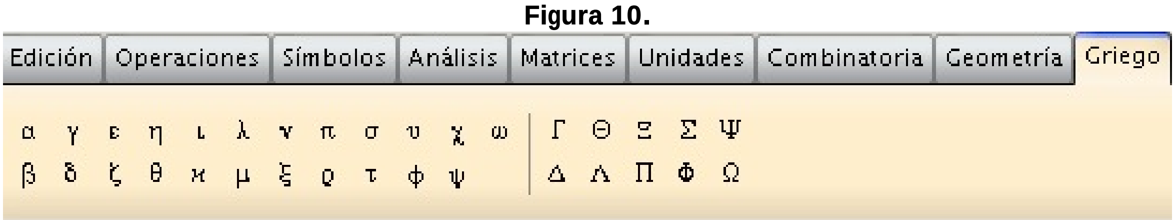
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) $r:\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$; $s:\begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 6+5\mu \\ z = 3+3\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\lambda = 1+\mu \\ 2\lambda = 6+5\mu \\ 2\lambda = 3+3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 4\lambda - \mu = 1 \\ -2\lambda - 5\mu = 5 \\ 2\lambda - 3\mu = 3 \end{matrix}\Bigg\}$ $\lambda = 0$; $\mu = -1$. Obtenemos el punto de intersección haciendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r, o $\mu = -1$ en las de s. El punto es el (0, 1, 0).

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este apartado lo resolveremos como uno de los anteriores, obteniendo la solución al sistema de ecuaciones.

Figura 10.



$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} 4\lambda - \mu = 1 \\ 2\lambda - 5\mu = 5 \\ 2\lambda - 3\mu = 3 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{\lambda = 0, \mu = -1\}\}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

**Recordamos que para resolver un sistema, pinchamos en la pestaña Operaciones y luego en resolver sistema. Escribimos que tiene tres ecuaciones, rellenamos los espacios y pinchamos igual para obtener el resultado.*
*** Para insertar las letras del alfabeto griego, pinchamos como vemos en la imagen superior en la pestaña Griego. Una vez en ella, seleccionamos la letra que queramos, y automáticamente se inserta donde tengamos el cursor.*

6. Posición de dos rectas que dependen de un parámetro.

Estudia en función de a la posición relativa de las rectas:

$$l:\begin{cases} x=1+at \\ y=1-at \\ z=1+t \end{cases} \quad l'=\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-y+az=5 \end{cases}$$

$\overrightarrow{d_t}=(a,-a,1); P(1,-1,1)\in l$; Buscamos el vector director y un punto de l':

$\overrightarrow{d_{l'}}=(1,1,1)\cdot(3,-1,a)=(a+1,3-a,-4)$

Para Z = 0 obtenemos $Q\left(\frac{7}{4},\frac{1}{4},0\right)$ $\quad ran(\overrightarrow{d_l},\overrightarrow{d_{l'}})=ran\begin{pmatrix} a & -a & 1 \\ a+1 & 3-a & -4 \end{pmatrix}=2$;

No existe ningún valor de a para el cual $\overrightarrow{d_l}$ y $\overrightarrow{d_{l'}}$ sean paralelos.

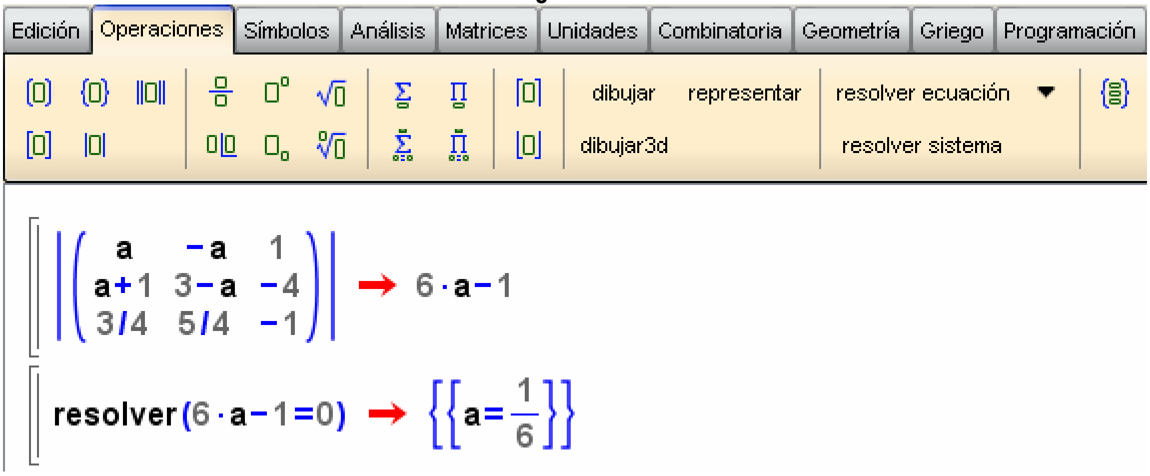
$$ran(\overrightarrow{d_l},\overrightarrow{d_{l'}}\overrightarrow{PQ})=ran\begin{pmatrix} a & -a & 1 \\ a+1 & 3-a & -4 \\ 3/4 & 5/4 & -1 \end{pmatrix}=6a-1=0\rightarrow a=\frac{1}{6};$$

