TEMA 8 Límite de Funciones. Continuidad

1. Operaciones con límites.

Los límites de las sucesiones a_n, b_n, c_n, d_n ***y*** e_n ***son los indicados en la tabla siguiente:***

a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
-2	$+\infty$	0	$1/2$	$-\infty$

Di cual es el límite de:

a) $\lim(a_n + b_n)$ *c)* $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ *e)* $\lim\left(\dfrac{b_n}{c_n}\right)$ *g)* $\lim(a_n \cdot b_n \cdot e_n)$

b) $\lim(d_n \cdot e_n)$ *d)* $\lim(d_n)^{b_n}$ *f)* $\lim(b_n)^{e_n}$

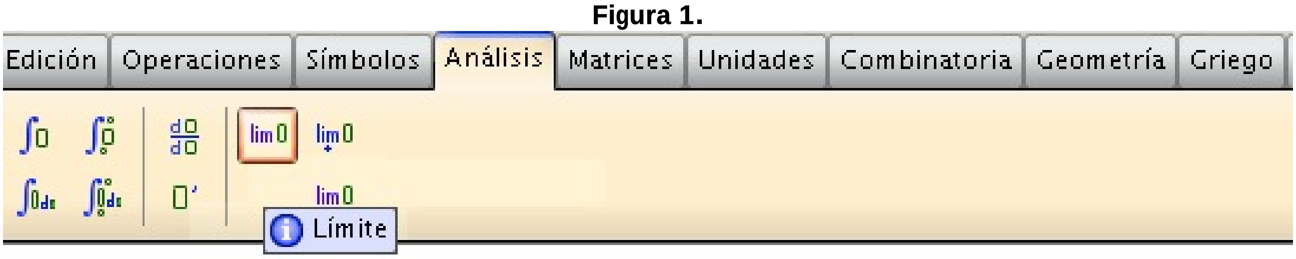
a) $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = -2 + \infty = +\infty$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En primer lugar, veremos cómo plantear un límite:

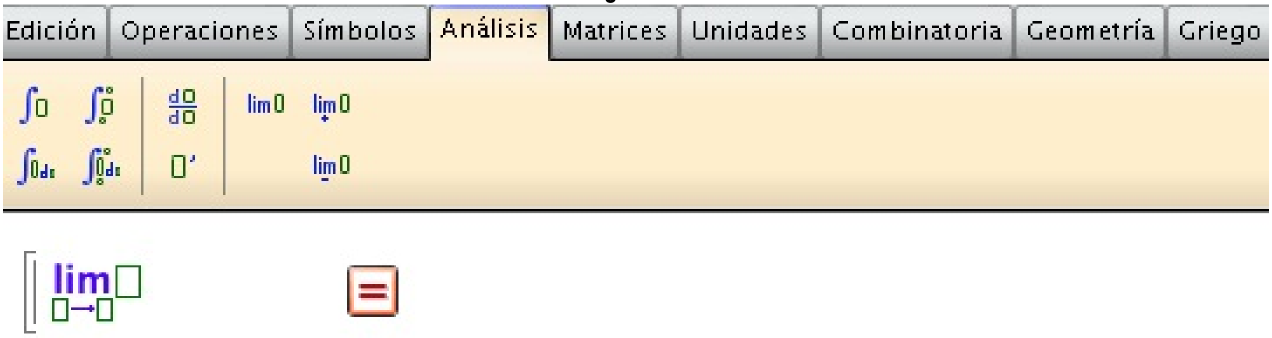
   1. Pinchamos en la pestaña Análisis, y después pinchamos en el botón para resolver un límite:

Figura 1.



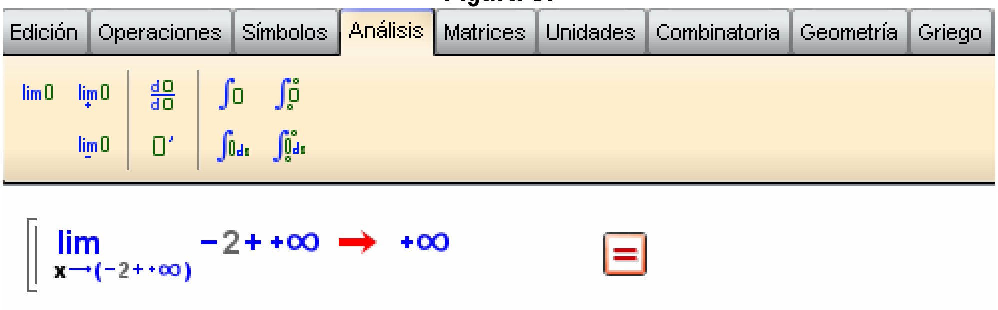
   2. Cuando pinchamos en este, obtendremos:

Figura 2.



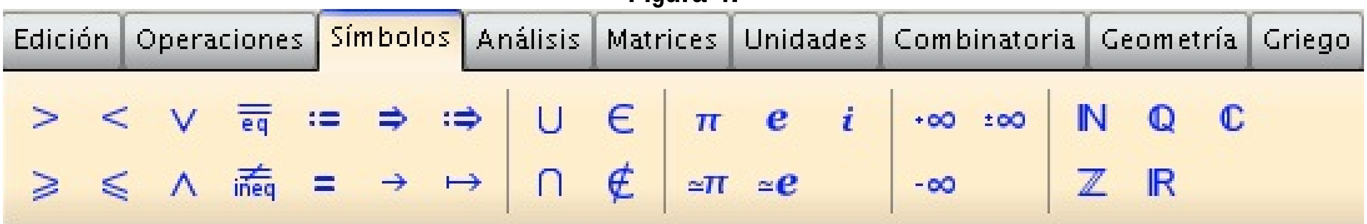
2. Una vez tenemos el límite planteado, lo rellenamos, y pulsamos igual, obteniendo nuestro resultado. Sin embargo, para no confundir las órdenes, escribiremos a lo que tiende x entre paréntesis:

Figura 3.