- Si $a=1/6$, $ran(\overrightarrow{d_l},\overrightarrow{d_{l'}}\overrightarrow{PQ})=2\rightarrow l$ y l' se cortan.
- Si $a\neq 1/6$, $ran(\overrightarrow{d_l},\overrightarrow{d_{l'}}\overrightarrow{PQ})=3\rightarrow l$ y l' se cruzan

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

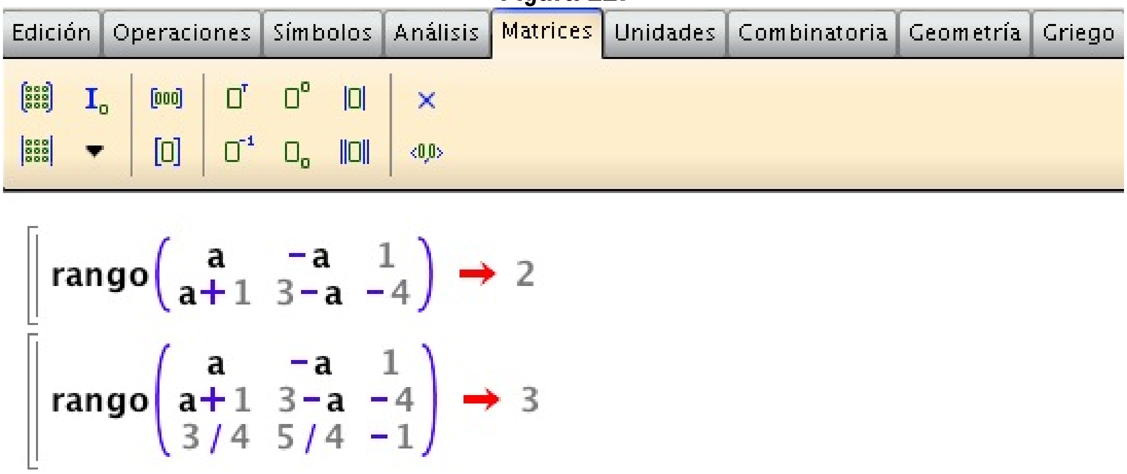
1. En primer lugar calculamos el determinante de la matriz (para ello escribimos la matriz y a continuación la seleccionamos y pulsamos en el botón determinante que se encuentra dentro de la pestaña 'Matrices'). Después, igualamos el resultado a 0 y lo resolvemos como una ecuación.

Figura 11.



2. Por último, para a igual a 1/6, el rango es 2 mientras que para cualquier otro es 3. Para los primeros se cortan, mientras que para los segundos se cruzan. De esta forma, lo comprobamos calculando el rango de ambas matrices:

Figura 12.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

7. Puntos coplanarios.

Se consideran los cinco puntos cuyas coordenadas son: $P_1=(1,-1,2)$, $P_2=(-2,2,3)$, $P_3=(-3,3,3)$, $P_4=(-3,3,0)$, $P_5=(-3,4,3)$. ***¿Forman parte de un mismo plano?***

- Hallamos la ecuación del plano α determinado por P_1, P_2 y P_3 :

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,3,1)\\ \overrightarrow{P_1P_3}=(-4,4,1)\\ P_1=(1,-1,2)\end{array}\right\}\text{Ecuación implícita del plano } \alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \alpha : x+y=0$$

- Comprobamos si los puntos P_4 y P_5 pertenecen a ese plano:

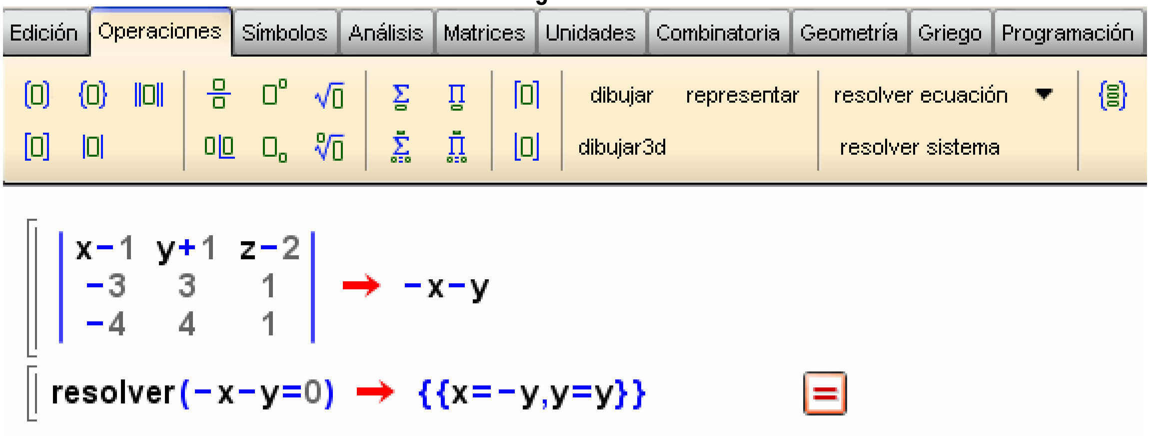
$$P_4=(-3,3,0)\to -3+3=0\to\in\alpha \qquad ; \qquad P_5=(-3,4,3)\to -3+4\neq 0\to\notin\alpha$$

Los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 no están en un mismo plano.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calculamos el determinante e igualamos el resultado a 0 como en el ejercicio 6:

Figura 13.



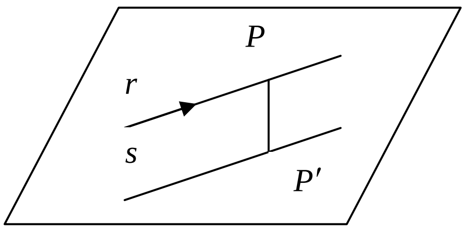
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

8. Plano dado por dos rectas paralelas.

Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas siguientes: $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1 \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=3 \end{cases}$

Estudiamos la posición relativa de r y s:



$$ran\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}=1,\; ran\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}=2\to \text{ r y s son paralelas.}$$

Tomamos como vectores del plano el vector director de r y el vector $\overrightarrow{PP'}(-1,-2,2)$.

$P(3,2,1)$

$P'(2,0,3)$

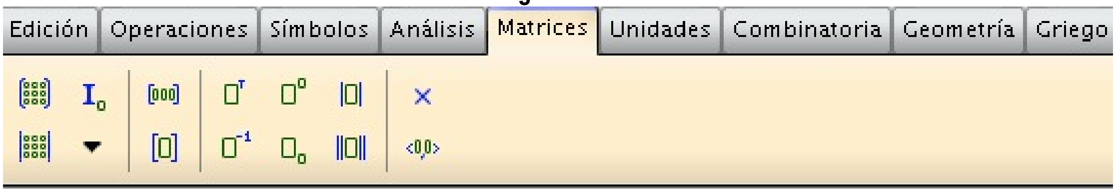
Con estos vectores y un punto de r o s, escribimos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ y-2 & 3 & -2 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\to \boxed{6x+2y+5z-27=0}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calculamos el rango de la matriz (pinchamos en la pestaña Matrices, luego en el símbolo de Matrices, rellenamos los huecos, y escribimos delante de la matriz 'rango', pulsamos el botón de igual y tenemos el rango):

Figura 14.



$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1$$

2. Calculamos el otro determinante de la misma forma que el primero.

Figura 15.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

3. Por último, resolveremos el determinante de la misma forma que en ejercicios anteriores (pinchamos en Matrices, luego en el símbolo de Determinantes, y a continuación rellenamos cada hueco, para luego pulsar igual y obtener el resultado):

Figura 16.

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1$$

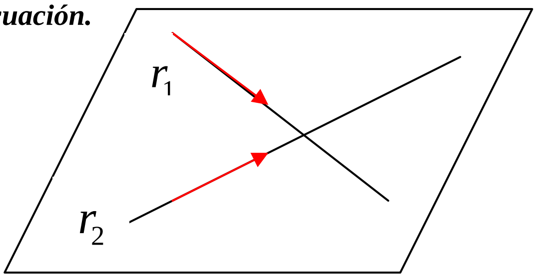
$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ y-2 & 3 & -2 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 6\cdot x+2\cdot y+5\cdot z-27$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

9. Plano dado por dos rectas secantes.

Comprueba que las siguientes rectas determinan un plano y halla su ecuación.



$$r_1\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \qquad r_2\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

r_1 y r_2 tienen distinta dirección y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, r_1 y r_2 se cortan.