**Para escribir algún carácter especial, sólo tenemos que ir a la pestaña Símbolos y pulsar sobre el que queremos insertar:*

Figura 4.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

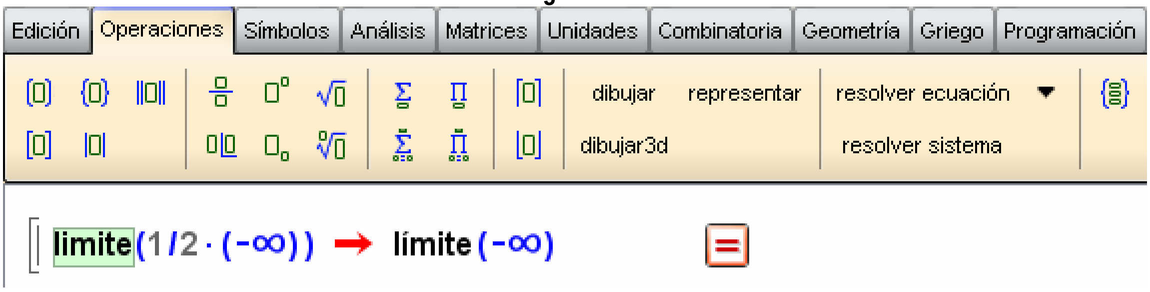
WIRIS

b) $\lim(d_n \cdot e_n) = \lim d_n \cdot \lim e_n = \frac{1}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. En este caso, escribiremos 'limite' y nuestros datos para obtener el resultado, ya que si lo resolvemos como en los ejercicios anteriores, Wiris no logra reconocer la orden:

Figura 5.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

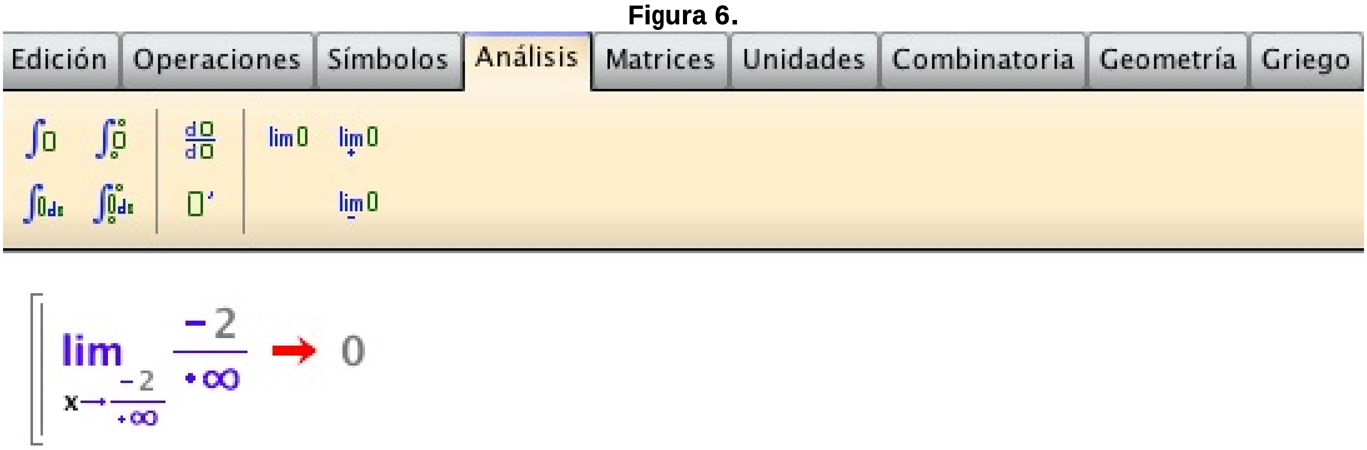
WIRIS

c) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{-2}{+\infty}=0$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Dentro de la pestaña 'Análisis', pinchamos en límite, lo rellenamos y obtenemos el resultado pulsando el botón igual:

Figura 6.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

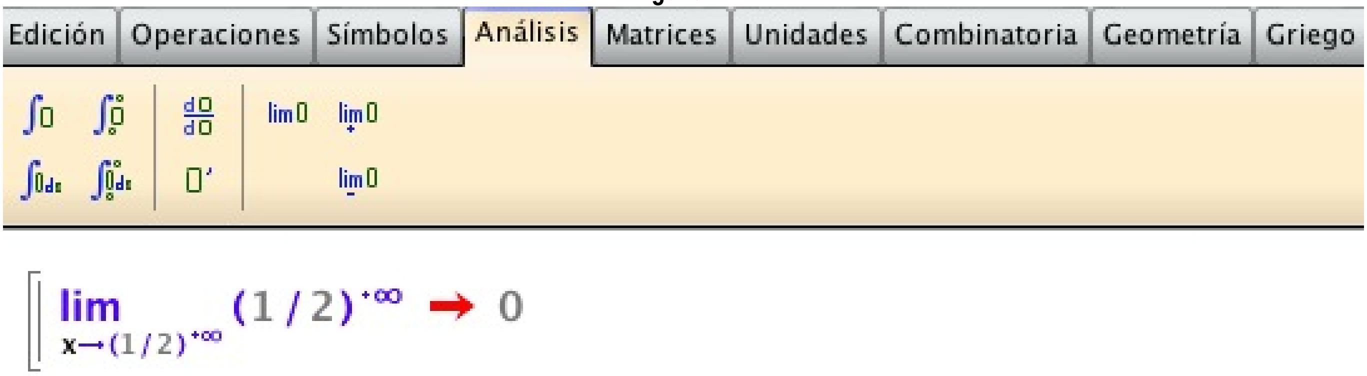
WIRIS

d) $\lim(d_n)^{b_n}=(\lim d_n)^{\lim b_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este límite, sólo tenemos que pulsar en el botón de límite, rellenarlo y obtener el resultado:

Figura 7.



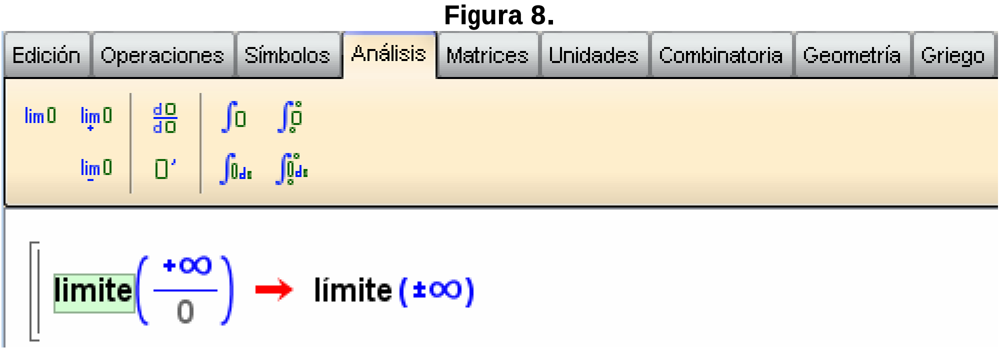
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

$$\text{e) } \lim\left(\frac{b_n}{c_n}\right) = \frac{\lim b_n}{\lim c_n} = \frac{+\infty}{0} = \pm\infty \ \ (\text{Puede ser } +\infty \text{ o } -\infty)$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Igual que en el apartado anterior, planteamos el límite, pulsamos igual y obtenemos el resultado:

Figura 8.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

$$\text{f) } \lim(b_n)^{e_n} = (\lim b_n)^{\lim e_n} = \left(\frac{1}{+\infty^{+\infty}}\right) = 0$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Resolveremos este apartado como los anteriores, planteando el límite y pulsando igual para resolverlo:

Figura 9.