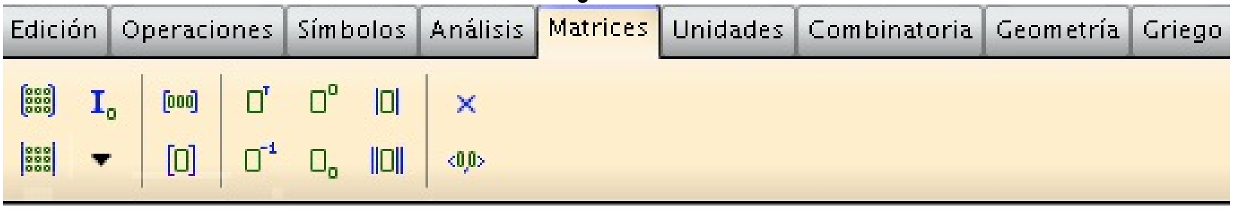
Tomamos como vectores directores de r_1 y r_2 y un punto cualquiera de r_1 o r_2 $P(2,1,4)$.

Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z-4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\boxed{-x-y+z-1=0}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Calculamos el valor del determinante tal y como lo hemos hecho antes:

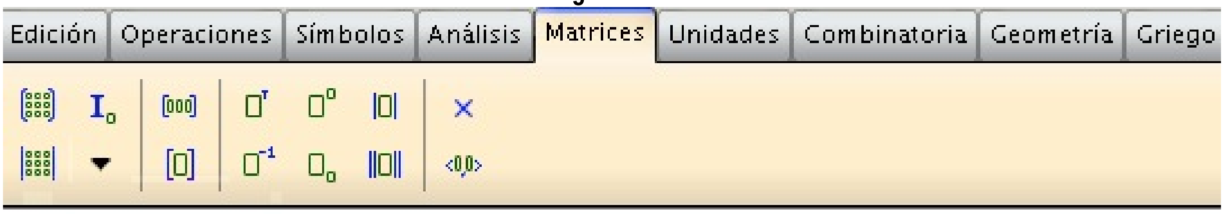
Figura 17.



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow 0$$

2. Para saber el valor de x, y y z, calculamos el determinante:

Figura 18.



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z-4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow -5\cdot x-5\cdot y+5\cdot z-5$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

10. Posición de recta y plano.

a) Determina a y b para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ ***contenga a la recta*** $r = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$

b) ¿Para que valores de a y b es r paralela a π ***?***

c) ¿Para que valores corta r a π ***? Halla el punto de corte en el caso a = 0 y b = 7.***

a) El vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares: $\vec{n} = (2,1,a)$

$\vec{d} = (1,1,1)\cdot(-1,-2,1) = (3,-2,-1)$

$\vec{n}\cdot\vec{d}=0 \rightarrow 6-2-a=0 \rightarrow a=4$ Un punto cualquiera de r tiene que pertenecer a π. Hacemos z = 0 para obtener un punto:

$$P=(2,-1,0)\in r \rightarrow P\in\pi \rightarrow 2\cdot 2+1(-1)+4\cdot 0=b \rightarrow b=3$$

b) r será paralela a π si $a=4$ y $b\neq 3$.

c) r cortará a π si $a\neq 4$ y b toma cualquier valor.

Para hallar el punto de corte, expresamos r en paramétricas: $r\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

El punto que buscamos es de la forma: $Q(2+3\lambda,-1-2\lambda,-\lambda)$ Hacemos que $Q\in\pi$ con a = 0 y b = 7:

$2\cdot(2+3\lambda)-1-2\lambda=7 \rightarrow \lambda=1$ Sustituimos en r: $Q(5,-3,1)$

Para resolver este problema no es necesario usar Wiris, pero se ha incluido porque puede ser útil para el estudiante.

11. Posición de tres planos.

Indica los valores de a para que los tres planos $\begin{cases} \pi_1: x+y+z=a-1 \\ \pi_2: 2x+y+az=a \\ \pi_3: x+ay+z=1 \end{cases}$

a) Se corten en un punto.

b) Se corten en una recta.

c) No se corten.

En primer lugar se va a calcular el determinante de la matriz A

$|A|=-a^2+3a-2;\quad |A|=0 \rightarrow a=1, a=2$

a) Se cortan en un punto si $a\neq 1$ y $a\neq 2$, ya que, en ese caso, el sistema es compatible determinado: $(ran(A)=ran(A')=3.)$

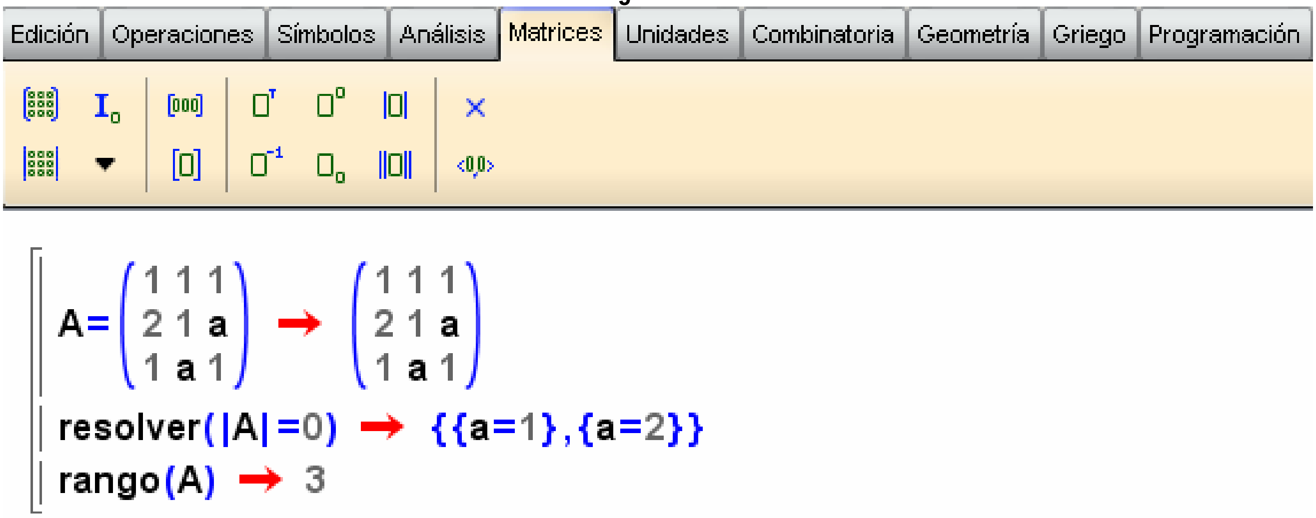
b) Se cortan en una recta si $a=2$, ya que $ran(A)=\ ran(A')=2$.

c) Si $a=1$, $ran(A)=2$ y $ran(A')=3$. El sistema es incompatible. Por tanto, los planos no tienen ningún punto en común.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

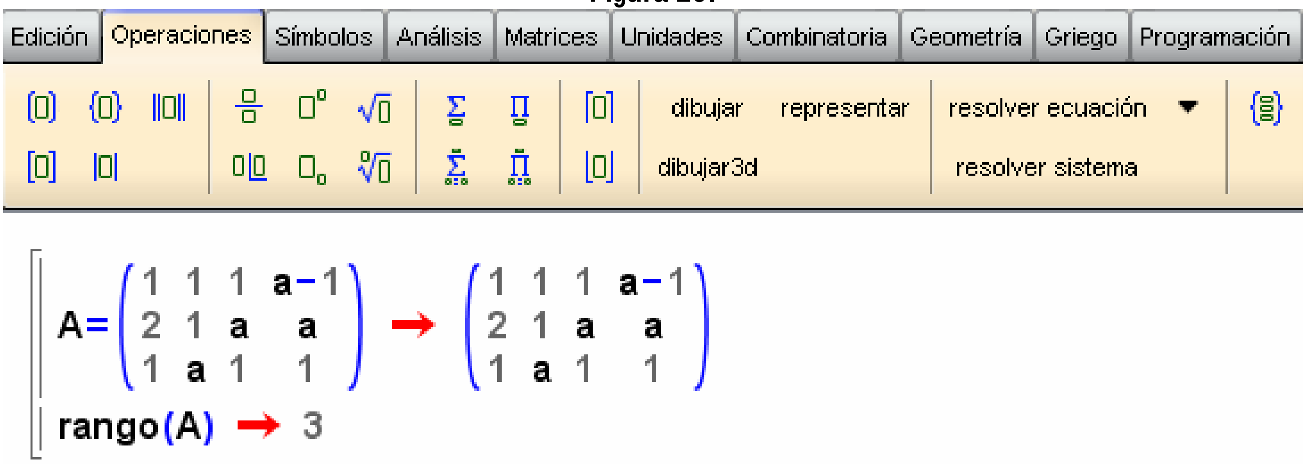
1. En primer lugar, escribimos la matriz A y la nombramos, a continuación igualamos el determinante de la matriz a 0. Después, calculamos el rango de la matriz:

Figura 19.



2. Por último, escribimos la matriz ampliada y la nombramos, y a continuación, calculamos su rango de la misma manera que en la figura anterior:

Figura 20.