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

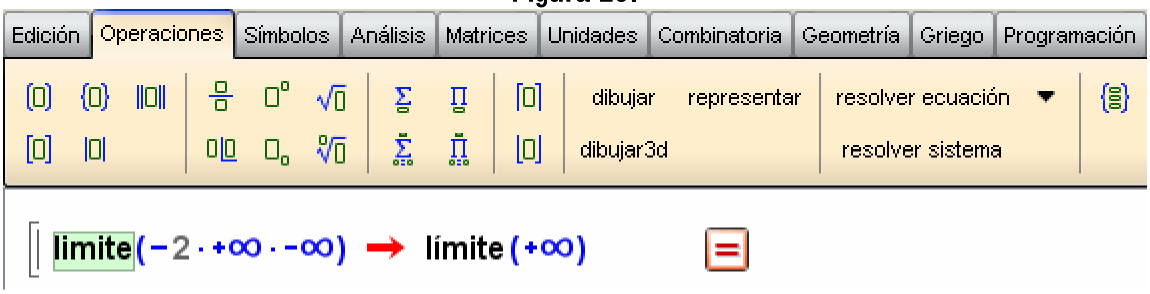
WIRIS

g) $\lim(a_n \cdot b_n \cdot e_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n \cdot \lim e_n = -2 \cdot (+\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este último apartado escribiremos la palabra 'límite' como en las figuras 5 y 8:

Figura 10.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

2. Definición de límite.

Explica el significado de estas dos expresiones:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$$

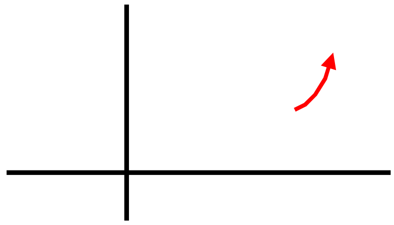
$$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$$

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=+\infty$$

Podemos conseguir que el valor de $\frac{x^2-1}{x}$ sea tan grande como queramos sin mas que tomar x tan grande como sea necesario.

Con más precisión: dado un número k, tan grande como queramos, podemos encontrar un número **h**, tan grande como sea necesario tal que x > h, entonces:

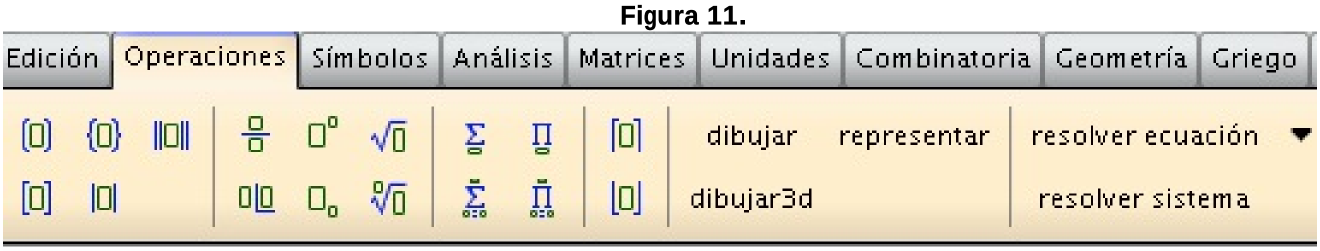
$$\frac{x^2-1}{x}>k$$

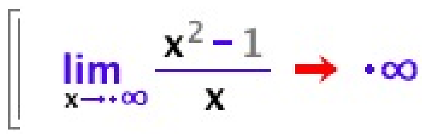


Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Planteamos el límite como en el ejercicio anterior, pulsamos igual y obtenemos el resultado:

Figura 11.





Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

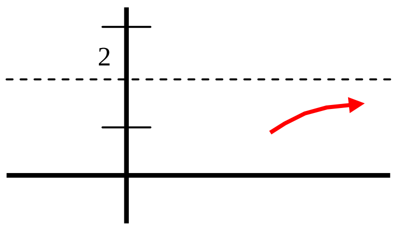
WIRIS

$$b)\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2$$

Podemos conseguir que $\frac{2x-1}{x}$ sea tan próximo a 2 como queramos dando a x valores suficientemente grandes.

Con mas precisión: dado $\in>0,$ podemos encontrar un número h tal que si x > h, entonces:

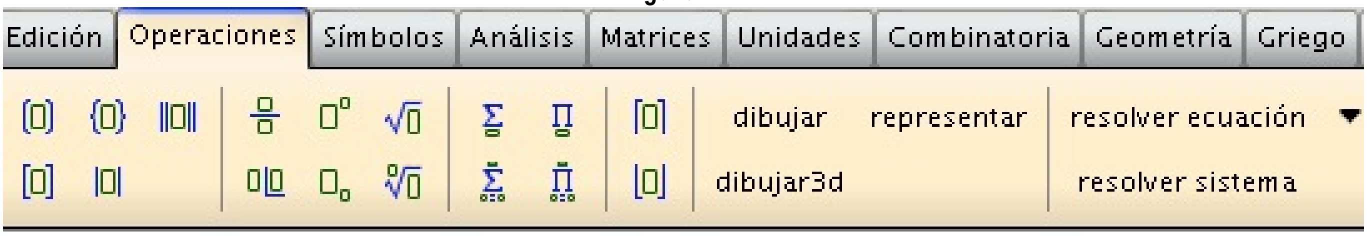
$$\left|\frac{2x-1}{x}-2\right|<\in$$



Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este apartado lo resolveremos de la misma manera que el anterior, pinchamos en la pestaña Análisis, luego en el icono de límite, rellenamos con los datos que tenemos y pulsamos igual para obtener el límite correspondiente:

Figura 12.



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x} \rightarrow 2$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

3. Comparación de infinitos.

Comparando los órdenes de infinito, asigna límite a estas expresiones:

$a)\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{10^{x^2}-5}$ $\quad b)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5-1}}{10^{x^2}-5}$ $\quad c)\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^3+1)}{10^{x^2}-5}$ $\quad d)\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{\log(x^3+1)}$

$e)\lim_{x\to\infty}(2^x-\sqrt{x^5-1})$ $\quad f)\lim_{x\to\infty}(10x^2-\sqrt{x^5-1})$ $\quad g)\lim_{x\to\infty}\left[\log(x^3)-10x^2\right]$

Resolvemos las actividades propuestas:

$a)\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{10^{x^2}-5}$ Porque la función exponencial es un infinito de orden superior a cualquier potencia.

$b)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5-1}}{10^{x^2}-5}$ Porque el exponente del numerador es mayor que el del denominador.

$c)\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^3+1)}{10^{x^2}-5}$ Porque cualquier potencia es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica.

$d)\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{\log(x^3+1)}$ Porque toda función exponencial es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica.