**Para resolver la ecuación de segundo grado, pinchamos en la pestaña Operaciones, luego en Resolver ecuación. Entonces, rellenamos con los datos de la ecuación que queremos resolver, y pulsamos el botón igual para obtener la solución.*

*** Recordamos que para escribir una potencia, pulsamos el botón de Potencia (representado por un rectángulo con un cuadrado en el superíndice).*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

12. Determinación de un plano.

Dada la recta r y el plano π halla un plano que contenga a la recta r y corte al plano π en una recta paralela al plano OXY. $r = \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ $\quad \pi : x + y + z - 1 = 0$

Llamaremos α al plano buscado. Expresamos r en paramétrica. $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$

El vector director de r, $\overrightarrow{d_r}(0,0,1)$, es un vector de α. Un punto cualquiera de r, $P(1,3,0)$, es un punto de α.

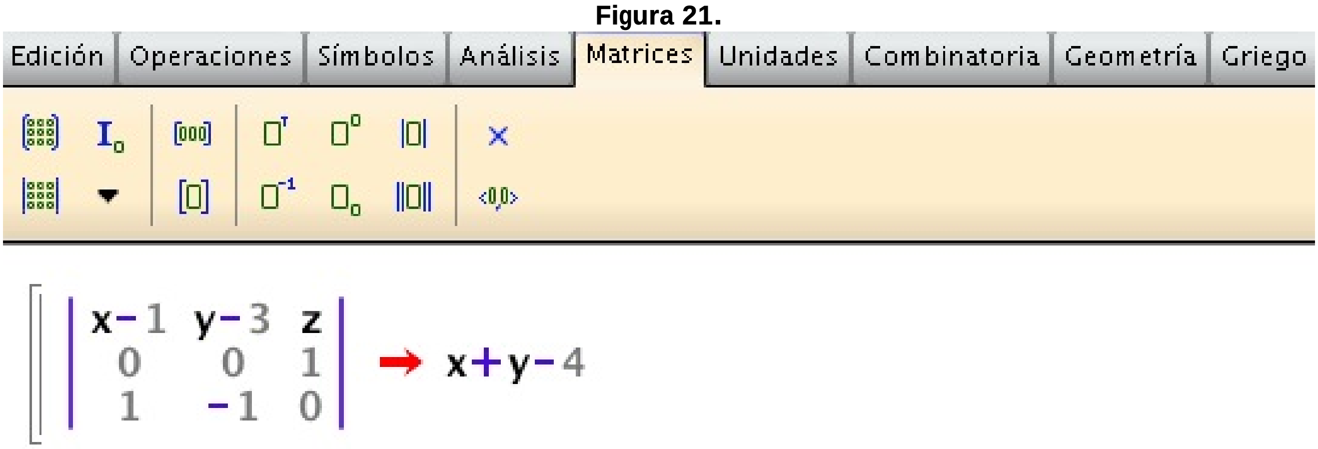
Sea s la recta intersección de α y π. Como s está contenida en π, su vector director es ortogonal a $\overrightarrow{n_\pi}(1,1,1)$; y por ser paralela a OXY, es también ortogonal al vector normal de OXY, $\overrightarrow{n'}(0,0,1)$. Por tanto, $\overrightarrow{d_s} = (1,1,1) \cdot (0,0,1) = (1,-1,0)$ es un vector de α.

Ecuación del plano α $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to x + y - 4 = 0$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. De nuevo, para resolver este ejercicio, calcularemos el determinante:

Figura 21.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

13. Recta que corta a otras dos.

Encuentra la recta que pasa por P (1, 0,-1) y corta a las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones:

$l_1:\begin{cases}3x+2y-z+1=0\\2x-y+z+4=0\end{cases}$ $\qquad$ $l_2\begin{cases}x=3+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}$

Pasamos l_1 a paramétrica, $l_1\begin{cases}x=\lambda\\y=-5-5\lambda\\z=-9-7\lambda\end{cases}$, y estudiamos la posición relativa de l_1 y l_2: $ran(\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2},\overrightarrow{P_1P_2})=3\rightarrow l_1$ y l_2 se cruzan.

Sea $\vec{v}(a,b,c)$ el vector director de la recta buscada, r, que pasa por P y corta a l_1 y l_2. Este vector debe cumplir:

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\1 & -5 & -7\\1 & 5 & 8\end{vmatrix}=0\rightarrow -a-3b+2c=0 \text{ y } \begin{vmatrix}a & b & c\\1 & 1 & 1\\-2 & 0 & -2\end{vmatrix}=0\rightarrow -a-c=0$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases}-a-3b+2c=0\\a-c=0\end{cases}$ obtenemos infinitas soluciones, que son los vectores directores de $r:\left(\mu,\frac{1}{3}\mu,\mu\right)$

Tomamos uno cualquiera de ellos y, con el punto P, escribimos las ecuaciones paramétricas de $r:\begin{cases}x=1+3\lambda\\y=\lambda\\z=-1+3\lambda\end{cases}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Como en los ejercicios anteriores, introduciremos los datos en la matriz determinante y pulsamos el botón igual con ambas matrices:

Figura 22.

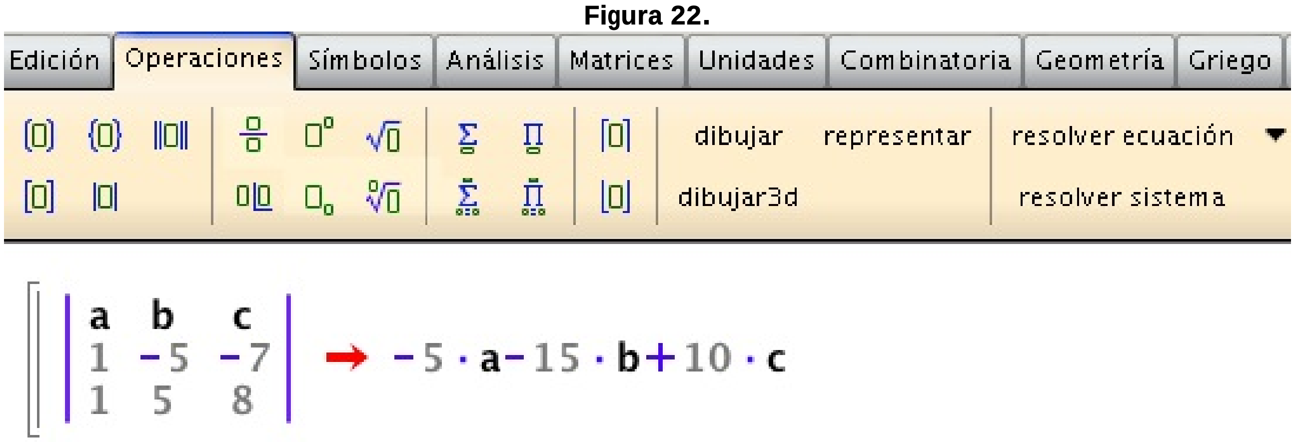
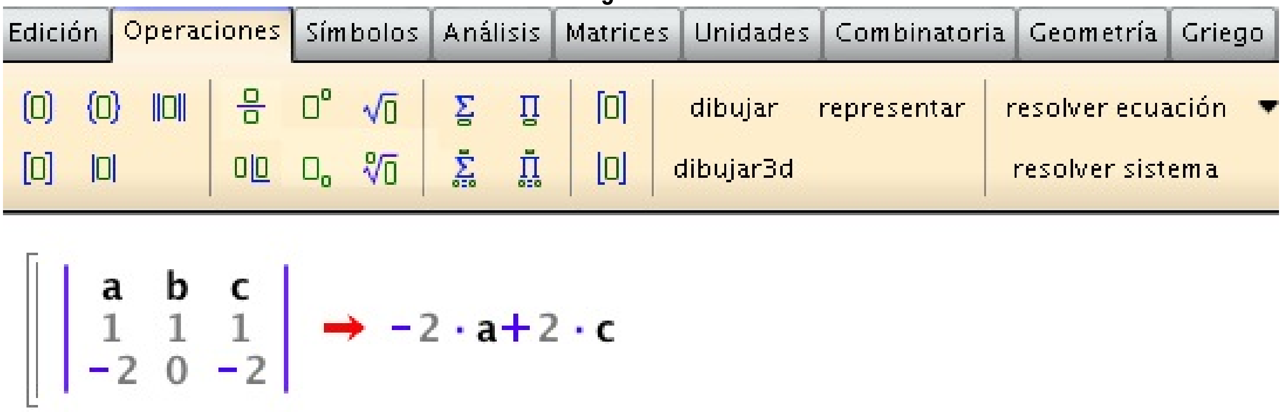
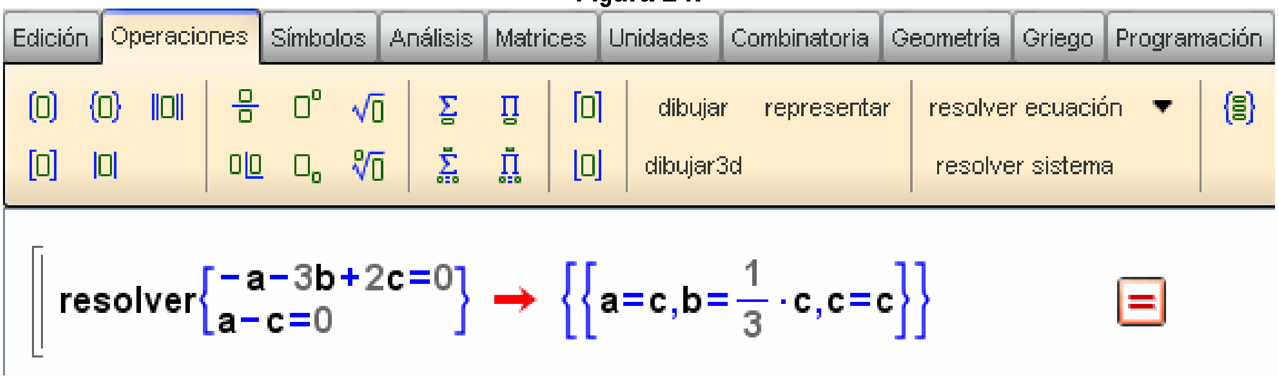