$e)\lim_{x\to\infty}(2^x - \sqrt{x^5 - 1})$ Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

$f)\lim_{x\to\infty}(10x^2 - \sqrt{x^5 - 1})$ Porque el minuendo es de grado 2 y el sustraendo de grado 2 / 5.

$g)\lim_{x\to\infty}\left[\log(x^3) - 10x^2\right]$ Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

4. Límite de una potencia.

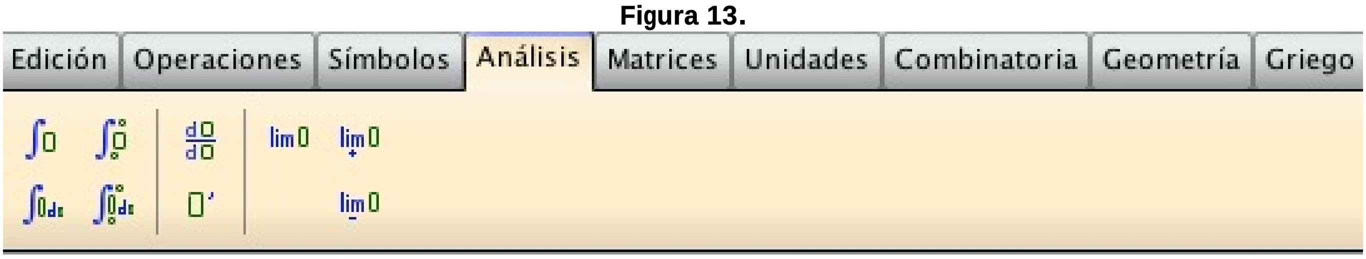
Calcula los siguientes límites: $a)\lim\left(\dfrac{4n-2}{3n}\right)^{2n-1}$ $b)\lim_{x\to+\infty}(\log x)^{1-3x}$ $c)\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

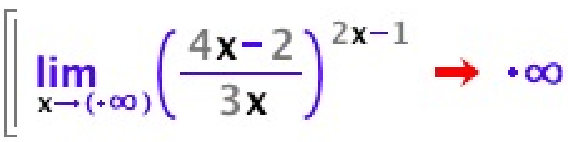
$$a)\lim\left(\frac{4n-2}{3n}\right)^{2n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Dentro de la pestaña Análisis, pinchamos en el icono de límite, y luego lo rellenamos con nuestros datos. Debemos recordar que para insertar fracciones, debemos ir a la pestaña Operaciones y pulsar su correspondiente icono. Cuando tengamos el límite con nuestros datos, pulsamos el botón igual y obtenemos el resultado:

Figura 13.





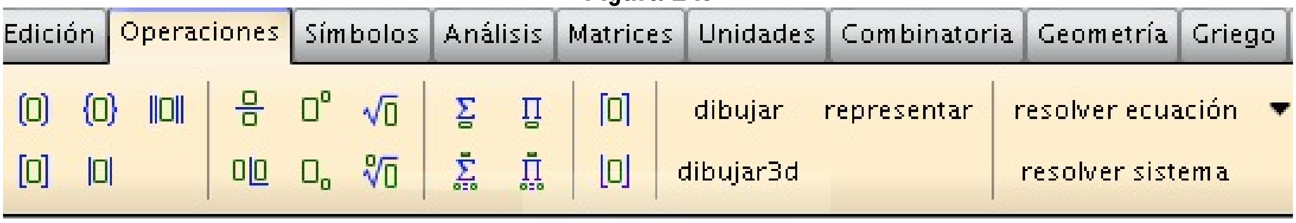
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

$$b)\lim_{x\to+\infty}(\log x)^{1-3x} = +\infty^{-\infty} = 0$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este apartado lo resolveremos de la misma manera que el anterior, pinchamos en la pestaña Análisis, luego en el icono de límite, rellenamos con los datos que tenemos y pulsamos igual para obtener el límite correspondiente:

Figura 14.



$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log(x)^{1-3x}\right) \rightarrow 0$$

**Para escribir un logaritmo, debemos escribir log y lo que queremos calcular entre paréntesis.*

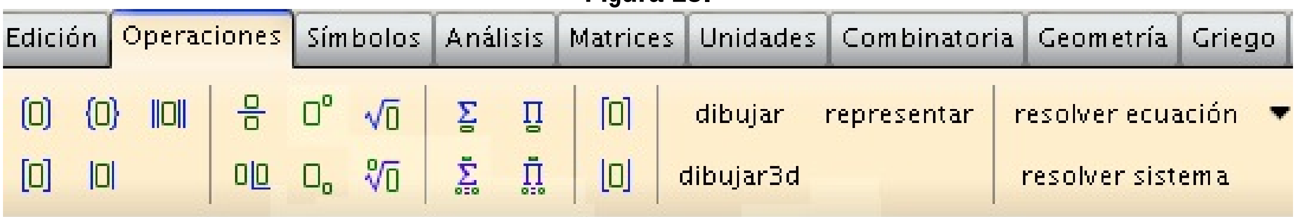
Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

$$c)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}} = 1^{+\infty} \qquad \text{(Indeterminación)} \qquad c)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)\cdot\frac{x-1}{2}} = e^{-1/2}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este apartado lo resolveremos como los anteriores. Debemos tener cuidado, de escribir bien el límite, teniendo en cuenta las fracciones y potencias.

Figura 15.



$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{e}}{e}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

5. 0/0 con radicales.

Calcula: $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{0}{0}$. Esta indeterminación se resuelve simplificando la función. Para ello, multiplicando numerador y denominador por

$\sqrt{x+1}+2$ y por $\sqrt{x+6}+3$.

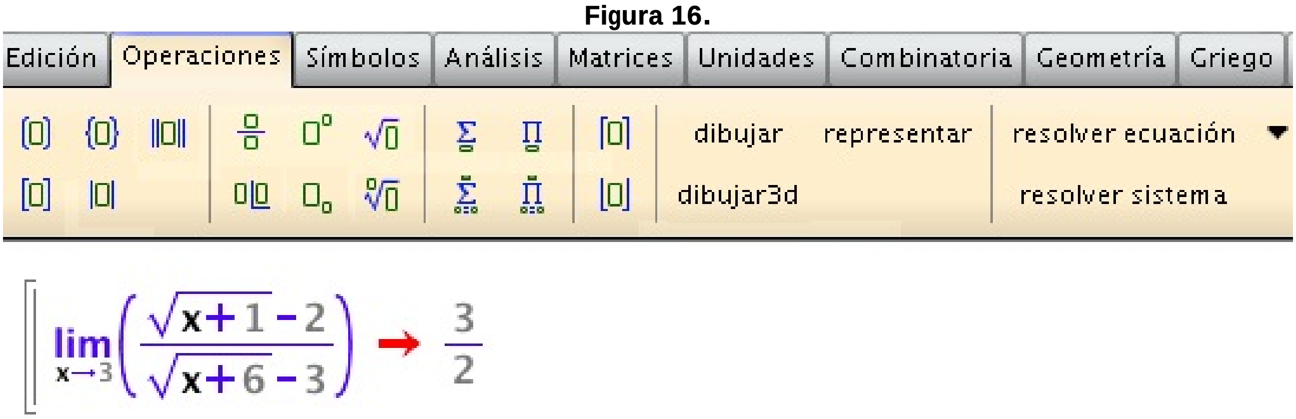
$$\frac{(\sqrt{x+1}-2)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x-3}{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este ejercicio, sólo tenemos que escribir el límite como en ejercicios anteriores, y pulsar el botón igual:

Figura 16.



**Recordamos que para insertar raíces, nos tenemos que situar en la pestaña Operaciones y después pinchamos sobre su icono.*

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

6. Función continua.

Estudia la continuidad de esta función según los valores de a:
$$f(x)=\begin{cases} 2x+a, & x\le 1 \\ x^2-ax+2, & x>1 \end{cases}$$

La función es continua en $x \neq 1$ cualquiera que sea a, porque esta formada por dos funciones polinómicas. Estudiémosla en el punto de abcisa 1:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2\cdot 1 + a = 2+a$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1^2 - a\cdot 1 + 2 = 3-a$ Para que F tenga límite en x = 1, ha de ser:

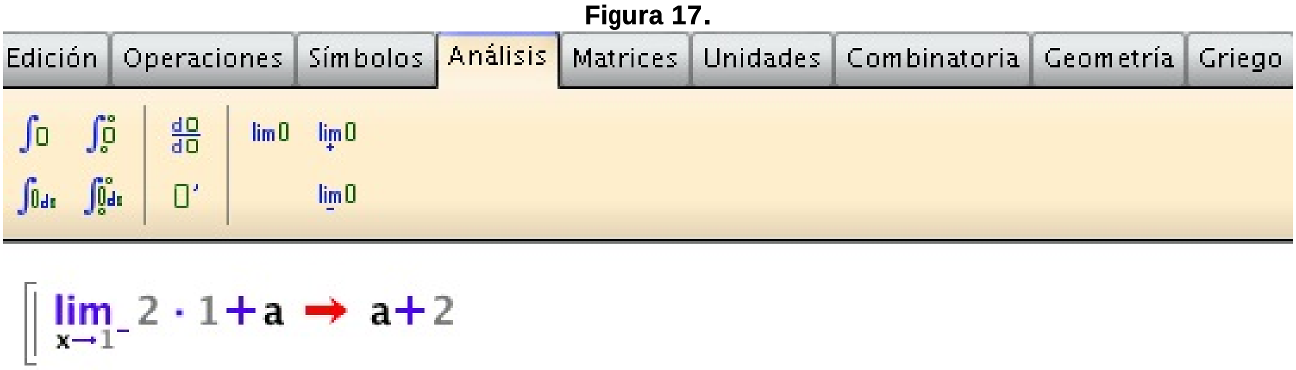
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \to 2+a = 3-a \to a = \dfrac{1}{2}$ Por tanto:

- Si $a=\dfrac{1}{2}$, existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{5}{2}$, y este límite coincide con $f(1)=\dfrac{5}{2}$, la función es continua.
- Si $a \neq \dfrac{1}{2}$, no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. La función es discontinua, y tendrá un salto finito en x = 1.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

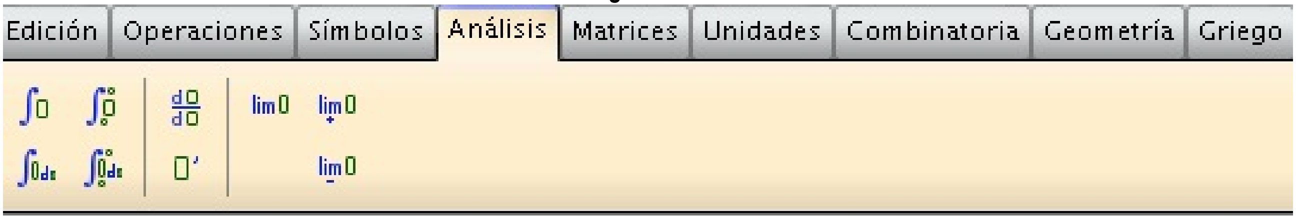
1. En primer lugar, demos calcular el límite por la izquierda de 1. Para ello, dentro de la pestaña análisis, pinchamos en el icono de límite por la izquierda, y lo rellenamos como hemos hecho en ejercicios anteriores.

Figura 17.



2. Ahora debemos hacer lo mismo, pero con el límite por la derecha de 1. Para insertarlo pinchamos en el icono que está encima del límite por la izquierda:

Figura 18.

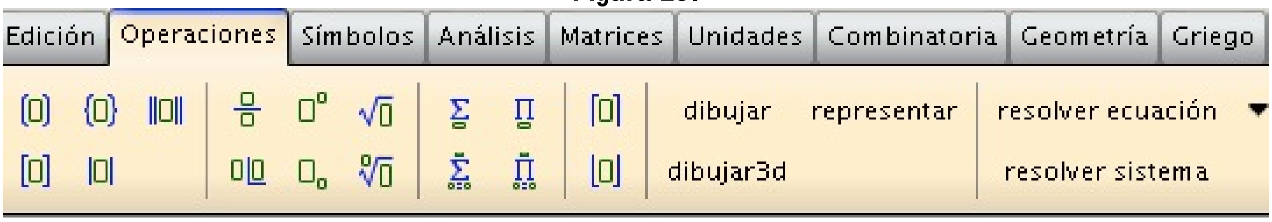


$$\lim_{x\to 1^-} 2\cdot 1+a \;\rightarrow\; a+2$$

$$\lim_{x\to 1^+} 1^2-a\cdot 1+2 \;\rightarrow\; -a+3$$

3. Por último, igualamos ambos resultados, despejando a. Para ello, vamos a la pestaña Operaciones, y pulsamos el botón de Resolver ecuación, rellenamos ambos términos y pulsamos igual:

Figura 19.



$$\lim_{x\to 1^-} 2\cdot 1+a \;\rightarrow\; a+2$$

$$\lim_{x\to 1^+} 1^2-a\cdot 1+2 \;\rightarrow\; -a+3$$

$$\text{resolver}(a+2=-a+3) \;\rightarrow\; \left[\left\{a=\frac{1}{2}\right\}\right]$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

7. Discontinuidades.

Estudia la continuidad de la función siguiente: $y=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$

Hallamos las raíces del denominador. Son x = -1 y x = 2. En estos puntos no está definida la función. Estudiemos el límite de la función en esos puntos:

$$\lim_{x \to -1} = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \pm\infty \quad \begin{cases} \text{Si} & x \to -1^-, y \to -\infty \\ \text{Si} & x \to -1^+, y \to +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{5}{3}$$

La función es discontinua en x = -1 y en x = 2 porque no está definida en esos puntos.

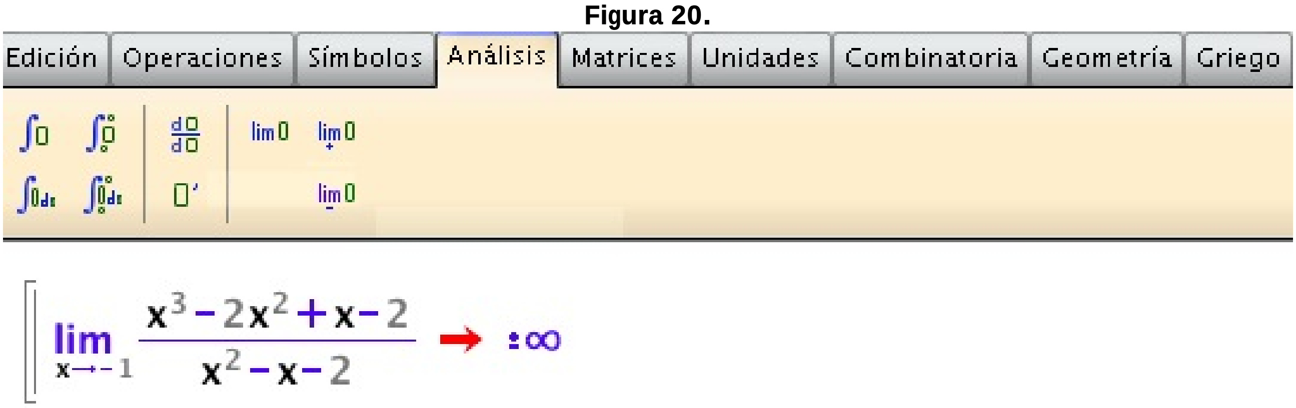
En x = -1 tiene una discontinuidad infinita y, por tanto, una asíntota vertical.

En x = 2 tiene una discontinuidad evitable porque existe límite finito en ese punto.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

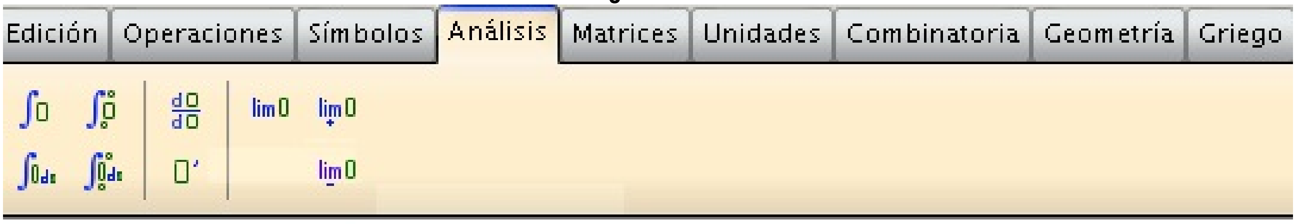
1. En primer lugar, resolvemos el primer límite (cuando x tiende a -1):

Figura 20.



2. Ahora debemos saber a qué tiende la ecuación en cada lado de -1. Para ello, calculamos el límite por la izquierda, y el límite por la derecha:

Figura 21.



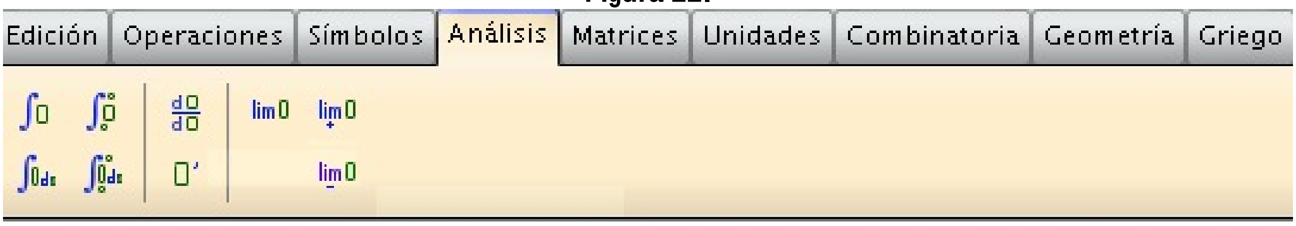
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow +\infty$$

3. Por último, calculamos el segundo límite (cuando x tiende a 2):

Figura 22.



$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} \rightarrow \frac{5}{3}$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

8. Continuidad en un punto.

Calcula a y b para que sea continua la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2+ax. & x\le -1 \\ b, & -1<x<3 \\ 2x+4, & x\ge 3 \end{cases}$

F es continua en $x\neq -1$ y $x\neq 3$ cualesquiera que sean los valores de a y b, por estar definida por funciones continuas. Estudiemos los límites en x = -1 y x = 3.

- Cálculo del $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+ax)=1-a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} b=b \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x=-1$, debe ser $1-a=b.$

- Cálculo del $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} b=b \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x+4=10 \end{array}\right\}$$

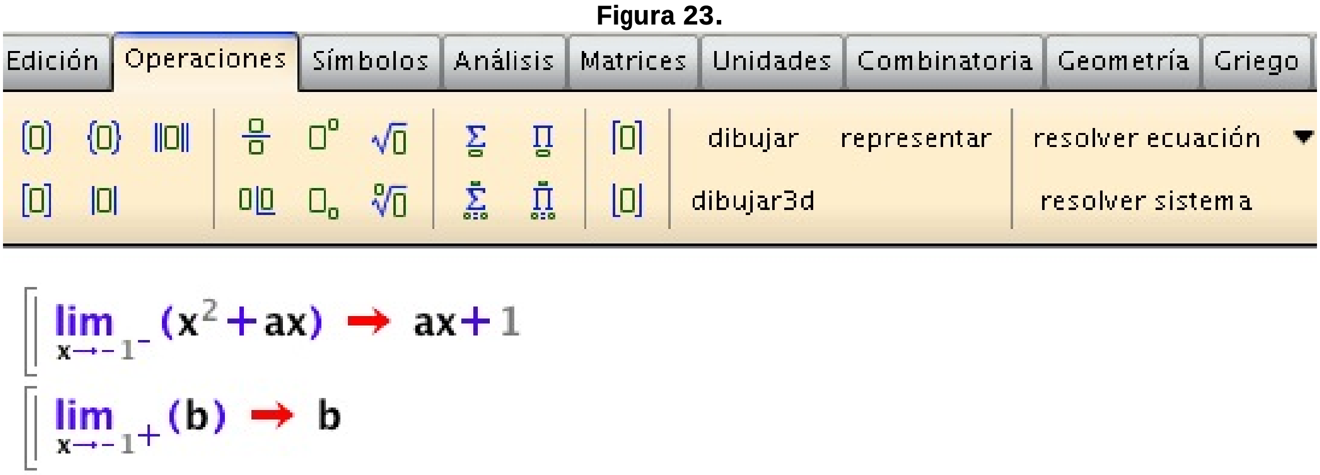
Para que sea continua en $x=3$, debe ser $b=10$

Llevando el valor $b=10$ a la igualdad anterior: $1-a=10\to a=-9.$ Si $a=-9$ y $b=10$, f es continua en $x=-1$ y en $x=3$, porque $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=10$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=10.$

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

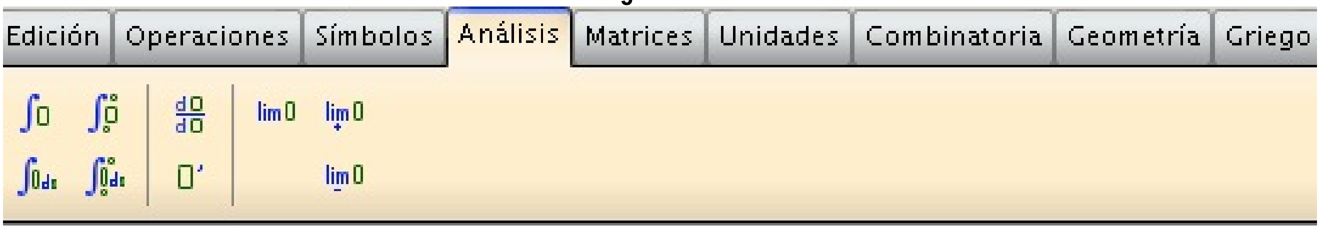
1. Lo primero que haremos es calcular el límite cuando x tiende a -1 por ambos lados:

Figura 23.



2. Después, calculamos el límite cuando x tiende a 3 por ambos lados:

Figura 24.



$$\lim_{x\to 3^-}(b) \rightarrow b$$

$$\lim_{x\to 3^+}(2x+4) \rightarrow 10$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

9. Teorema de Bolzano.

a) Prueba que la función: $y = x^4 - 2x^3 - 5$ ***corta al eje OX en el intervalo (-2, -1).***

b) Busca otro intervalo en el que exista una solución de la ecuación $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$ ***y aproxima su valor hasta las décimas.***

a) La función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5$ es continua en $\Re$ por ser polinómica, por tanto, será continua en el intervalo $[-2,-1]$.

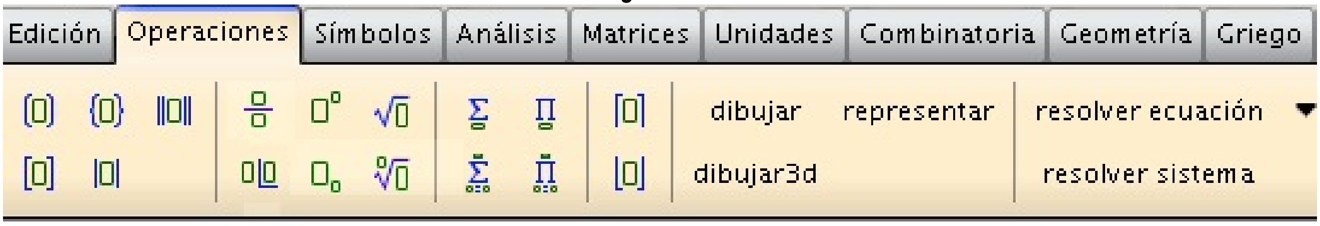
Además, $\left.\begin{array}{r} f(-2) = 16 + 16 - 5 > 0 \\ f(-1) = 1 + 2 - 5 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Signo de $f(-2) \neq$ signo de $f(-1)$.

Así hemos probado que f verifica las hipótesis del teorema de Bolzano y podemos asegurar que existe un punto $c \in (-2,-1)$, tal que $f(c) = c^4 - 2c^2 - 5 = 0$. En ese punto c, la función corta al eje OX.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Para resolver este ejercicio, lo primero que debemos hacer es escribir la función, y a continuación, indicar, donde debería estar la x, el número que queremos insertar en dicha función. De esta forma, Wiris sustituye directamente la variable por el número que le hemos indicado.

Figura 25.



$$
\begin{aligned}
&f(x)=x^4-2x^3-5\\
&f(-2) \rightarrow 27\\
&f(-1) \rightarrow -2
\end{aligned}
$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

b) Tanteando: $f(0)=-5$; $f(1)=-6$; $f(2)=-5$; $f(3)=22$; como f es continua en $[2,3]$ y signo de $f(2) \neq$ signo de $f(3)$, el teorema de Bolzano nos asegura que existe un valor $c \in (2,3)$ tal que $f(c)=0$.

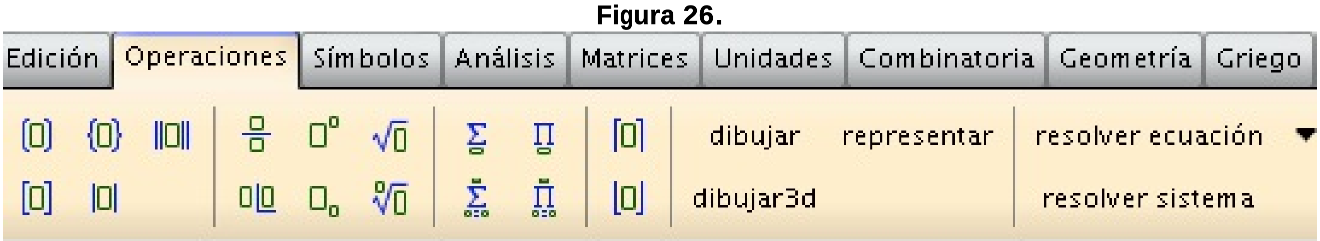
Para aproximar su valor, tanteamos con valores del intervalo (2, 3):

$f(2{,}3)=-1{,}35$; $f(2{,}4)=0{,}5296$. Por tanto, 2, 4 es un valor que se aproxima en menos de una décima a una solución de la ecuación dada.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. De la misma forma que en el apartado anterior, vamos tanteando con distintos números, para comprobar que el valor se encuentra entre 2 y 3:

Figura 26.



$$
\begin{aligned}
&f(x)=x^4-2x^3-5 \rightarrow x \mapsto x^4-2\cdot x^3-5\\
&f(0) \rightarrow -5\\
&f(1) \rightarrow -6\\
&f(2) \rightarrow -5\\
&f(3) \rightarrow 22\\
&f(2.3) \rightarrow -1.3499\\
&f(2.4) \rightarrow 0.5296
\end{aligned}
$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

10. Teorema de Bolzano.

Prueba que las gráficas de las funciones: $f(x) = sen(x)$ ***y*** $g(x) = \frac{1}{x}$ ***se cortan en algún punto y localízalo aproximadamente.***

Tanteando, encontramos que:

$$\left.\begin{array}{r} f(1) \approx 0{,}84 \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(1) < g(1) \rightarrow f(1) - g(1) < (0) \qquad \left.\begin{array}{r} f(2) \approx 0{,}909 \\ g(1) = 0.5 \end{array}\right\} \rightarrow f(2) > g(2) \rightarrow f(2) - g(2) > (0)$$

Como f y g son continuas en el intervalo $[1,2]$, también lo es la función $f - g$. además, $f - g$ cumple:

Signo de $[f(1) - g(1)] \neq$ signo de $[f(2) - g(2)]$.

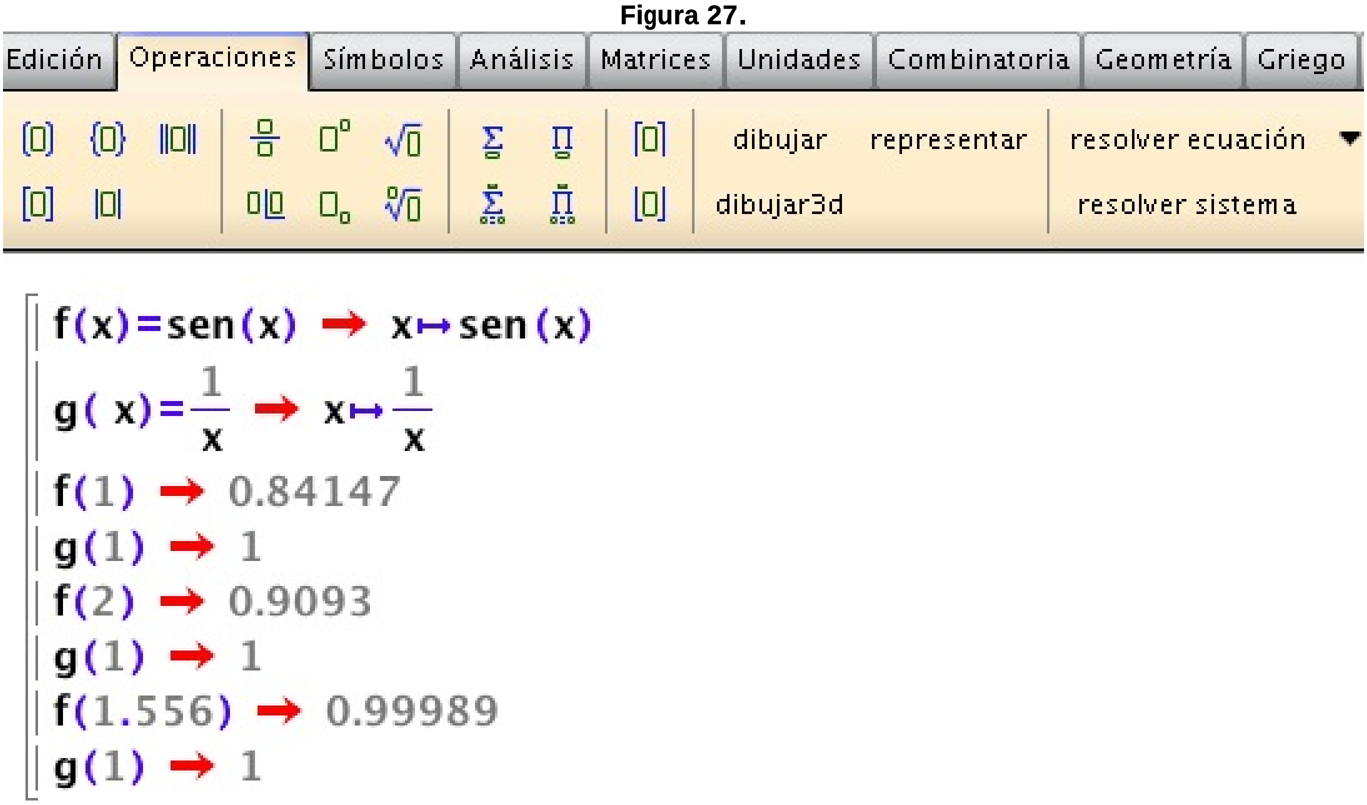
Según el teorema de Bolzano, existirá un punto c en el intervalo (1, 2). Tal que $f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$.

Luego f y g se cortan en algún punto comprendido entre 1 y 2.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. Este ejercicio, lo resolveremos igual que el anterior. Escribiremos ambas funciones, y luego, iremos probando con distintos números hasta obtener el punto en el que se cortan:

Figura 27.



Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS

11. Valor intermedio.

Dada la función $f(x)=x^3+x-5$ ***prueba que existe un valor*** $c\in(1,3)$, tal que $f(c)=20$.

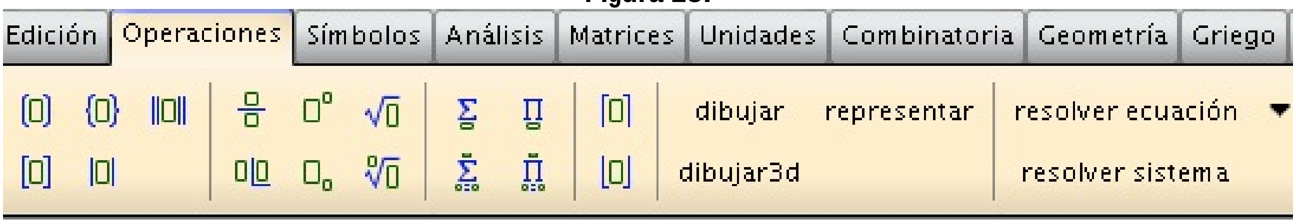
f , por ser una función polinómica, es continua en todo $\Re$. Además, $f(1)=-3$ y $f(3)=25: -3<20<25$.

Según el teorema de los valores intermedios, como 20 está comprendido entre $f(1)$ y $f(3)$ existirá un número $c\in(1,3)$ tal que $f(c)=20$.

Ahora resolveremos el problema con Wiris:

1. De nuevo este ejercicio lo resolveremos escribiendo la función y calculando el valor que sustituyéndolo en esta, nos devuelve 20

Figura 28.



$$f(x)=x^3+x-5 \rightarrow x\mapsto x^3+x-5$$
$$f(1) \rightarrow -3$$
$$f(3) \rightarrow 25$$
$$f(2.810066) \rightarrow 20.$$

Enlace con el ejercicio resuelto en la web:

WIRIS