Figura 23.



2. Por último, resolvemos el sistema de ecuaciones como en otros ejercicios anteriores:

Figura 24.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

Otra forma de resolver el problema.

La recta r esta determinada por los siguientes planos:

α : Contiene a la recta l_1 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$

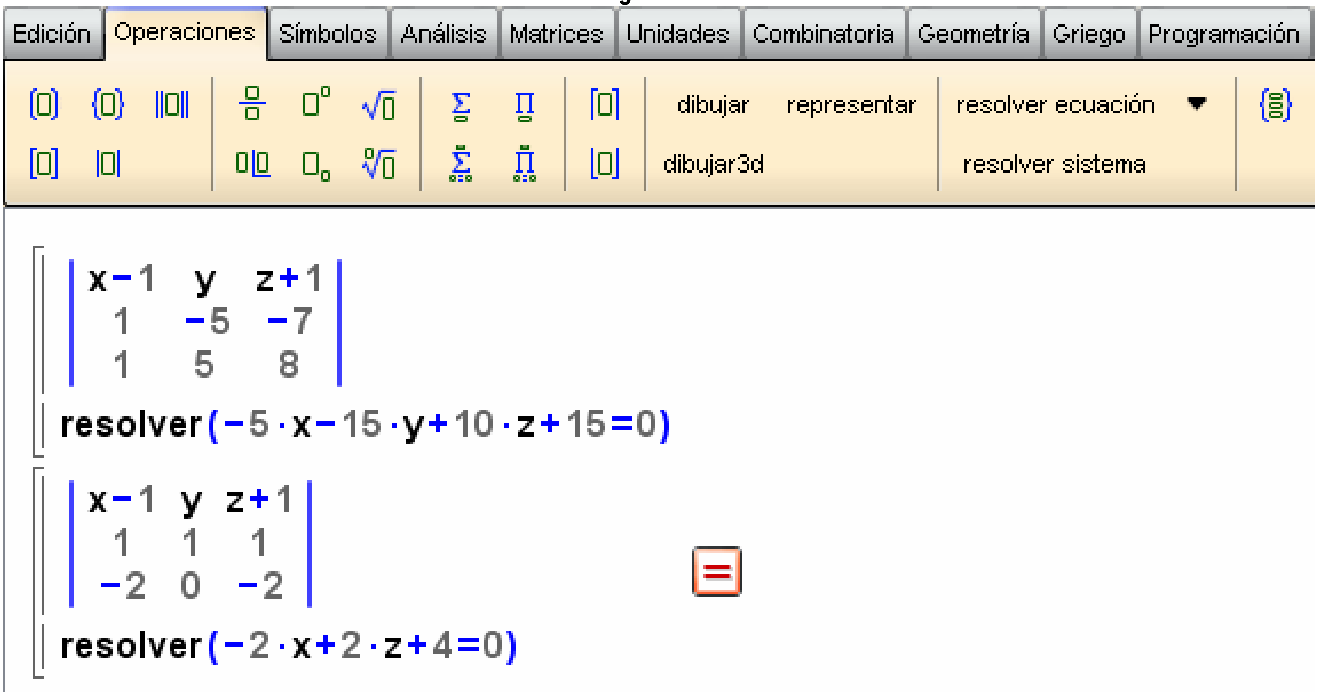
β : contiene a la recta l_2 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Así: $r: \begin{cases} x+3y-2z-3=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. La otra manera de resolver este ejercicio es calcular los determinantes e igualar el resultado a 0:

Figura 25.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS