Imagen de centralasian

¿Podemos medir el mundo?

INDICE DEL TEMA 1: NÚMEROS REALES

1. Necisidad de los numeros reales

www.matesymas.es
bajo licencia de creative commons

Hace mucho tiempo, cuando no existía casi nada, y los hombres se entendían a duras penas, había un hombre llamado Lorenzo que tenía un rebaño de ovejas.

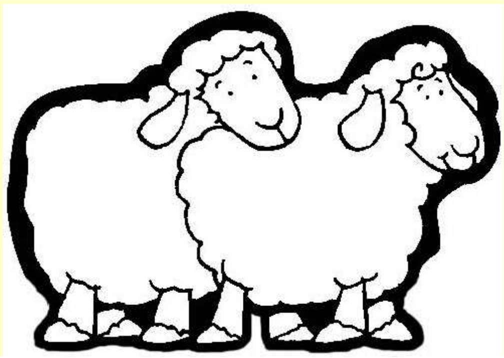
Cuando su vecino Andrés le preguntaba: ¿cuántas ovejas tienes? no sabía que responder, porque no existían los números.

Un día decidieron inventar algo para contar.

Primero tomaron una oveja, y necesitaron el 1, cogieron otra oveja y necesitaron el 2, otra oveja, y nació el 3, y así

sucesivamente, hasta que contaron las ovejas de Lorenzo.

Estos números son los **llamados naturales** , o sea, {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}.



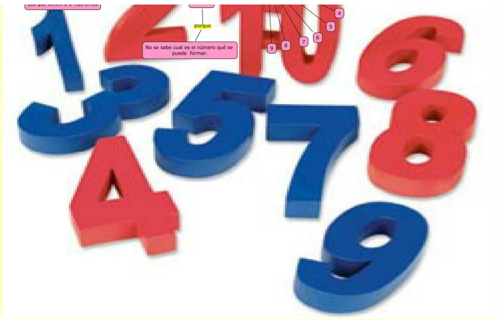
www.losidusdelvigilante.es
bajo licencia de creative commons

Importante

Los números naturales

Los números que Lorenzo utiliza se llaman **números naturales** , cuya principal utilidad es la contar. El conjunto de los números naturales se escribe con una $\mathbb{N}$.

Así $\mathbb{N}$ ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}



SBReadResourceServlet
http://eveliocarrizo.conectate.gob.pa

img de www.relaxrelax.com

Un día Lorenzo tuvo que guardar varias ovejas de su amigo Sebastián, que se iba unos meses a escalar el Everest. Lorenzo tenía entonces, 17 ovejas, mientras que Sebastián le traía 25 más. Evidentemente, la responsabilidad de las ovejas recaía en Lorenzo.

Al volver Sebastián, a Lorenzo solo le quedaban 16 ovejas vivas. Cómo Sebastián le había dejado 25, tuvo que darles las 16 que quedaban vivas, y además, le debía 9 más.

Cuando Lorenzo se planteó cuántas ovejas tenía, tuvo que "inventar" un nuevo número, el -9. Bueno, primero empezó por el -1, después el -2, así hasta que llegó al -9.

Así nacieron los **números negativos** . Aunque los matemáticos tardaran muchos siglos en aceptarlos como verdaderos números, ¡mira que son raros!

Importante

Los números enteros

El conjunto de los números naturales y los negativos, forman los **números enteros** , que se designan o escriben por la letra $\mathbb{Z}$, y son:

$\mathbb{Z}$ = { ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Lorenzo y Sebastián han llegado a un acuerdo para que Lorenzo le devuelva las ovejas que le debe. Pero Lorenzo no puede devolversela en un mes, así que han decidido que lo haga en tres meses, o sea, cada mes le devolverá una parte de tres, que como muy bien sabes es $\frac{1}{3}$. De nuevo, las matemáticas tienen mucho que agradecer a estos dos personajes, puesto que acaban de "inventar" los **números fraccionarios o racionales** .

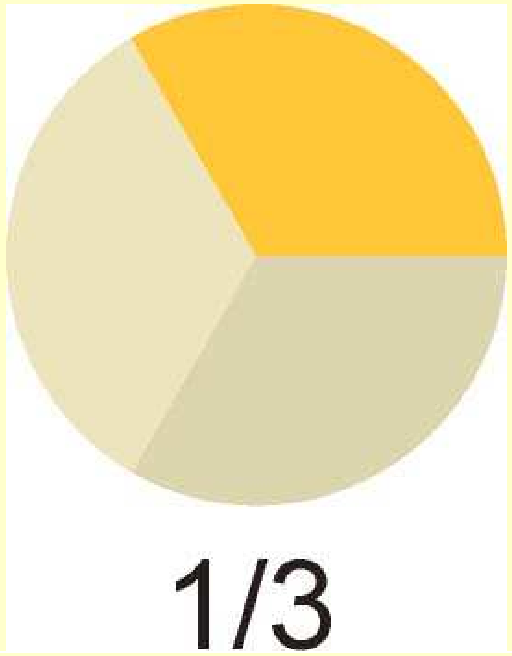


imagen de www.relaxrelax.com

Importante

Los números racionales

El conjunto que acabamos de ver es el conjunto de todos los números naturales, los enteros, y además, todas las fracciones que podemos hacer, recibe el nombre de conjuntos de los **números racionales** , y se designa por: $\mathbb{Q}$.

Y los decimales

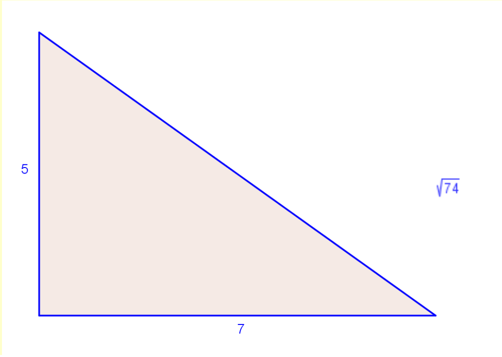
Si hacemos la división de una fracción, puede que esta sea exacta o puede que nos de decimales. En tal caso, podemos obtener tres tipos de **números decimales** .

$\frac{7}{2}=3{,}5$; al que llamaremos decimal exacto , porque tiene un número finito de decimales.

$\frac{7}{3}=2{,}33333...$; o sea, los decimales no acaban, son infinitos, pero se repiten sin cesar, esto es, siguen un periodo; éste es un decimal periódico puro

$\frac{7}{6}=1{,}16666...$; o sea, igual que antes, sólo que el periodo no empieza justo después de la coma; éste es un decimal periódico mixto

Sebastián, hombre ordenado donde los haya, quiere hacer un corral para meter sus 25



fuente propia

ovejas, una vez les haya devuelto Lorenzo las que le debe. El sitio que tiene Sebastián, para hacer el corral tiene forma de triángulo rectángulo, con un cateto de 5 metros y otro de 7 metros, pegados a una pared, y quiere saber cuantos metros de madera necesita para cerrarlo. Se acuerda de su amigo Pitágoras, y se pone manos a la obra, pero al hacer la operación, ¡zas!, aparece esto:

$$\sqrt{74}$$

que no tiene ni idea de que es, y es que acaba de "nacer" el último número que vamos a ver: el **número irracional** , o sea, es que tiene infinitas cifras decimales pero que no responden a ningún periodo. Podemos dar una aproximación de su valor, porque al tener infinitas cifras decimales no podemos escribirlas todas:

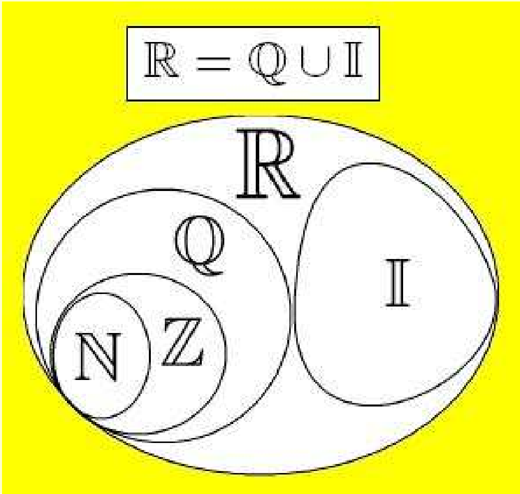
$$\sqrt{74} = 8{,}6023252670426267717294735350497$$

Importante

A los números que tienen infinitas cifras que no tienen periodo, se le llamará **números irracionales** , que se designa por la letra $\mathbb{I}$

Los números reales

Evidentemente, un número o es racional o es irracional. Pues bien, el conjunto de los racionales y los irracionales, recibe el nombre de **conjunto de los números reales** , y se designa por la letra $\mathbb{R}$



diccio-mates.blogspot.com

Ejercicio resuelto

Vamos a resolver un ejercicios importante, puesto que no debes seguir adelante si no eres capaz de diferenciar los distintos tipos de números que hemos visto en este apartado. Intenta hacer el ejercicio, y después mira la solución, el siguiente lo harás sin red.

Coloca los números de la siguiente lista en el menor conjunto que los contiene:

$$14,\ -23,\ \frac{5}{6},\ 45,\ \pi,\ \sqrt{34},\ \sqrt{16},\ \frac{8}{2},\ 43$$

Comprueba lo aprendido

Decide si son verdadero o falso las siguientes afirmaciones.

-13 es un número natural

Verdadero ○ Falso ○

$\sqrt{7}$ es un número racional

Verdadero ○ Falso ○

$\frac{12}{4}$ es un número natural, y además es un racional también

Verdadero ○ Falso ○

π es un número irracional

Verdadero ○ Falso ○

1.1. La recta real

De momento tenemos un montón de números por ahí sueltos. Veamos, tenemos los naturales, los enteros, los racionales - dependiendo del tipo de decimales, recuerda que hay tres tipos-, y por último, los irracionales; y como ya sabes, todos juntos hacen los números reales.

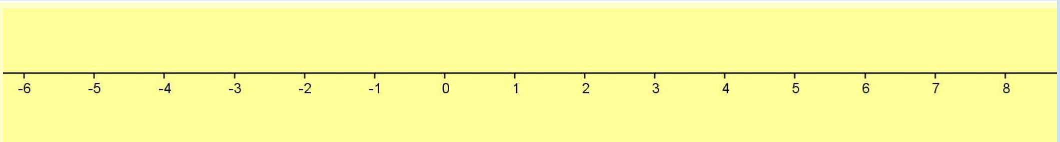
Pero eso, todos sueltos por ahí. Deberíamos buscar un sitio donde tuviesemos a todos ordenados y así si queremos echar mano de uno saber donde está, y encontrarlo fácilmente.

Bien, pues ese sitio donde tenemos a todos los números reales (naturales, enteros, racionales e irracionales) se llama **recta real** .

Importante

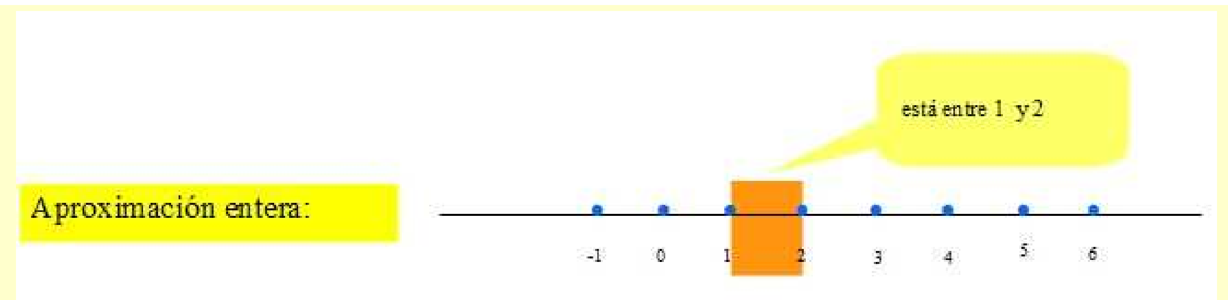
La recta real

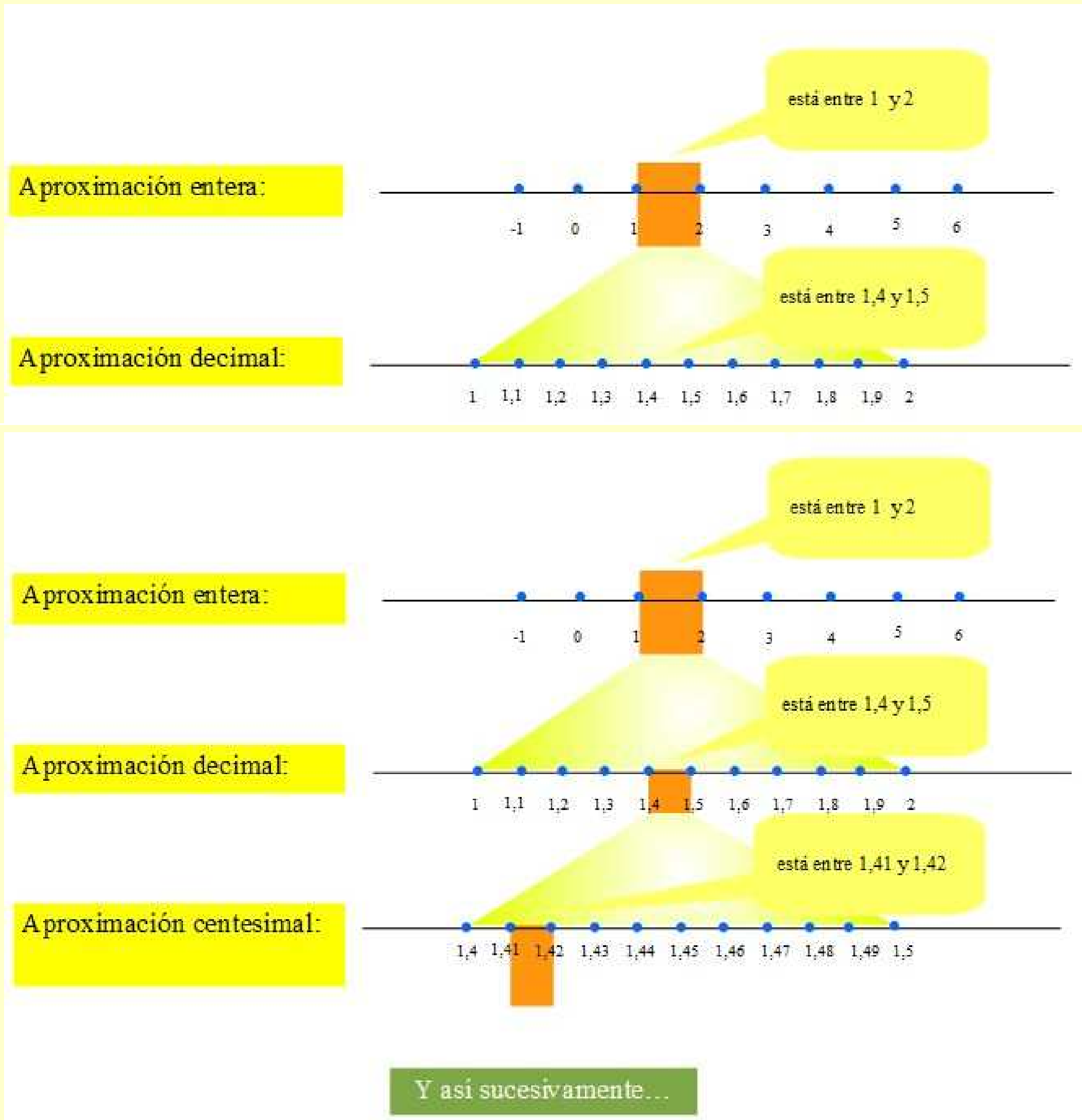
Os presento a la recta real.



fuente propia realizado con GeoGebra

Solo hemos representado a los números enteros, pero ahí dentro están todos, vamos a centrarnos en cualquier parte de la recta real y veamos que hay dentro. Por ejemplo, vamos a hacer un zoom entre los número 1 y 2, y después haremos un zoom entre 1,4 y 1,5; y posteriormente entre 1,41 y 1,2; y así sucesivamente, podríamos seguir infinitamente.



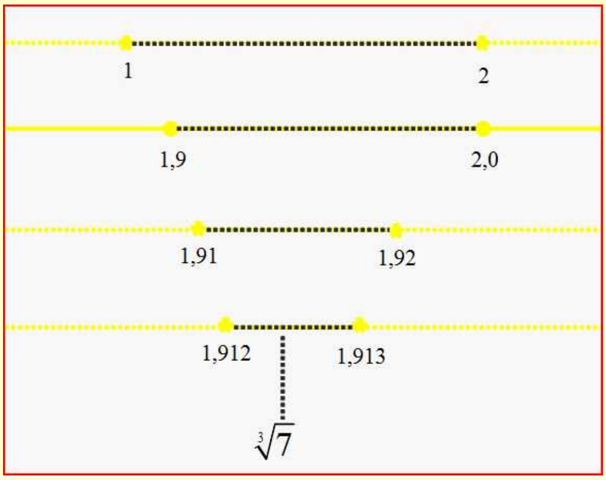


fuente propia

Igualmente que hemos situado a los decimales, podemos situar a las fracciones o bien a los números racionales.

Y cómo no, podemos situar a los números irracionales, eso si, esta vez nos cuesta mucho trabajo.

Hay un método para representar cada tipo de número, pero eso forma parte de otra historia, vamos a ver un ejemplo de representación de número irracional de forma aproximada.



fuente propia

En la imagen de arriba vamos aproximando poco a poco el valor de raíz de 7. Si aproximamos a la unidad, podemos situar su valor entre 1 y 2. Si lo aproximamos a la décima, situamos su valor entre 1,9 y 2. Si seguimos aproximando a la centésima, su valor estará entre 1,91 y 1,92. Un paso más es aproximar a la milésima, o sea, el valor estará entre 1,912 y 1,913. Este proceso, es infinito, nunca llegaríamos a obtener el resultado exacto de la raíz de 7, tan solo, una aproximación, ya que al ser un número irracional, tiene infinitos decimales.

Ejercicio resuelto

En el siguiente applet (pizarra interactiva, en la cual puedes manipular algunas cosas) puedes cambiar los números, situándolos donde tu creas que están.

Una vez hayas colocado todos los números haz click en el siguiente botón para ver la solución correcta.

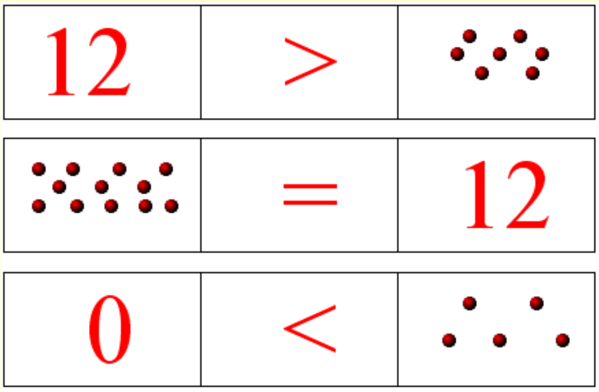
Please install Java 1.4 (or later) to use this page.

Eva está esperando el autobús para ir al trabajo, sabe que de 9:05 a 9:10 pasa el autobús nº 6. Hoy el autobús ha llegado a las 9 horas 5 minutos 4 segundos. Pero ayer, como estaba lloviendo, llegó a las 9 horas 8 minutos 3 segundos. Tanto en este ejemplo, como en muchos otros, estamos usando de forma inconsciente intervalos de números reales. En nuestro caso, Eva tiene que esperar un intervalo de 5 a 10 minutos.

Para representar los intervalos se usan paréntesis ( ) y corchetes [ ]. Así, la expresión matemática de este intervalo será [5, 10]. Y si designamos por x la hora de llegada del autobús, lo podemos expresar en forma de desigualdad: $5 \leq x \leq 10$.

.

www.geekologie.com



www.todomonografias.com/images/2007/04/104420.gif.

Veamos el significado de estos símbolos:

El símbolo < se lee "menor que".

Así 2 < 5 se lee 2 menor que 5.

Si escribimos x < 5 representamos a todos los números reales "x" que son menores que 5, por ejemplo el 1, el -1, o el 2,7.

El símbolo > se lee "mayor que".

Aasí 5 > 2 se lee 5 mayor que 2.

Si escribimos x > 2, estamos representando a todos los números reales que son mayores que 2.

El símbolo $\leq$ se lee "menor o igual que", así

x $\leq$ 2 representa a todos los números reales que son menores o iguales que 2.

El símbolo $\geq$ se lee "mayor o igual que", así

x $\geq$ 2 representa a todos los números reales que son mayores o iguales a 2.

Los símbolos, $<, >, \leq, \geq$ se pueden leer en los dos sentidos, es decir, $2 < 5$ se puede leer : "dos menor que 5", o "5 mayor que 2".

La expresión $2 < x \leq 5$, indica todos los números, " x ", que son mayores que 2 y menores o iguales que 5.

Importante

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS EN LA RECTA REAL

Utilizamos los intervalos para designar tramos de la recta real. Los intervalos reales pueden ser de diferentes tipos, según los extremos se incluyan o no en el intervalo:

Intervalo abierto : (a, b) = $a < x < b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b sin incluir ni a ni b.

Intervalo cerrado : [a, b] = $a \leq x \leq b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b ambos incluidos.

Intervalos semiabiertos :[a, b) = $a \leq x < b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b in incluido a pero no b.

(a, b] = $a < x \leq b$. Son todos los números reales comprendidos entre a y b incluido b pero no a.

Semirrectas : (- ∞ , a) = $x < a$. Son todos los números reales menores que a.

(- ∞ , a] = $x \leq a$. Son todos los números reales menores o iguales que a.

(a, + ∞) = $x > a$. Son todos los números reales mayores que a.

[a, + ∞) = $x \geq a$. Son todos los números reales mayores o iguales que a.

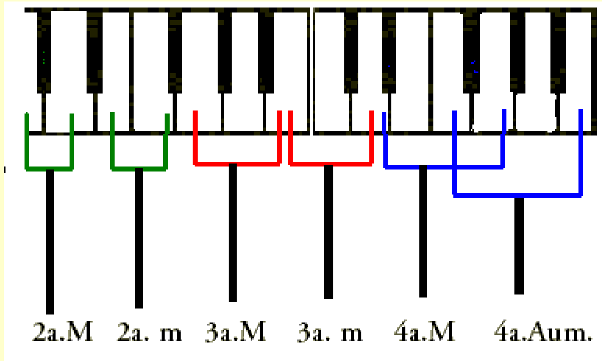
En la representación, el extremo del intervalo se rellena o deja hueco dependiendo si está o no incluido.

es la representación gráfica del intervalo (a,b]

Curiosidad

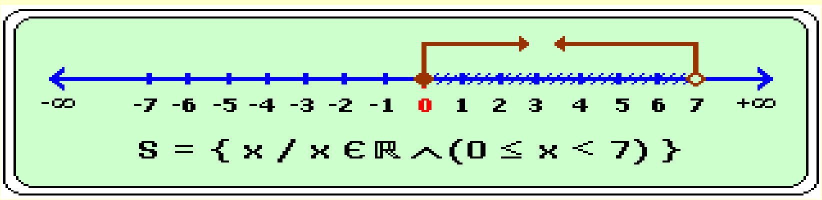
¿Sabías que en música también se utilizan los intervalos?

Pues sí, en música, la distancia entre dos sonidos se conoce como intervalo musical.



www.gratispiano.com

Ejercicio resuelto



www.bp.blogspot.com/.../ desigualdades001-03.GIF

b) [-2, 3)

c) [-2, 3]

d) (-2, 3]

e) [-1, + ∞)

f) (- ∞ , 5)

Comprueba lo aprendido

bemebo.files.wordpress.com

bajo licencia de creative commons

1. El intervalo (-3, 2), en forma de desigualdad se expresa $-3 \leq x \leq 2$

Verdadero ○ Falso ○

2. La expresión $2 \leq x < 5$ representa al intervalo [2, 5)

Verdadero ○ Falso ○

3. El intervalo (0, 1) en forma de desigualdad se expresa: $0 < x < 1$

Verdadero ○ Falso ○

4. La expresión $-7 < x \leq -3$ representa al intervalo [-7, -3)

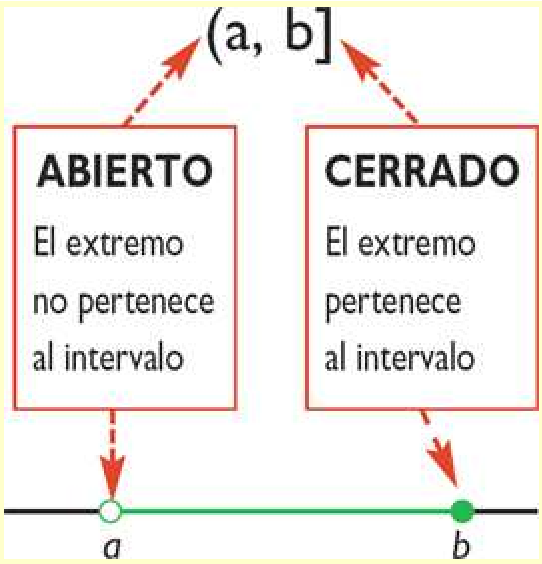
Verdadero ○ Falso ○

5. La desigualdad $x < 0$ representa a la semirrecta (- ∞ , 0)

Verdadero ○ Falso ○

6. La semirrecta (- ∞ , -2) se expresa en forma de desigualdad como. $x > -2$

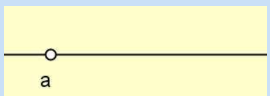
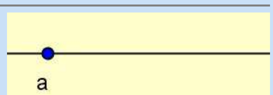
Verdadero ○ Falso ○



www.kalipedia.com

Hemos visto en el apartado 1.1 que un número se representa en la recta real simplemente con un punto. ¿Cómo se representará un intervalo que contiene infinitos números? pues con infinitos puntos, es decir, dibujando el tramo de la recta real que representa a dicho intervalo. Vamos a verlo a continuación.

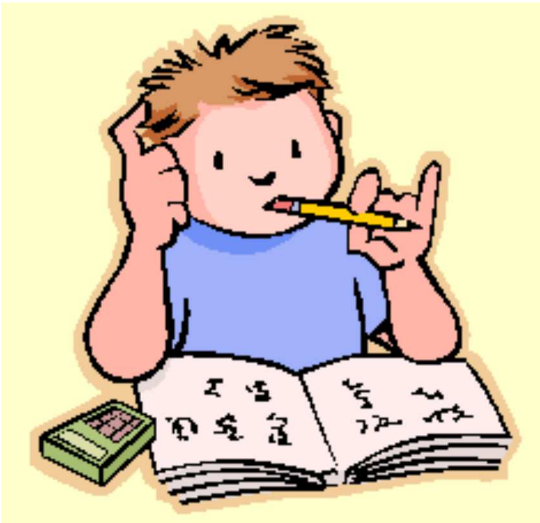
Importante

Nombre	Intervalo	Desigualdad	Representac Gráfica
Intervalo abierto	(a, b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado	[a, b]	$a \leq x \leq b$	

Intervalos semiabiertos			a
	[a, b)	$a \leq x < b$	a
Semirrectas	(a ,+ ∞)	$x > a$	a
	[a ,+ ∞)	$x \geq a$	a
	(- ∞ , a)	$x < a$	
	(- ∞ , a]	$x \leq a$	

Fuente Propia

Ejercicio resuelto



3.bp.blogspot.com

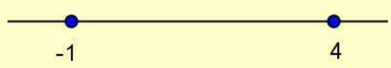
1. Representa gráficamente el intervalo (-10, -6).

2. Expresa en forma de desigualdad el siguiente intervalo:

Fuente propia

3. Representa gráficamente la semirrecta $[0, +\infty)$

4. Expresa en forma de intervalo la siguiente representación gráfica:



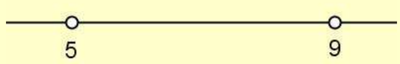
Fuente propia

Comprueba lo aprendido

i36.tinypic.com/ 2u7oswl.gif

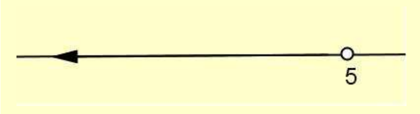
Bajo licencia de creative commons

1. El intervalo [5, 9] se representa así:



Fuente propia

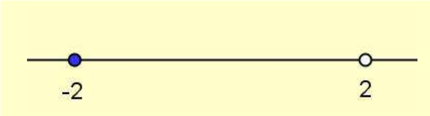
2. El siguiente gráfico corresponde a la semirrecta (- ∞ , 5)



Fuente propia

Verdadero ○ Falso ○

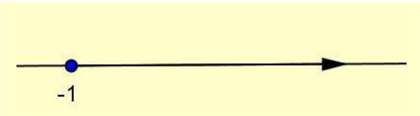
3. El intervalo $-2 \leq x < 2$ se representa así:



Fuente propia

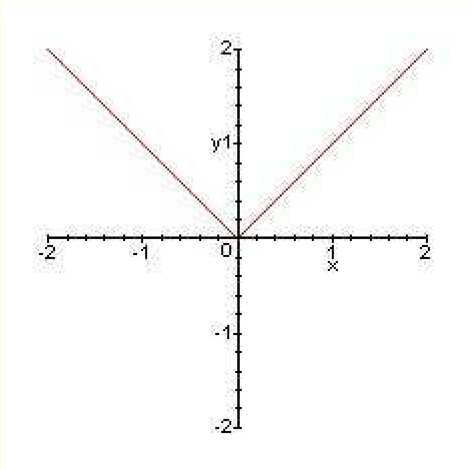
Verdadero ○ Falso ○

4. La siguiente gráfica corresponde a la semirrecta (- ∞ , -1]



Fuente propia

Verdadero ○ Falso ○



Funcion valor absoluto: dieumsnh.qfb.umich.mx

¿Es importante el signo en los numeros? Siempre no. Si es cierto que no es igual estar a -18 grados que a 18 grados, tener 2.000 € en tu cuenta corriente que -2.000 €. ¿Pero cual es la distancia, en km, entre Almeria y Sevilla, 422? ¿y de Sevilla a Almeria?. Nos vale el mismo dato 422 km.

Son numeros donde el signo no interesa. En la matematica le llamamos **valor absoluto.**

Importante

El valor absoluto de un numero real x, $|x|$, es: -x si x<0 , x si x>0 y 0 si x=0

Importante

Algunas propiedades

1) El valor absoluto de un numero real es el mismo si este es positivo:

$$|5|=5 \ \ pues \ \ 5>0$$

2) El valor absoluto de un numero negativo el el mismo cambiado de signo:

$$|-3|=3 \ \ pues \ \ -3<0$$

3) El valor absoluto de cero es cero : $|0|=0$
4) Un numero y su opuesto tienen el mismo valor absoluto. $|4|=|-4|=4$

Ejercicio resuelto

Hallar el valor absoluto de:

a) -6

b) $\sqrt{5}$

c) $3-\sqrt{10}$

d) ¿ cuales son los valores de "x" si $|x|=5$

Valor -2: www.edufuturo.com

3. Aproximacion y error

imagen de gifmania

¿Te has parado a pensar que nuestra edad **no** es **exacta** ?

¿No lo sabías? Te pongo un ejemplo:

Jesús, nació el 27 de febrero, ahora tiene 43 años. Cuando se le pregunta la edad (supón que hoy es 27 de junio y son las 13.30 horas) dice que tiene 43 años y no dirá que tiene 44 hasta el próximo 27 de febrero. Esto, tan común en las personas, se llama aproximar por **defecto** o si responde "voy a cumplir 44" sería por **exceso** . ¿Qué pensaríamos si Jesús hubiera contestado: 43 años, 4 meses, 5 horas, 10 minutos y 15 segundos? ¿?. Sin embargo esta respuesta es más exacta.

En muchas situaciones de la vida real es imposible trabajar con total exactitud, bien por nuestras propias limitaciones o por la de los instrumentos que estamos usando.

Pues bien, en estos casos el valor lo aproximamos, cometiendo, por necesidad **errores.**

Importante

El **ERROR** tenemos que entenderlo como una diferencia entre dos valores, uno que se supone exacto y otro que se da como aproximación.

Comprueba lo aprendido

Utilizando las matemáticas, que el resultado lo demos por aproximacion quiere decir:

- ○ Que nos hemos equivocado al hacer las cuentas
- ○ Que está todo mal.
- ○

Que no sabemos utilizar la calculadora

Si pides un a lata de refresco tendras un tercio de litro que es 33,33333333.......... centilitros, pero en el envase aparece 33 cl.

El **error** , es **necesario** y **habitual** .

Ejercicio resuelto

En las gasolineras:

Fuente propia

Si observas, el precio del litro de diesel o de gasolina consta siempre de tres decimales; por ejemplo, hoy el litro de gasolina sin plomo está a 0.852 €. Si le echamos al depósito 30 litros y medio, la cuenta nos sale a pagar 25.986 €, pero **es imposible** que lo hagamos, o pagamos 25.98 € o pagamos 25.99 €, aunque incluso, lo más seguro es que le acabemos dando 26 euros al gasolinero.

En este apartado vamos a ver cómo obtener el valor aproximado (x*), de un número exacto (x).

De ahora en adelante, el valor **aproximado** lo representaremos siempre por **"x*"** y el valor **exacto** por **"x"**

A la hora de aproximar se utilizan dos tipos de aproximaciones:

a) Truncamiento

b) Redondeo

Truncamiento

Jesús tiene en realidad 43,347222.... años pero el sólo responde 43. Lo que acaba de hacer es un **truncamiento:** cortamos el número exacto sin preocuparnos de cómo continúa la expresión decimal después.

Importante

Truncamiento: Truncar a un orden indicado (decenas, décimas, etc) consiste en eliminar las cifras a la derecha de la que marca el orden indicado.

Ej: Truncar 1234 a la decena: 12 **3** 0 Se conservan las cifras hasta la decena y se elimina la cifra de las unidades

Truncar 12,65437 a la centésima da por resultado 12,6 **5** Se han eliminado las cifras decimales siguientes a la centésima.

Ejercicio resuelto

Observa el siguiente ejemplo

Aproxima por truncamiento de π = 3,14159...

- Truncamiento de las unidades π ≈ 3
- Truncamiento de las décimas π ≈ 3,1
- Truncamiento de las centésimas π ≈ 3,14
- Truncamiento de las milésimas π ≈ 3,141

imagen de Daniel F.Pigatto
bajo licencia Creative Commons

Importante

La aproximación por **truncamiento** (en **números positivos**) es siempre por **defecto** , es decir, el valor aproximado x* es más pequeño que el valor exacto x; x*<x.

Como has visto, los años de Jesús 43,34722 es mayor que la aproximación que se utiliza por truncamiento.

Ejercicio resuelto

Ejemplo 2:

Aproxima por truncamiento -п = -3,14159...

- Truncamiento de las unidades -п ≈ -3
- Truncamiento de las décimas -п ≈ -3,1
- Truncamiento de las centésimas -п ≈ -3,14
- Truncamiento de las milésimas -п ≈ -3,141

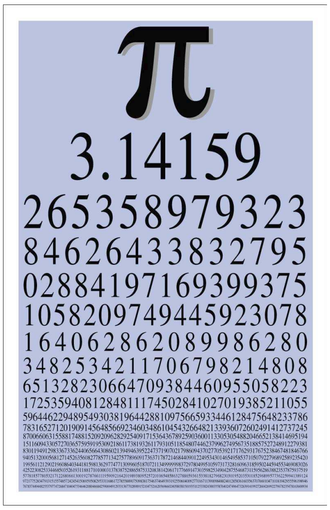


Imagen de wordpress

bajo licencia Creative Commons.

Importante

La aproximación por **truncamiento** (en **números negativos**) siempre es por **exceso** , es decir,

$$x^* > x.$$

Si Jesús tiene 43,34 años, es evidente que está más cerca de los 43 que de los 44, por tanto la expresión tengo 43 es correcta. Si embargo, si Marta tiene exactamente 23,85 años, será más correcto que diga que tiene 24 años a que tiene 23, pues está mucho más cerca de los 24 que de los 23.

imagen de donaldtownsend

Redondeo: en el redondeo la aproximación puede ser por defecto o por exceso, depende del valor de la cifra siguiente a la que aproximamos.

Redondeo

Importante

De esta forma:

- Si la **cifra siguiente** al orden de aproximación es **menor que 5** la aproximación por redondeo es la misma que la de **truncamiento** y por tanto la aproximación es por defecto.
- Si la **cifra siguiente** al orden de aproximación es **mayor o igual que 5** la aproximación por redondeo es por exceso, con lo que **sumamos una unidad** a la **última** cifra **decimal que ponemos.**

Ejercicio resuelto

Ejemplo3: aproximación por redondeo de $\pi = 3{,}14159...$

- Redondeo de las unidades $\pi \approx 3$ (por defecto)
- Redondeo de las décimas $\pi \approx 3{,}1$ (por defecto)
- Redondeo de las centésimas $\pi \approx 3{,}14$ (por defecto)
- Redondeo de las milésimas $\pi \approx 3{,}141+0{,}001=3{,}142$ (por exceso)

imagen de web.mac

bajo licencia Creative Commons

Comprueba lo aprendido

Aproxima por redondeo las cantidades que se indican a continuación.

2,995131… en las centésimas

- 2,99
- 3,00

-3,21951… en las milésimas

- -3,220
- -3,210

1.4

1,5

132,345….en las milésimas

132,345

No se puede aproximar por redondeo pues no conocemos el valor de la cifra de las milésimas

imagen de RBolance

bajo licencia Creative Commons

Para vallar mi cortijo de Nijar (Almería) estimé que necesitaba 400 metros. Cuando la empresa VALLAS INDALO me la instaló cobraron 401 metros, cabe pensar que con mi cinta métrica de casa cometiera un error de 1 metro.

Cuando se lo comenté a mi vecino Pablo, que trabaja en la empresa CARRETERAS RURALES S.A, me explicó que a su encargado le había pasado algo parecido en la carretera que une los pueblos de Macael y Olula del Río (3 km de distancia). Con sus aparatos de medida cometieron el mismo error, 1 metro.

fuente propia

Para ambos casos el error de medición es de 1 metro.

¿Pero es distinta la significación de un error de un metro al medir 3 km. que al medir 401 metros?

Para contestar a esta pregunta vamos a leer los apartados siguientes que te explican el error absoluto y el error relativo.

Importante

Error absoluto

Cuando aproximamos estamos cometiendo un error, siendo éste la diferencia entre el valor exacto y el aproximado. Este error se llama absoluto y lo denotaremos por Ea, y como hemos explicado su valor es:

$$Ea = x - x^*$$

Según el signo de Ea podemos distinguir entre error por exceso o por defecto:

- Si Ea>0 error por defecto; la aproximación es más pequeña que el valor real.
- Si Ea<0 error por exceso; la aproximación es mayor que el valor real.

defecto, se utiliza el valor absoluto para **la fórmula del error absoluto** :

$$E_a = |V_{real} - V_{aproximado}| = |x - x^*|$$

Ejercicio resuelto

En los dos ejemplos anteriores, el error que cometíamos era de un metro; Pues bién éste es el error absoluto.

En la valla, x=401 y nuestra medida x^* =400, por tanto el error absoluto es E_a =401-400=1.

Por otro lado , en la carretera x=3.000 m. y x^* =3.001, entonces E_a =-1 m.

Obseva que para el primer caso E_a >0 el error ha sido por defecto, para el segundo, E_a <0, por exceso.

Importante

El **error relativo** es el cociente entre el error absoluto y la medida, se denota como Er.

$$E_r = \frac{E_a}{x}$$

Lo mas frecuente es denotarlo en tanto por ciento, es decir, multiplicando por cien el resultado obtenido en la división; $E_r \bullet 100$

El error relativo no depende de las medidas y permite comparar los errores entre dos magnitudes distintas. Siempre **la mejor aproximación entre varias es la de menor error relativo** .

Ejercicio resuelto

Para la valla

$$E_r = \frac{1}{3.000} = 0,00033 \ (0,033\%)$$

Por tanto, si comparamos ambos resultados, el error de medida de la valla es más grande que el de la carretera, por tener mayor error relativo (Dividiendo 0,25/0,033≈8. El error en la medida de la valla es 8 veces mayor que el de la carretera).

Comprueba lo aprendido

¿Es distinta la significación de un error de un milímetro al medir al ancho de un folio de 21 cm o al medir el ancho de una habitación de 4 metros?

○ No

○ Sí

¿Cúal es el error relativo de ambos?

○ 0.48 % y 0.25% (folio, habitación)

○ 0,48 % y 0,025% (folio y habitación)

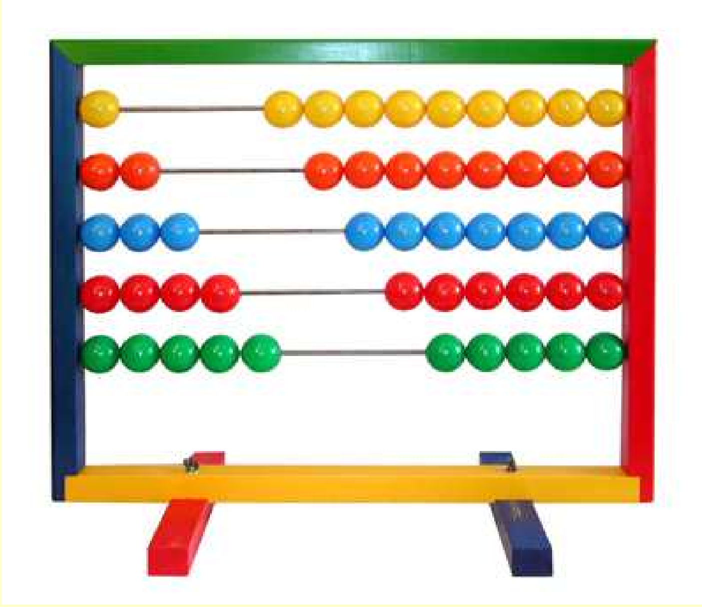


imagen de www.crisnaheducar.com
bajo licencia de creative commons

Curiosidad

Antes de empezar a usar la calculadora vamos a aclarar que nos centraremos en las más usuales actualmente, que son las llamadas Direct Algebraic Logic, que quiere decir algo así como: "escribir directamente en la calculadora como la lógica algebraica nos dice", y como nosotros escribimos en un papel. Vamos a detenernos en tres detalles: la tecla "shift" o "inv", la forma de redondear con una calculadora y cómo trabajar con raíces.

La tecla INV o SHIFT

Como ves encima de cada tecla de la calculadora hay escrita una serie de funciones matemáticas que nos pueden ayudar no pocas veces, a dar solución al problema o ejercicio que tengamos delante. Pues bien, la manera de poder utilizar es dar a esa tecla que está arriba a la izquierda, y que según la calculadora se llama "INV" o "SHIFT".

fuente propia

Redondeos

Cuando hacemos una operación con nuestra calculadora, ésta siempre nos da la solución por redondeo. Pero podemos cambiar el número de decimales que queremos que nos de. Esto lo realizamos con la sentencia "fix", que suele estar dentro de los distintos MODE que tiene la calculadora. Normalmente, pulsando

MODE 7 3

conseguimos que el número que esté en pantalla se escriba con 3 decimales. Por ejemplo si tuviesemos π en la calculadora, y escribimos MODE 7 3, la calculadora nos escribirá: 3,142; y ante MODE 7 1, veremos en el visor 3,1.

Raíces

Para escribir raíces, tenemos varias teclas que son las siguientes:

fuente propia

La primera como se ve es para la raíz cuadrada: pulsamos esta tecla, después la cantidad y la calculadora nos responde la solución, tras eso podemos elegir la cantidad de decimales que queremos, tal como hemos explicado más arriba.

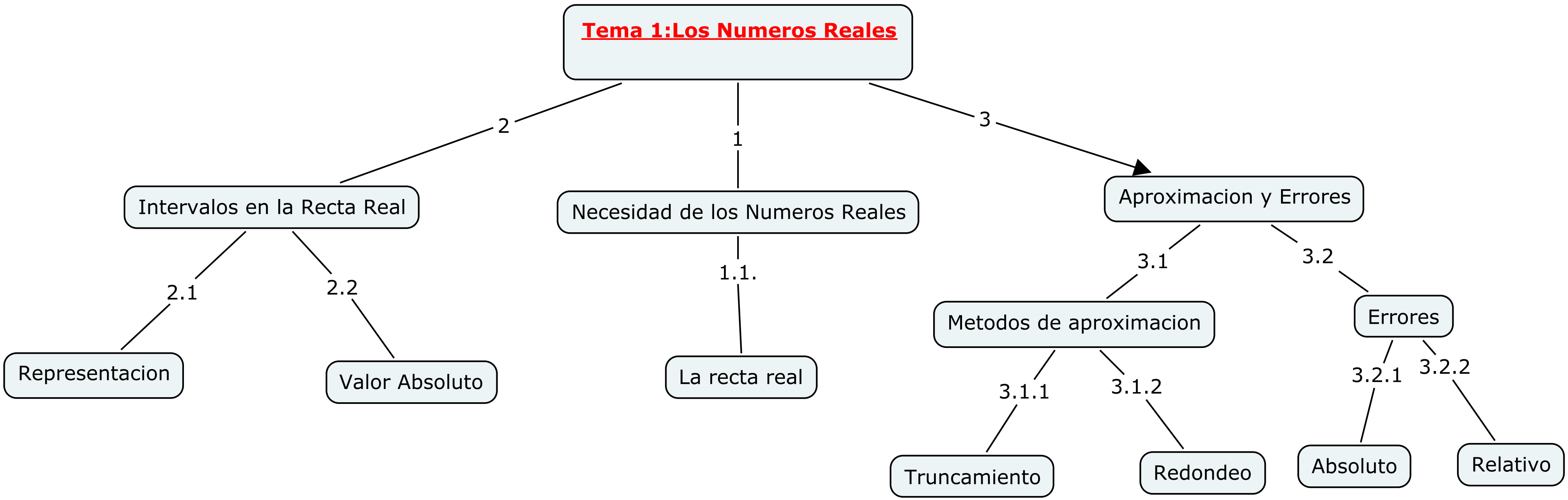
La segunda, es para elevar al cuadrado un número.

La tercera, es para elevar al número que deseemos, y al darle a "SHIFT" o "INV" podemos hacer la raíz del índice que queramos. Como ejemplo calcularemos la raíz de índice 5 de 24:

Tecleamos "SHIFT"; tecleamos  ; tecleamos "5"; y por último, tecleamos "24"; la solución es: 1,888175023

Hay calculadoras que también incluyen la tecla  , que nos da el cubo de un número y su función inversa, esto es, al teclear "SHIFT" podemos utilizar la raíz cúbica.

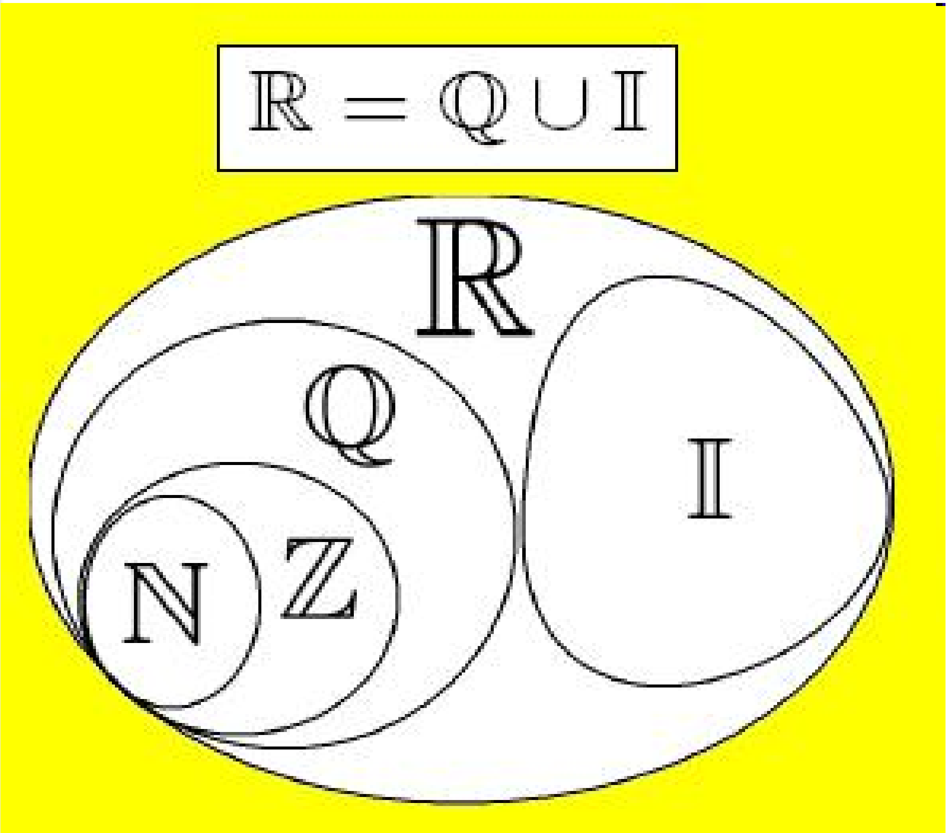
Por último, otras calculadoras tienen la tecla  que nos sirve, tras teclear "SHIFT", para lo mismo que la tecla vista dos líneas más arriba.


Tema 1:Los Numeros Reales
2
1
3
Intervalos en la Recta Real
Necesidad de los Numeros Reales
Aproximacion y Errores
2.1
2.2
1.1.
3.1
3.2
Representacion
Valor Absoluto
La recta real
Metodos de aproximacion
Errores
3.1.1
3.1.2
3.2.1
3.2.2
Truncamiento
Redondeo
Absoluto
Relativo

TEMA 1
LOS NÚMEROS REALES

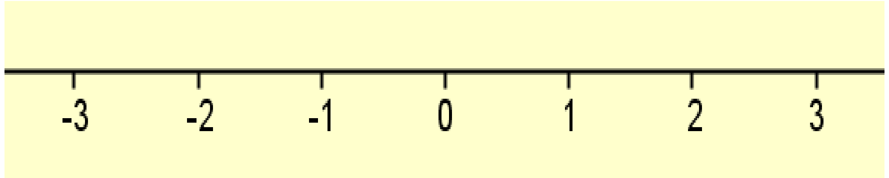
¿Podemos medir el mundo?

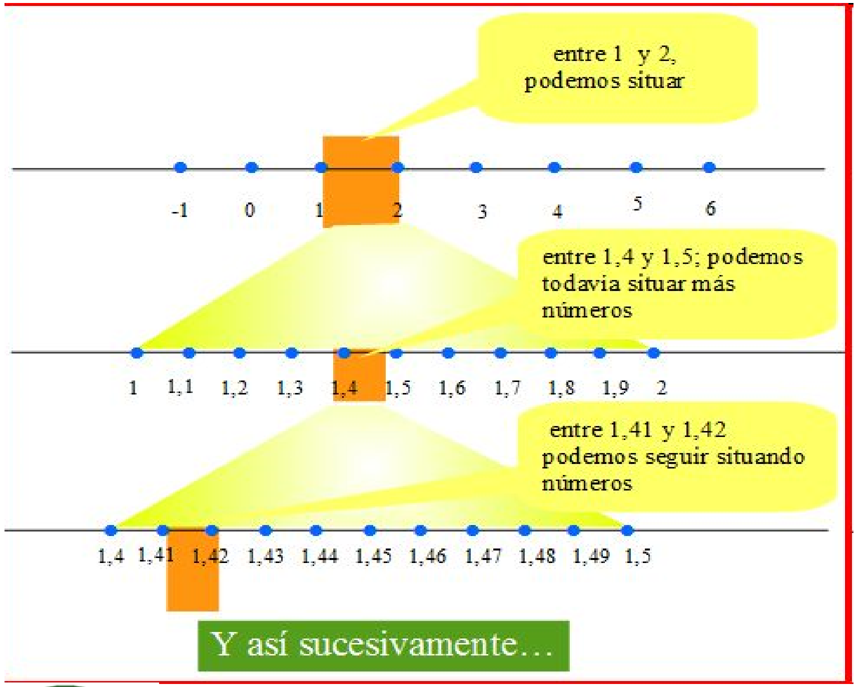
1. NECESIDAD DE LOS NÚMEROS REALES



Un número o es racional o es irracional. Pues bien, el conjunto de los racionales y los irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números reales, y se designa por la letra R.

1.1 LA RECTA REAL

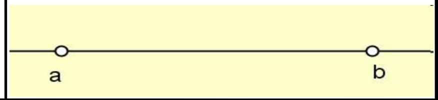
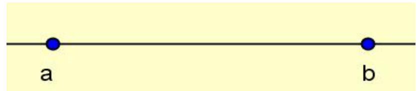
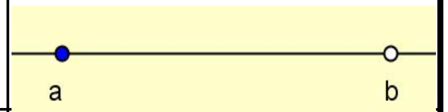
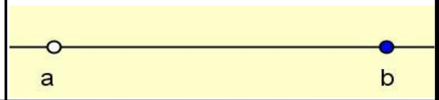
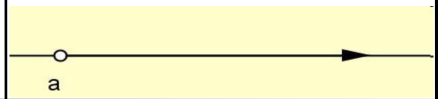
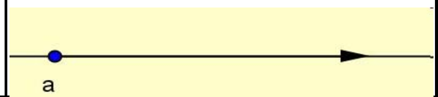
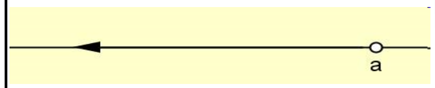
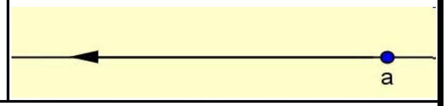




Es aquella donde se representan todos los números reales. Su origen está en el cero, a la izquierda están los números negativos y a la derecha los positivos.

Las imágenes son de fuente propia

2. INTERVALOS. REPRESENTACIÓN

Nombre	Intervalo	Desigualdad	Representación
Intervalo abierto	(a, b)	$a < x < b$	
Intervalo cerrado	[a, b]	$a \leq x \leq b$	
Intervalos Semiabiertos	[a, b)	$a \leq x < b$	
	(a, b]	$a < x \leq b$	
Semirrectas	(a, + ∞)	$x > a$	
	[a, + ∞)	$x \geq a$	
	(- ∞, a)	$x < a$	
	(- ∞, a]	$x \leq a$	

Fuente propia

3. VALOR ABSOLUTO. APROXIMACIÓN Y ERROR

El **valor absoluto** de un número real *x* es la distancia que hay desde dicho número hasta el cero, se representa |*x*|, así:

$|+5| = 5$ y $|-5| = 5$

Aproximar un número consiste en sustituirlo por otro que esté próximo a él. Por ejemplo $\pi \sim 3{,}1416$.

Llamamos **error** a la diferencia entre el valor real y el valor aproximado. Error = $\pi - 3{,}1416$

3.1 MÉTODOS DE APROXIMACIÓN. ERRORES

Truncamiento: consiste en cortar el número exacto a partir de un orden determinado.

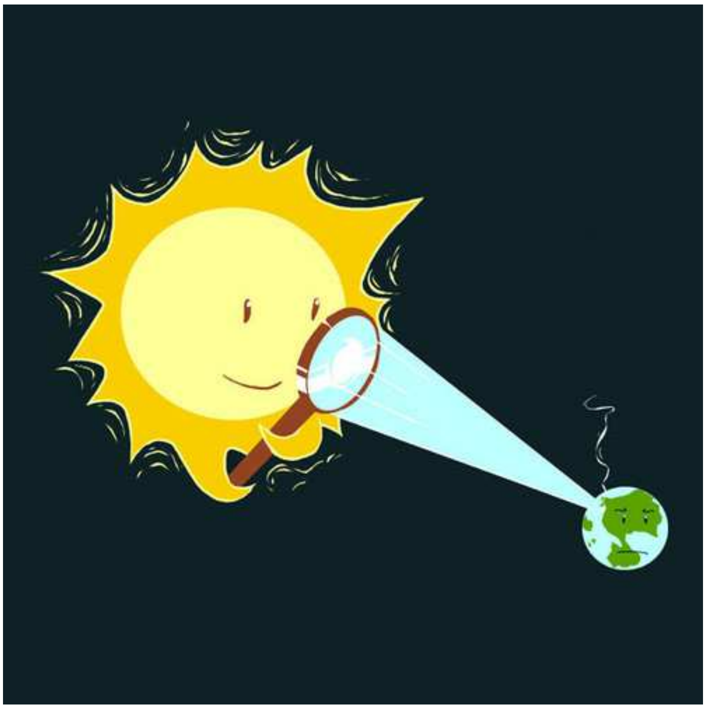
Redondeo: consiste en cortar el número exacto a partir de un orden determinado, teniendo en cuenta que si la *cifra siguiente* a dicho orden es *menor que 5* la aproximación coincide con la de truncamiento y si es *mayor o igual que 5* sumamos una unidad a la última cifra decimal que ponemos.

$$E_a = |V_{real} - V_{aproximado}| \qquad E_r = \frac{E_a}{Valor\ real}$$

4. USO DE LA CALCULADORA

La primera como se ve es para la raíz cuadrada: pulsamos esta tecla, después la cantidad y la calculadora nos responde la solución, **La segunda**, es para elevar al cuadrado un número. **La tercera**, es para elevar al número que deseemos, y al darle a "SHIFT" o "INV" podemos hacer la raíz del índice que queramos. Como ejemplo calcularemos la raíz de índice 5 de 24: Tecleamos "SHIFT“, tecleamos "5"; y por último, tecleamos "24"; la solución es: 1,888175023.

Curiosidad



http://capuccinoproductions.110mb.com/2009/06/26/la-tierra-el-sol-y-una-lupa-imagen/

¿Te has planteado alguna vez a qué distancia estamos del Sol?

Seguro que sí, y seguro que has visto alguna vez la solución, aunque ahora mismo no la recuerdes.

Estamos a ciento cincuenta millones de kilómetros, chispa más o menos, porque con esa cantidad no nos vamos a plantear las decenas de kilómetros, ni los metros, o sea, evidentemente es una aproximación (recuerda el tema 1).

Pero ahora lo que nos ocupa es la cantidad, esto es, los ciento cincuenta millones de kilométros, que en números es algo así como: 150000000 km, vaya tela, ¡imagínate escribir la distancia del Sol a Plutón!. Te preguntarás, ¿y cómo los matemáticos no se han planteado escribirlo más cómodamente, más pequeño? Pues sí, lo hemos hecho, podemos escribirlo así: $1{,}5\cdot 10^8$ km.

Para poder escribir esta cantidad de esta manera, hay que saber utilizar la segunda parte del nombre de este tema, la notación científica; y para saber utilizar la notación científica es necesario conocer y dominar la primera, las potencias.

Vayamos, pues, paso a paso, a ser capaz de escribir cantidades tan grandes.

O tan pequeñas, porque si nos planteamos la masa de un electrón, a ver como la expresas ¿con 31 ceros en los decímales? no, más bien con las potencias y

Un amigo me asaltó el otro día con una duda matemática. Me dijo que había estado en un restaurante que tenía un menú variado. Le ofrecían primer y segundo plato, y postre. Además, había 4 primeros platos, 4 segundos y 4 postres.

http://lewebpedagogique.com/hispadictos/tag/restaurante/

bajo licencia de creative commons

Lo mejor para mi amigo era que podía comer en el mismo restaurante sin repetir el mismo menú durante mucho tiempo. Como a él las cuentas se le dan mal, me preguntó, ¿y cuántos días puedo estar comiendo sin repetir el mismo menú?

Fácil le contesté. Tienes 4 posibilidades para el primero. Para cada una de esas posibilidades tienes 4 para el segundo, o sea, 4 posibilidades para la opción 1, 4 para la opción 2, etc... esto nos arroja que por el momento tenemos 4·4=16 posibilidades, y para cada una de ellas un postre distinto, o sea, 16 con el postre 1, 16 con el postre 2, etc... así tenemos 16·4=64 posibilidades. O mejor dicho, 4·4·4 posibilidades. Esto lo podemos expresar así: 4^3

Importante

Dado un número real a y un número natural n, llamamos potencia de base a y exponente n, al número

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a \ (n \ \text{veces})$$

que se consigue multiplicando la base a, por sí misma tantas veces como indique el exponente n. Por ejemplo:

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$;
$4^8 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 65536$

Ejercicio resuelto

Ejercicio

a) 4^5 ; b) $(-2)^4$; c) 5^3 ; d) $(-3)^5$; e) $(-4)^3$; f) $(-7)^6$

Una vez realizadas las potencias, pincha en *Mostrar información* para comprobarlas.

Ahora te toca a ti:

a) 3^6 ; b) $(-3)^6$; c) 4^3 ; d) $(-2)^5$; e) $(-5)^3$; f) $(-4)^6$

Intenta calcular las siguientes potencias que, aunque parecen iguales, hay algunas diferencias:

a) 2^2

b) $(2)^2$

c) $(-2)^2$

d) -2^2

e) $(-2)^3$

f) -2^3

Importante

Si observas detenidamente el ejemplo anterior podemos sacar algunas conclusiones:

1. Si el signo está dentro del paréntesis, formará parte de la base y por consiguiente se repetirá tantas veces como nos indica el exponente.
2. Si el signo está fuera del paréntesis, no forma parte de la base y por consiguiente se añadirá al resultado de la potencia.
3. Si la base es positiva, el resultado será positivo.
4. Si la base es negativa y el exponente es par, el resultado será positivo.
5. Si la base es negativa y el exponente es impar, el resultado será negativo.

Ejercicio resuelto

Calcula las siguientes potencias, utilizando la definición de potencias vista en el punto 1, y con ayuda de tu calculadora:

a.1) 2^3 ; a.2) 2^4 ; a.3) $2^3.2^4$; a.4) 2^7 ;

b.1) 3^3 ; b.2) 3^2 ; b.3) $3^3.3^2$; b.4) 3^5 ;

¿Eres capaz de llegar a alguna conclusión? Después de pensarlo, haz click en *Mostrar información*

c.1) 2^5 ; c.2) 2^3 ; c.3) $\frac{2^5}{2^3}$; c.4) 2^2 ;

d.1) 5^6 ; d.2) 5^2 ; d.3) $\frac{5^6}{5^2}$; d.4) 5^4 ;

y ahora, ¿llegas a alguna conclusión? Haz click como antes

e.1) $(4^3)^2$ (en este ejercicio debes hacer primero 4^3 , y lo que obtengas lo debes elevar a 2); e.2) 4^6 ;

f.1) $(2^5)^3$; f.2) 2^{15} ;

En esta ocasión, ¿cuál es la conclusión adecuada? Pincha y la ves

g.1) $2^3.4^3$; g.2) 8^3 ; g.3) 8^6

h.1) $5^2.4^2$; h.2) 20^2 ; h.3) 20^4

es el momento de intentar llegar a una conclusión que verás al darle a *Mostrar información*

i.1) $\frac{6^2}{2^2}$; i.2) $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2$

j.1) $\frac{6^3}{3^3}$; j.2) $\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 2^3$

te toca de nuevo, llegar a una conclusión. Después pincha en *Mostrar información*

Propiedades de las potencias de exponente natural

Resumimos lo anterior en la siguiente tabla:

Producto de potencias de la misma base	$a^m . a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias de la misma base	$a^m / a^n = a^{m-n}$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Producto de potencias del mismo exponente	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
Cociente de potencias del mismo exponente	$a^m / b^m = (a / b)^m$

Comprueba lo aprendido

Elige las respuestas correctas de entre las siguientes afirmaciones; ten cuidado que pueden ser varias las respuestas correctas:

1.- $4^3.4^5$

☐

a) 4^{15}

☐

b) 4^8

☐

c) 65536

Mostrar retroalimentación

2.- $\frac{3^7}{3^4}$

☐

a) 3^3

☐

b) 27

c) 9

Mostrar retroalimentación

3.- 3^{5^2}

☐

a) 3^{25}

☐

b) 3^7

☐

c) 3^{10}

Mostrar retroalimentación

4.- $3^7 \cdot 4^7$

☐

a) 12^7

☐

b) 12^{14}

☐

c) $6^7 \cdot 2^7$

Mostrar retroalimentación

5.- $\frac{8^6}{4^6}$

a) 2^6

☐

b) $\left(\frac{8}{4}\right)^6$

☐

c) 64

Mostrar retroalimentación

Ejercicio resuelto

En el punto anterior hemos visto las potencias en las que el exponente era un número natural. En este vamos a dar un paso más, aumentando el campo de los exponentes a los números enteros. Evidentemente, el paso que tenemos que hacer es el del exponente negativo, puesto que los enteros son los números enteros positivos (los naturales) y los enteros negativos. Para comprender mejor como se hace la potencia de un número entero negativo, vamos a hacer algunos ejercicios de potencia.

Calcula, directamente y utilizando las propiedades del apartado 1.1, la siguiente potencia: $\frac{5^2}{5^6}$

Cuando hayas contestado a las dos, pincha en *Mostrar información.*

Seguro que ahora eres capaz de enunciar la propiedad con letras, de la misma manera que lo hicimos en el punto 1.1.

Para comprobarlo, ya sabes, pincha.

Ejercicio resuelto

Del mismo modo podemos resolver la siguiente operación con potencias:

Calcula, utilizando las propiedades del apartado 1.1, la siguiente potencia: $\frac{5^2}{5^2}$

Calcula, utilizando esta vez, la definición de potencia del punto 1, la misma potencia: $\frac{5^2}{5^2}$

Propiedades de las potencias de exponente entero

Las potencias de exponente entero verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente natural. Además de éstas también verifican la propiedad vista más arriba, que resumimos en la siguiente tabla:

Potencia con exponente cero	$a^0 = 1$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguiente potencias, utilizando la propiedad anterior:

a) 3^{-4} ; b) $(-2)^{-3}$; c) $(-2)^3$; d) $(-4)^{-6}$

Importante

La intención de esta propiedad es quitar las potencias que tengan un exponente negativo, no se trata de tener las potencias en el numerador o denominador, sino de quitar ese número negativo del exponente.

Hemos visto que cuando la potencia de exponente negativo está en el numerador, pasa al denominador con exponente positivo; nos preguntamos ahora, ¿qué pasará cuando la potencia de exponente negativo está en el denominador? Veamoslo.

{utilizando la propiedad de potencia de un número negativo} {poniendo el 1 del numerador como fracción} {haciendo la división del doble cociente, o sea, multiplicando en cruz"}

Podemos concluir que: ; o en general:

Ejercicio resuelto

Ya me imagino que te lo veías venir. Exponente natural, exponente entero; y el siguiente, pues eso, el fraccionario, o sea, las fracciones, con lo que nos gustan, ¿verdad?. Bueno, ten un poco de paciencia que creo que esta vez te podemos sorprender, a no ser que sepas de antemano de qué estamos hablando.

fuente propia

Como siempre para entender mejor cómo es una potencia de exponente fraccionario, vamos a hacer algunos ejercicios.

Vas a necesitar la calculadora científica no solo para calcular potencias, en la cuales deberás poner entre paréntesis las potencias fraccionarias, sino para calcular raíces de índice distinto de 2. Esto lo vimos en el apartado 4 del tema 1, más concretamente donde explicamos las raíces.

Vamos a allá. Si tienes dudas sobre cómo manejar la calculadora, echa un vistazo al apartado 5.

Resuelve con la calculadora:

a.1) $9^{\frac{1}{2}}$; a.2) $\sqrt{9}$

b.1) $25^{\frac{1}{2}}$; b.2) $\sqrt{25}$

c.1) $5^{\frac{1}{2}}$; c.2) $\sqrt{5}$

d.1) $5^{\frac{3}{2}}$; d.2) $\sqrt{5^3}$

supongo que intuyes de que estamos hablando. Concrétalo en un expresión, y pincha en *Mostrar información*

Veamos si sigue ocurriendo cuando el índice no es 2. Calcula ahora:

a.1) $7^{\frac{5}{3}}$; a.2) $\sqrt[3]{7^5}$;

b.1) $2^{\frac{2}{5}}$; b.2) $\sqrt[5]{2^2}$

sigues obteniendo los mismos resultados ¿verdad?, de manera que intenta concluir con la generalización en letras de la potencia de un número fraccionario, y pincha después.

Propiedades de las potencias de exponente fraccionario

Las potencias de exponente fraccionario heredan las mismas propiedades que las vistas en los apartados anteriores. Además añaden la que acabamos de deducir:

Potencia de exponente fraccionario	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Comprueba lo aprendido

Elige la respuesta correcta en cada uno de los siguiente apartados:

1.- $3^{\frac{6}{5}}$

- $\sqrt[6]{3^5}$
- $\sqrt[5]{3^6}$

2.- $(-3)^{\frac{2}{5}}$

- $\sqrt[5]{(-3)^2}$
- $\sqrt{(-3)^5}$

3.- $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{4}{7}}$

- $\sqrt[7]{5^4}$

$\sqrt[7]{\left(\frac{5}{3}\right)^4}$

4.- $\sqrt[5]{3^4}$

○

$3^{\frac{5}{4}}$

○

$3^{\frac{4}{5}}$

5.- $\sqrt[3]{(-5)^8}$

○

$(-5)^{\frac{8}{3}}$

○

$(5)^{\frac{-8}{3}}$

6.- $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

○

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

○

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

Ejercicio resuelto

Ejercicios de repaso de las potencias.

1.- Pasa a raíz las siguientes potencias de exponente fraccionario:

a) $4^{\frac{3}{5}}$; b) $7^{\frac{2}{3}}$; c) $(-2)^{\frac{2}{7}}$; d) $\pi^{\frac{5}{3}}$; e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

2.- Pasa a potencia de exponente fraccionario las siguientes raíces:

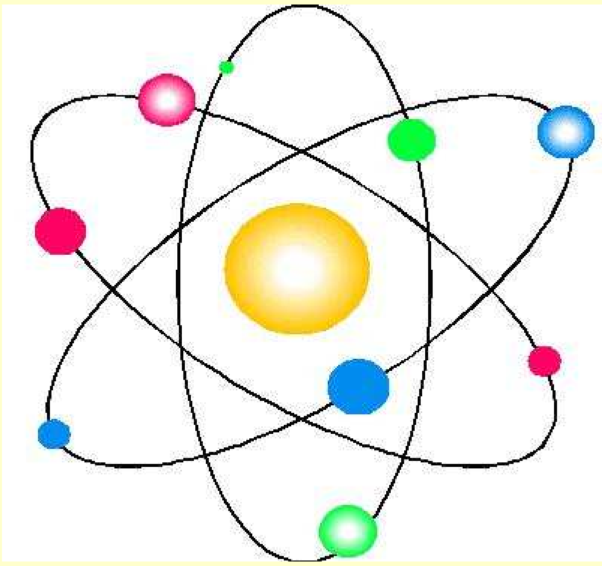
a) $\sqrt[4]{2^3}$; b) $\sqrt{4^3}$; c) $\sqrt[5]{(-2)^6}$; d) $\sqrt[3]{e^5}$; e) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

3.- Expresa estas potencias como potencia única, siempre con exponente positivo:

a) $4^{-3} \cdot 4^{-3}$; b) $3^2 \cdot 3^{-6}$; c) $\frac{5^3}{5^5}$

4.- Expresa en forma de potencia única las siguientes potencias, y calcula el resultado:

a) $4^{-3} \cdot 2^{-3} \cdot 5^{-3}$; b) $15^4 : 5^4 \cdot 3^{-4}$; c) $3^5 \cdot 4^5 : 12^8$; d) $9^2 : 3^2 : 3^{-4}$



www.cdn.noticiaaldia.com/.../ 2010/03/atomo.jpg

Como hemos visto al principio del tema, hay números que son tan grandes o tan pequeños que resulta difícil nombrarlos y escribirlos y por eso nos ayudamos de las potencias para expresarlos de forma más simplificada. La **notación científica** es una forma particular de escribir estos números utilizando las potencias.

Así la forma de expresar la distancia de la Tierra al Sol como $1{,}5 \cdot 10^{8}$ Km, o la masa de un electrón como $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ Kg se llama notación científica.

Importante

Una cantidad se expresa en **notación científica** como un número por una potencia de 10 (de exponente positivo o negativo). Dicho número tiene que cumplir unas condiciones:

1. Si es entero tiene que tener una sola cifra, **por ejemplo: $5 \cdot 10^{7}$** .
2. Si es decimal, la parte entera tiene que tener una sola cifra del 1 al 9, es decir, la parte entera no puede ser cero.

Por ejemplo la cantidad **$0{,}75 \cdot 10^{9}$** **no está** expresada **en notación científica** pues la parte entera del número es un cero. Sin embargo la cantidad **$7{,}5 \cdot 10^{8}$** **sí está** bien expresada **en notación científica** pues la parte entera del número es una cifra comprendida entre 1 y 9.

Veamos algunos **ejemplos** que nos pueden ayudar a la hora de expresar un número en notación científica, en los que se observa que al **multiplicar** un número **por una potencia de 10 de exponente positivo**, lo que hacemos es multiplicar por la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente, mientras que al **multiplicar por una potencia de 10 de exponente negativo**, lo que hacemos es dividir por la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente :

$a \cdot 10^{n}$	$a \cdot 10^{-n}$
$50 = 5 \cdot 10$	$0{,}5 = 5 : 10 = 5 \cdot 10^{-1}$
$500 = 5 \cdot 100 = 5 \cdot 10^{2}$	$0{,}05 = 5 : 100 = 5 \cdot 10^{-2}$
$5000 = 5 \cdot 1000 = 5 \cdot 10^{3}$	$0{,}005 = 5 : 1000 = 5 \cdot 10^{-3}$
$50000 = 5 \cdot 10000 = 5 \cdot 10^{4}$	$0{,}0005 = 5 : 10000 = 5 \cdot 10^{-4}$
$500000 = 5 \cdot 100000 = 5 \cdot 10^{5}$	$0{,}00005 = 5 : 100000 = 5 \cdot 10^{-5}$
$5000000 = 5 \cdot 1000000 = 5 \cdot 10^{6}$	$0{,}000005 = 5 : 1000000 = 5 \cdot 10^{-6}$

Ejercicio resuelto

2.bp.blogspot.com/.../
S700/alumno_estudiando.gif

Expresa los siguientes números en notación científica:

a) 3.000.000

b) 34.000.000.000

c) $235 \cdot 10^{6}$

d) 0,000003

e) 0, 000000632

f) $234{,}7 \cdot 10^{-10}$

Comprueba lo aprendido

1. El diámetro del Sol es 1.400.000 Km aproximadamente. Exprésalo en notación científica.

a) $14 \cdot 10^{5}$ Km

b) $1,4 \cdot 10^{6}$ Km

c) $1,4 \cdot 10^{-6}$ Km

2. El radio de un protón es $2,2 \cdot 10^{-9}$ m. Exprésalo con todas sus cifras.

a)0,0000000022m

b) 0,000000022m

c) 220000000m

3. Nuestro planeta está muy mayor, tiene $4,5 \cdot 10^{9}$ años. ¿Sabrías expresar con todas sus cifras la edad de la Tierra?

a) 450.000.000 años

b) 45.000.000.000 años

c) 4.500.000.000 años

4. ¿Sabías que el tamaño del virus del resfriado común es 0,00000000005m? Expresa su tamaño en notación científica.

a) $5 \cdot 10^{11}$ m

b) $5 \cdot 10^{-11}$ m

c) $5 \cdot 10^{-10}$ m

5. El número $0,25 \cdot 10^{-6}$ no está bien expresado en notación científica. ¿Sabrías escribirlo correctamente?

a) $2,5 \cdot 10^{-7}$

b) $25 \cdot 10^{-8}$

c) $2,5 \cdot 10^{-5}$

6. El número $365,7 \cdot 10^{8}$ está bien escrito, pero su expresión no corresponde a la notación científica, transforma esta expresión para que sea notación científica.

a) $3{,}657 \cdot 10^{11}$

○

b) $3{,}657 \cdot 10^{6}$

○

c) $3{,}657 \cdot 10^{10}$

¿Te imaginas que tuvieras que resolver la siguiente multiplicación?

235.000.000.000.000.000.000.000 x 643.000.000.000.000.000.000.000.000

www.actiludis.com

Te pasarías un buen rato escribiendo ceros! O si intentaras hacerla con la calculadora te darías cuenta de que no te caben todas las cifras. Vamos entonces a utilizar lo que hemos aprendido en los apartados anteriores para convertir una operación tan larga en otra mucho más sencilla, para ello basta con escribir estas cifras en notación científica:

$(2{,}35 \cdot 10^{23}) \cdot (6{,}43 \cdot 10^{26})$

Importante

Vamos a explicar las operaciones a partir del ejemplo anterior:

PRODUCTO

Se multiplican las mantisas (los números decimales) y se suman los exponentes de las potencias de 10. ¡OJo! Luego se expresa el resultado como notación científica. Ejemplo:

$(2{,}35 \cdot 10^{23}) \cdot (6{,}43 \cdot 10^{26}) = (2{,}35 \cdot 6{,}43) \cdot (10^{23} \cdot 10^{26}) = 15{,}1105 \cdot 10^{49}$

$= 1{,}51105 \cdot 10^{50}$

COCIENTE

Exactamente igual que el producto pero dividiendo las mantisas y restando las potencias de 10. Por ejemplo:

$(2{,}35 \cdot 10^{23}) : (6{,}43 \cdot 10^{26}) = (2{,}35 : 6{,}43) \cdot (10^{23} : 10^{26}) = 0{,}36547 \cdot 10^{-3}$

$= 3{,}6547 \cdot 10^{-4}$

SUMA Y RESTA

Primero convertimos a una misma potencia de 10, luego sumamos o restamos y por último, convertimos el resultado de nuevo a notación científica:

$(2{,}35 \cdot 10^{23}) + (6{,}43 \cdot 10^{26}) = (2{,}35 \cdot 10^{23}) + (6{,}43 \cdot 10^{3} \cdot 10^{23}) = (2{,}35 + 643 \cdot 10^{3}) \cdot 10^{23} = (2{,}35 + 6430) \cdot 10^{23}$

$= 6432{,}35 \cdot 10^{23} = 6{,}43235 \cdot 10^{26}$

= - 6427,65 · 10 ^{23} = - 6,42765 · 10 ^{26}

Para sumar y restar hay que sacar factor común la potencia de 10 cuyo exponente (en valor absoluto) sea más pequeño.

Ejercicio resuelto

Resuelve las siguientes operaciones en notación científica y expresa el resultado en notación científica:

a) $(2{,}35 \cdot 10^{-7}) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{12})$

b) $(5{,}4 \cdot 10^{15}) \div (6{,}25 \cdot 10^{12})$

c) $\dfrac{4{,}7 \cdot 10^{20}}{3{,}3 \cdot 10^{23}}$

d) $\dfrac{(6{,}5 \cdot 10^{-12}) \cdot (3 \cdot 10^{15})}{(5{,}4 \cdot 10^{9})}$

e) $(2{,}7 \cdot 10^{12}) + (3{,}46 \cdot 10^{9})$

f) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^{8} - 6{,}25 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{5}}$

g) $\dfrac{6{,}1 \cdot 10^{18}}{7{,}5 \cdot 10^{7}} + 7 \cdot 10^{9}$

Comprueba lo aprendido

1. El resultado de la división $(3{,}5 \cdot 10^{-6}) \div (5{,}2 \cdot 10^{-10})$ expresado en notación científica es:

○

a) 0,673 · 10 ^{4}

c) $6{,}73 \cdot 10^{5}$

3. Indica cuál de los siguientes resultados corresponde a esta operación:

$$\frac{(6{,}5 \cdot 10^{14}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-10})}{1{,}25 \cdot 10^{14} - 2{,}4\ 10^{13}}$$

a) $1{,}35 \cdot 10^{17}$

b) $1{,}35 \cdot 10^{-9}$

La tecla EXP

fuente propia

Esta tecla la tenemos en la parte de abajo de la calculadora, junto a la tecla del punto decimal, y nos sirve para escribir la potencia de 10 del número en notación científica. Veamos un ejemplo para explicarnos mejor.

Supongamos que queremos escribir en la calculadora la expresión: $3{,}42 \cdot 10^5$, pues bien, en ese caso debemos teclear en la calculadora lo siguiente:

$\boxed{3.42}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{5}$ y la calculadora nos mostrará $\boxed{3.42^{\ 05}}$

Si queremos introducir la expresión: $2{,}54 \cdot 10^{-3}$; debemos hacerlo como sigue:

$\boxed{2.54}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{3}$ y la calculadora nos mostrará $\boxed{2.54^{\ -03}}$

Esto también nos debe valer para cuando recibamos la información de la calculadora ante una operación realizada por nosotros, por ejemplo si ante una operación la calculadora nos muestra:

$\boxed{4.38^{\ 08}}$ esto quiere decir $4{,}38 \cdot 10^8$

Suma y restas con números en notación científica

Veamos ahora como podemos hacer una suma, o resta, de dos números que tenemos en notación científica con nuestra calculadora científica.

Supongamos que tenemos que hacer la suma siguiente: $3.42 \cdot 10^7 + 6{,}4 \cdot 10^7$; bastaría con tener cuidado con meter cada número entre paréntesis para poder calcular su suma. Así haremos

$\boxed{(}$ $\boxed{3.42}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ $\boxed{6.4}$
$\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

y la calculadora nos mostrará la solución, cual es:

$\boxed{9.82^{\ 07}}$ que como bien sabes quiere decir: $9{,}82 \cdot 10^7$

Producto, división y raíces con números en notación científica

Exactamente igual que antes, esto es, teniendo cuidado con escribir cada número entre paréntesis, y siendo cuidadosamente ordenado, podemos introducir en la calculadora cualquier expresión con números en notación científica. Veamos como ejemplo algo complicado, con cocientes, producto y potencias. Sirva como ejemplo el siguiente problema de física, en el que se tratan cuestiones de astronomía:

Calcula la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna, cuya fórmula es $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, sabiendo los siguientes datos:

$G = \text{constante de gravitac universal} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$;
$m_1 = \text{Masa de la Tierra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$;
$m_2 = \text{Masa de la Luna} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg$;
$\text{Distancia entre la Tierra y la Luna} = r = 3{,}84 \cdot 10^{8}\ m$

Con estos datos podemos calcular F. Vamos a ver las teclas a introducir (como no estamos en física vamos a obviar las unidades para facilitar la comprensión del cálculo). En esta ocasión pondremos cada número en una sólo tecla para simplificar, y tenemos en cuenta que, en realidad G está en el numerador de la fracción, o sea, multiplicando a m_1 y a m_2 :

[( ] [(6.67 EXP (-) 11)] [X] [(5.98 EXP 24)]
[X] [(7.35 EXP 22)] [ )] [÷]
[((3.84 EXP 8) ^ 2)] [=]

la solución que nos dará la calculadora es:

[1.988162638 20] , que debemos interpretar, una vez redondeado a dos decimales, como: $1{,}99 \cdot 10^{20}$

En cuanto a las raíces, veamos otro ejemplo de astronomía, la Tercera ley de Kepler, que nos dice que "el cuadrado de periodo de revolución de un planeta alrededor del Sol, es proporcional al cubo de la distancia del planeta al Sol". Esto lo podemos formular de la siguiente manera:

$T^2 = k \cdot r^3$; donde k es la constante de proporcionalidad que es igual para todos los planetas. En realidad, $T = \sqrt{k \cdot r^3}$

Podemos ahora calcular el periodo de revolución de nuestra querida Tierra alrededor del Sol. Para ello solo necesitamos saber el valor de k y la distancia media de la Tierra al Sol:

$k = 3{,}35 \cdot 10^{18} \frac{m^3}{s^2}$;
$r = \text{distancia media de la Tierra al Sol} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ m$

En la calculadora tecleamos:

[√] [( ] [( ] [3.35 EXP 18] [ )] [X] [( ]
[(1.5 EXP 11) ^ 3] [ )] [=]

Y la calculadora nos contestará: [1.063308516 26] ; que tenemos que leer como: $1{,}0663 \cdot 10^{26}$ evidentemente en segundos, que al pasarlo a días nos sale aproximadamente 365 días, al pasarlo a meses la solución es 12, y en años la solución es 1 año.

Ejercicio resuelto

Resuelve con la calculadora científica las siguientes operaciones. Una vez resuelta pincha en *Mostrar información* y verás si has acertado o no. La respuesta que se ofrece es la salida que muestra la calculadora:

a) $(3{,}65 \cdot 10^{7}) + (2{,}86 \cdot 10^{7})$

b) $(4{,}82 \cdot 10^{-5}) - (9{,}23 \cdot 10^{-4})$

c) $(2{,}15 \cdot 10^{23}) \cdot (5{,}7 \cdot 10^{11})$

d) $\dfrac{8{,}91 \cdot 10^{17}}{9{,}87 \cdot 10^{8}}$

e) $(4{,}65 \cdot 10^{7})^{3}$

6. Aplicaciones a problemas

El universo: www.banthar.com

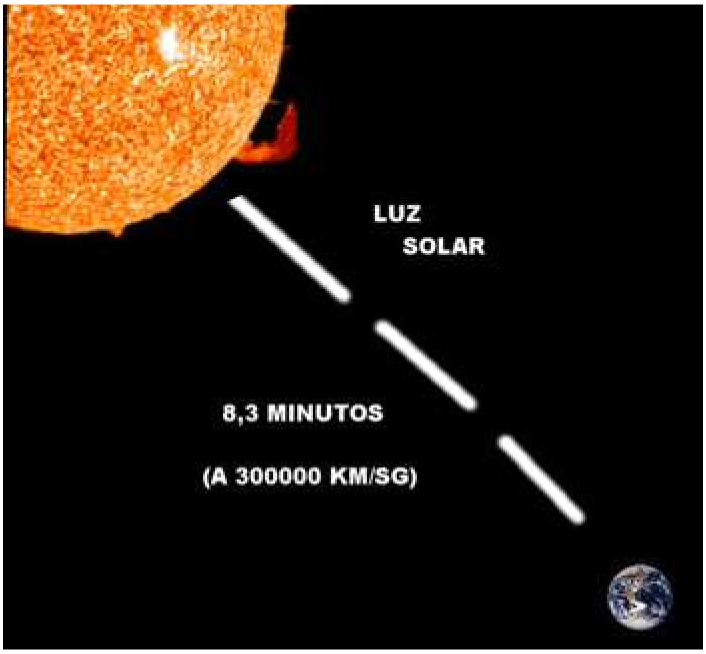
Bajo licencia de Creative Commons

Como ya has visto en este tema, en apartados anteriores, el conocimiento de la ciencia ha hecho necesaria las potencias y la utilizacion de la notacion cientifica. ¿Cómo podríamos escribir y operar con las distancias de las estrellas o saber la masa de una bacteria?.

La utilizacion de esta notación se hace imprescindible en cantidades llamadas "astronómicas" o en las micro cantidades.

Ahora ensayarás tus conocimientos en la realización de problemas con aplicaciones de estas cantidades.

Ejercicio resuelto



Año luz: recursos.cnice.mec.es

1 año luz es 9.460.000.000.000 km, es decir la distancia que recorre la luz en un año (velocidad de la luz = 300.000 km/sg).

1 segundo luz es, por tanto, 300.000.000 m= $3 \bullet 10^8$ m

a) Expresa 1 año luz en metros y notación científica.

b) Sabiendo que la luna esta a 1,3 seg-luz ¿cuántos metros son?

c) El sol esta a $1,5 \bullet 10^{11}$ metros de la tierra ¿cuántos seg-luz son?¿qué significa este resultado?

d) El telescopio Hubble ha encontrado una estrella, según los científicos la más alejada de la Tierra, a 0,4 trillones de seg-luz ¿de cuántos kilómetros estamos hablando?¿cuántos años tardaríamos, en apreciar, de empezar a brillar ahora, la luz de esa estrella? (1 trillon es 10^{18}).

Comprueba lo aprendido

La masa, en kg, de un sello de correos es:

○

a) 10^{10}

b) 10^{-12}

○

c) 10^{-3}

La masa, en kg, de la pirámide de Keops es:

○

a) 10^{10}

○

b) 10^{-12}

○

c) 10^{3}

La masa, en kg, de una bacteria es:

○

a) 10^{-3}

○

b) 10^{-12}

○

c) 10^{10}

Ejercicio resuelto

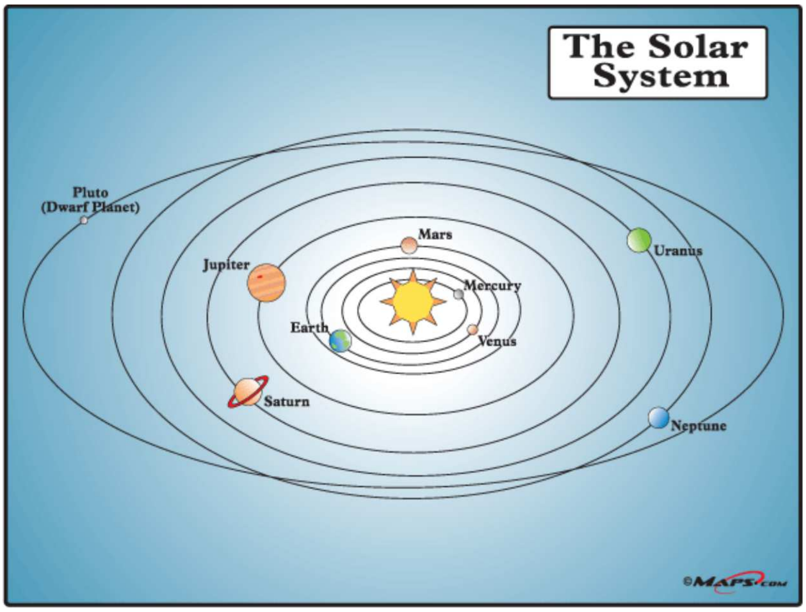
Tala de arboles: www.taringa.net

En España, el papel reciclado cada año equivale a 30 millones de árboles no talados.

a) Expresa el número de árboles no talados durante un siglo en notación científica.

b) Halla la raíz cuadrada del número de árboles no talados en 30 años gracias al reciclado y expresa el resultado en notación científica

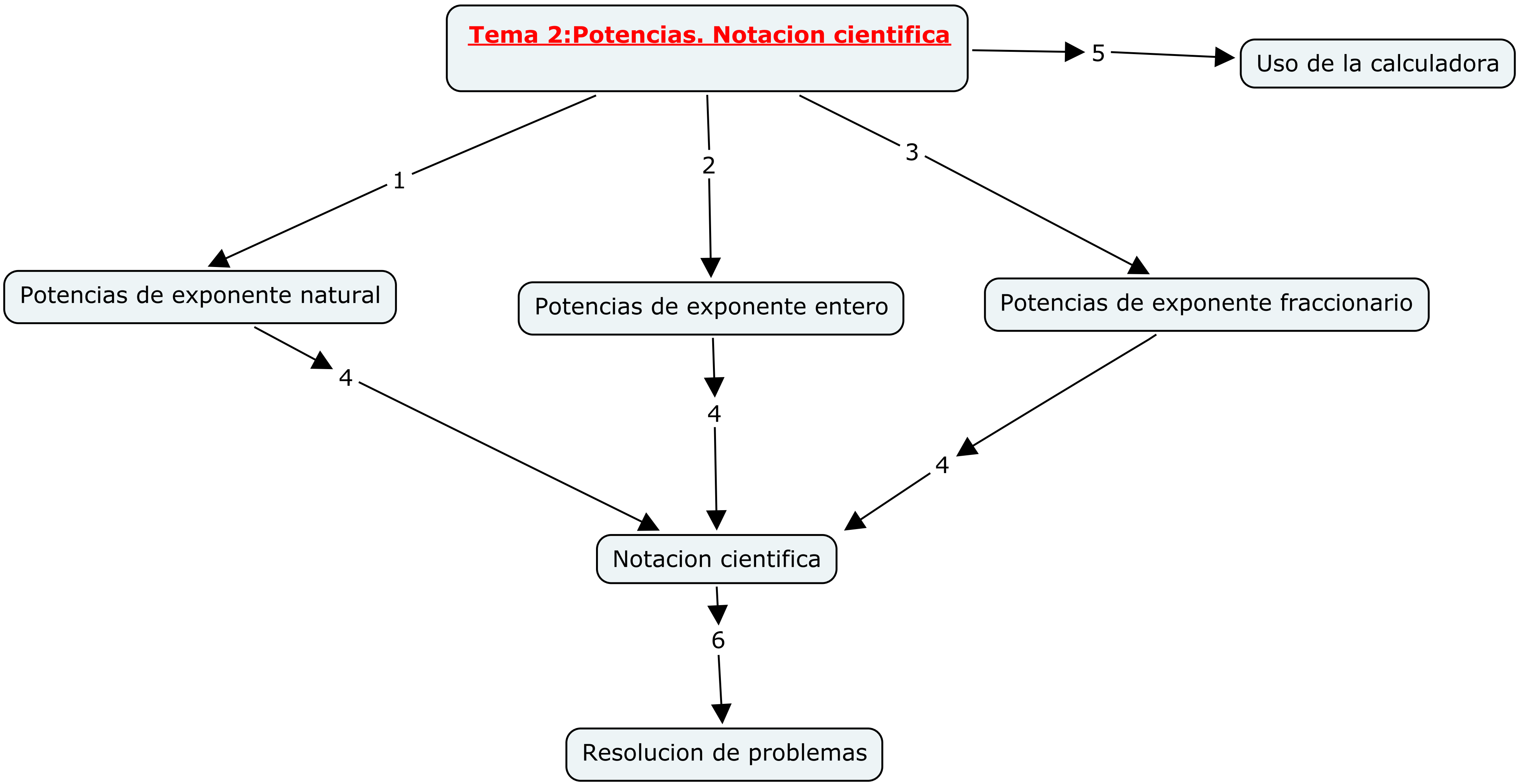
Ejercicio resuelto



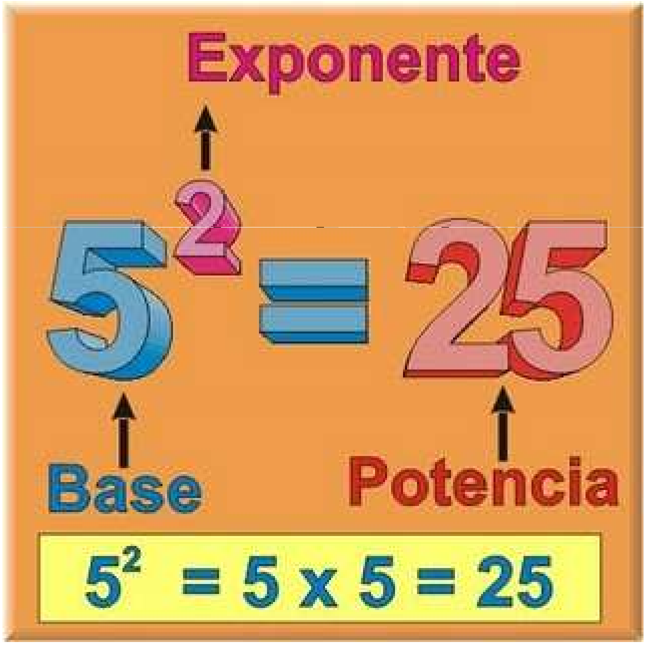
El periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de un año, aproximadamente 365,25 días, y el periodo de Plutón es de 7.820.000.000 segundos.

a) Expresa en notación científica y en segundos el periodo de la Tierra y Plutón.

b) ¿Cuántos años terrestres tarda Plutón en dar una vuelta alrededor del Sol?


Tema 2:Potencias. Notacion cientifica
5
Uso de la calculadora
1
2
3
Potencias de exponente natural
Potencias de exponente entero
Potencias de exponente fraccionario
4
4
4
Notacion cientifica
6
Resolucion de problemas

TEMA 2: POTENCIAS. NOTACIÓN CIENTÍFICA



1. POTENCIAS

POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

POTENCIA DE EXPONENTE ENTERO $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5}$

POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

2. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Producto de potencias de la misma base	$a^m . a^n = a^{m+n}$
Cociente de potencias de la misma base	$a^m / a^n = a^{m-n}$
Potencia de potencia	$(a^m)^n = a^{m.n}$
Producto de potencias del mismo exponente	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
Cociente de potencias del mismo exponente	$a^m / b^m = (a / b)^m$

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número está en notación científica si está expresado como ***producto de dos factores***:

→ Un número decimal cuya parte entera sea un dígito del 1 al 9.

→ Una potencia de 10 de exponente entero.

Ejemplos:

$$0{,}00025 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$25000 = 2{,}5 \cdot 10^{4}$$

$$50000 = 5 \cdot 10^{4}$$

4. OPERACIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

PRODUCTO

$$(2,35\cdot 10^{23})\cdot(6,43\cdot 10^{26}) = 15,1105\cdot 10^{49} = 1,51105\cdot 10^{50}$$

COCIENTE

$$(2,35\cdot 10^{23}):(6,43\cdot 10^{26}) = 0,36547\cdot 10^{-3} = 3,6547\cdot 10^{-4}$$

SUMA Y RESTA

$$(2,35\cdot 10^{23}) + (6,43\cdot 10^{26}) = (2,35 + 6,43\cdot 10^{3})\cdot 10^{23}$$

$$\ldots = 6432,35\cdot 10^{23} = 6,43235\cdot 10^{26}$$

5. USO DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA

$$3,42 \cdot 10^5 \longrightarrow 3.42^{05}$$

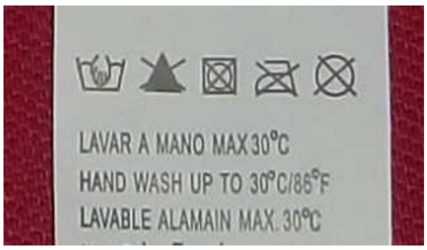
En nuestra vida cotidiana estamos tan acostumbrados a relacionarnos con los símbolos que los utilizamos sin ser conscientes de ello. Por ejemplo, las señales de tráfico que inundan nuestras calles o la gran variedad de carteles indicadores en comercios o transportes públicos.

Fuente propia

En el super

Un consumidor responsable y bien informado, debe entender la simbología que aparece en los envases y etiquetas de los distintos productos que utiliza.

Por ejemplo, Alberto acaba de recibir una nueva entrega de artículos para su tienda, y observa cómo con unos cuantos símbolos puede saber el cuidado que necesitan las diferentes prendas.



fuente propia

En las matematicas

El objetivo del lenguaje algebraico tiene el mismo sentido: sustituir por símbolos, elementos de la vida cotidiana. Al relacionar dichos símbolos con cantidades conocidas, obtenemos las expresiones algebraicas.

El camino a recorrer entre el lenguaje cotidiano y el algebraico no es tan complicado como puede parecer. En pocas palabras, consiste en sustituir elementos de diversa índole por símbolos. Ya hemos visto anteriormente que lo hacemos continuamente en la vida diaria.

Alberto, en su tienda, está haciendo balance del número de calcetines que tiene en exposición. Y ha anotado en su cuaderno lo siguiente: 3 b + 7 n + 5 m, con ello tiene la información de que dispone en ese momento de 3 pares de calcetines blancos, 7 negros y 5 marrones.

Fuente propia

De esa forma, con unos pocos símbolos puede tener la información completa. Como veremos más adelante, si sustituimos las letras que aparecen por el precio de cada par de calcetines, puede saber exactamente cuánto puede ganar si los vende todos.

La parte de la matemática que estudia este tipo de expresiones se llama ÁLGEBRA. Como podrás ver en este tema, es una poderosa herramienta para resolver problemas.

Reflexiona

Poco se sabe de la vida de Diofanto, pero sí es posible conocer la duración de la misma gracias al epitafio que dejó escrito sobre su tumba.

" *Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad* ."

¿Sabrías escribir en lenguaje algebraico la expresión que ayuda a saber los años que vivió Diofanto? Utiliza x para representar la edad de Diofanto.

1.1 Planteamiento general

Alberto salió de compras acompañado de su socio. Llevaba en la cartera 300 euros, y a su regreso sólo le quedaban 120. La compra la había pagado a medias con su socio; se trataba de botes de pintura para adecentar el almacén. Cada lata les había costado 12 euros. El transporte les había costado 36 euros, que también pagaron a medias. Quería Alberto saber cuántas latas de pintura habían comprado. Y no teniendo ganas de bajar al almacén para contarlas, anotó en una hoja la siguiente expresión:

$$\frac{12x+36}{2}=300-120$$

Ejercicio resuelto

Vamos a aplicar la simbolización algebraica al problema de Alberto que hemos visto antes. Vamos a seguir los pasos y ver qué expresión obtenemos. Como el número de latas no lo conozco, lo voy a representar por un símbolo, en este caso la letra x.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje algebraico
Nº de latas	x
12 € por lata. El costo del lote es	12x
Mas 36 € del transporte	12x+36
Alberto puso la mitad, el gasto es	(12x+36)/2
Por otra parte salio con 300 € y lleva 120, se ha gastado	300-120
Ambas cantidades deben de coincidir, es decir	(12x+36)/2=300-120

Importante

simbólicamente mediante una letra (incógnita) se llaman **ecuaciones** (si la incógnita sólo puede tomar determinados valores para que se cumpla la igualdad) o **identidades** (si la incógnita puede tomar cualquier valor).

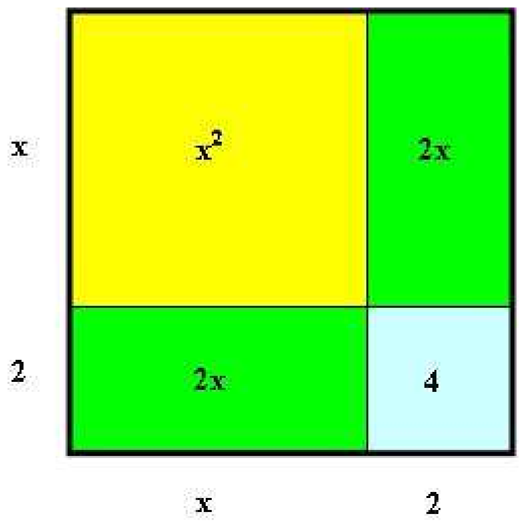
El mayor exponente al que esté elevado la incógnita x, x^2, x^3 ...se denomina grado de la incógnita. En caso de ser 1 se llaman de primer grado.

Ejemplo $\frac{2x+36}{2}=300-120$

Si el mayor grado de la incognita es 2, segundo grado.

Ejemplo $\frac{2x+36}{4}=300x^2$

Veamos ahora un ejemplo importante de identidad (igualdad que se cumple sea cual sea el valor que tome la incógnita).



La expresión $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ es verdadera cualquiera que sea el valor de x, y responde al hecho de que las expresiones de los dos miembros tienen siempre el mismo valor cuando la x se sustituye por cualquier número.

El primer miembro expresa el área del cuadrado grande, de lado x+2. Luego su área será $(x + 2)^2$. El segundo miembro divide el mismo área en cuatro partes: el cuadrado de lado x (la medida de su área, según la geometría, es lado por lado, es decir, x^2), dos rectángulos de lados x y 2 (cuya área conjunta totaliza 4x), y un cuadrado de lado 2. Si sumamos las 4 partes obtenemos:

$x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$.

Como el área es la misma, deben coincidir: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ y se verifica para cualquier x. Por eso es una identidad.

En general, si en vez de 2 sumamos una constante cualquiera a la que llamamos b: $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$ (es una de las "identidades notables").

Importante

El cuadrado de una suma : $(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$

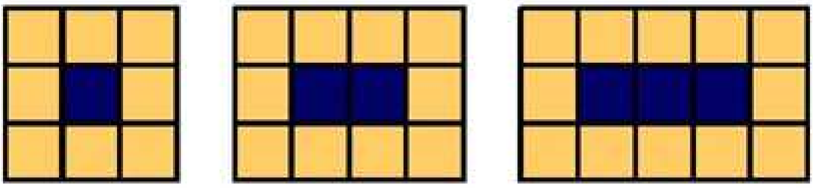
El cuadrado de una diferencia: $(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$

La diferencia de cuadrados: $x^2 - b^2 = (x + b).(x - b)$

(La tendrás memorizada como "suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados")

Comprueba lo aprendido

La calle donde se encuentra la tienda de moda de Alberto ha sido peatonalizada recientemente por el Ayuntamiento. Alberto observa el diseño que están utilizando para la solería de la calle. Como puedes apreciar en el dibujo, se compone de filas de losetas azules rodeadas por losetas naranjas.



¿Cuántas losetas naranjas se necesitarían para rodear "n" losetas azules?

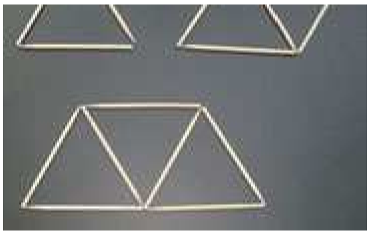
a) $3 \cdot n+6$

b) $6+2 \cdot n$

c) $2 \cdot n$

Comprueba lo aprendido

tranquila. Para entretenerse, Alberto está jugando con un puñado de palillos que se ha encontrado en la trastienda. Se ha dedicado a construir triángulos siguiendo el patrón que puedes ver en la siguiente imagen.



Alberto quiere saber cuántos palillos necesitará para construir "n" triángulos. Señala todas las opciones que expresen dicho valor.

- [ ] a) 3·n

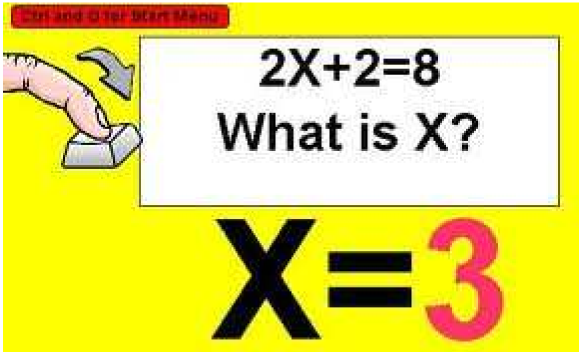
- [ ] b) 3+2·n

- [ ] c) 2·n+1

- [ ] d) 3+3·(n-1)

Mostrar retroalimentación

1.2. Resolucion de una ecuacion de primer grado



auladeintegracion08.blogspot.com

Vamos a ver los pasos generales a seguir en la resolución de ecuaciones de primer grado:

1º) Eliminación de paréntesis (cuidado con los signos menos antes del paréntesis)

$$x-\frac{3x}{4}=\frac{1}{3}\cdot(2x-1)+\frac{x}{6}$$

$$x-\frac{3x}{4}=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}$$

2º) Eliminar denominadores. Se calcula el m.c.m. y este se divide por cada uno de los denominadores multiplicando cada resultado por el numerador correspondiente.

Ejemplo:

$$x-\frac{3x}{4}=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}$$

$$mcd(3,4,6)=mcd(3,2^2,2\cdot 3)=2^2\cdot 3=12$$

$$\text{Multiplicando la ecuación al completo por } 12$$

$$12\cdot x-\frac{12\cdot 3x}{4}=\frac{12\cdot 2x}{3}-\frac{12\cdot 1}{3}+\frac{12\cdot x}{6}$$

$$12x-3\cdot 3x=4\cdot 2x-4+2x$$

3º) Operar: 12x-9x=8x-4+2x

4º) Transposición de términos. Pasar las "x" a un miembro y los términos sin "x" al otro. (recuerda que lo que está en un término, pasa al otro con signo contrario)

$$12x-9x-8x-2x=-4$$

5º) Se despeja la "x" (El coeficiente de la "x" pasa dividiendo al otro miembro)

$$-7x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$$

Ejercicio resuelto

$$\frac{x+2}{3}=-1$$

Multiplico Cruzado

$$x+2=-3$$

Despejo la "x"

$$x=-3-2=\ -5$$

Alternativa B)

psu-matematicas.blogspot.com

Resuelve la ecuacion: $\frac{3x-1}{20}-\frac{2(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$

Importante

- Si un término está sumando en un miembro podemos pasarlo al otro restando y videversa.
- Si un término está multiplicando a todo un miembro de una ecuación se puede pasar al otro miembro dividiendo.

lacunaprf512.wordpress.com

Los pasos que debes de seguir para resolver un problema son:

1. Identifica los datos y las incognitas.
2. Elegir la incognita, designarla con una letra y expresar los demás datos en función de ella.
3. Plantear la ecuación, traduciendo al lenguaje algebraico la igualdad que exista en el problema.
4. Resolver la ecuación planteada.
5. Comprobar que la solución obtenida cumple la ecuación de partida, para detectar posibles fallos de cálculo.
6. Interpretar los resultados obtenidos en relación al problema.
7. Comprobar los resultados obtenidos con el enunciado del problema.

Ejercicio resuelto

jesmanzan.com

a) Si a un número se le resta 1 el resultado es dos veces mayor que restandole 10. ¿de qué numero se trata?

Solución:

El números es "x". Restando 1 x-1 es el doble 2(x-10); igualando x-1=2(x-10).

Resolviendo x-1=2x-20, por tanto despejando x=19. Veamos que la solución es la correcta.

Si a 19 le restamos 1, nos queda 18 y es el doble de 19-10=9.

b) La edad del padre es de 32 años y el hijo, 8. ¿Cuánto tiempo debe de transcurrir para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Solución:

Si el tiempo que ha de transcurrir es **x ,** cuando transcurra x años el padre tiene 32+x y el hijo 8+x. Como el la del padre es el doble que la del hijo, queda la ecuación 32+x=2(x+8); resolviendo

x+32=2x+16; x=16 años. Comprobemos, dentro de 16 años las edades son 48 y 24 respectivamente

se comprueba que el padre duplica en edad al hijo.

c) ¿Cuántos años vivio Diofanto? (Recuerda el problema planteado en el apartado 1)

Comprueba lo aprendido

1) Hallar un número que restándole 2 se obtiene como resultado el doble de la resta del número y 3.

La ecuación que resuelve el problema es:

b) x-2=2x-3

c) x-2=2(x-3)

2) La solución al problema anterior es:

a) x=5

b) x=7

c) x=4

2. Ecuaciones de segundo grado

Muchos problemas no se pueden expresar en términos de una sola incógnita. Aparece entonces el estudio de los sistemas, que verás poteriormente.

E igualmente muchos problemas, aunque se reduzcan a una sola incógnita, no se pueden expresar en ecuaciones de primer grado.

Podrás observar que los dos procedimientos básicos (sumar, restar, multiplicar o dividir en los dos miembros de la ecuación; calcular algún término a partir del resultado conocido de una operación) se utilizan no sólo en las ecuaciones de primer grado. Son los dos instrumentos básicos para la resolución de ecuciones en general.

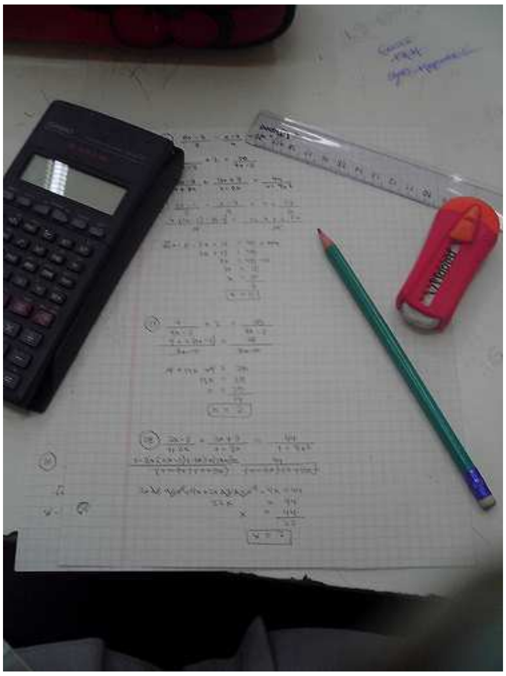
$$\mathbf{s}\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta}$$

$$\mathbf{s}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta}=-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta}$$

$$\mathbf{s}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta}=0$$

$$\mathbf{s}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta}=0$$

En este tema solamente estudiarás, además de las ecuaciones lineales o de primer grado, las de segundo grado o que se reducen a ellas por las transformaciones que venimos viendo. Las ecuaciones de segundo grado se suelen llamar cuadráticas (como las de tercer grado se llaman cúbicas, etc)



Flirck. Licencia CC

Hay muchas ecuaciones que no se reducen a ninguno de los tipos anteriores. En este curso verás algunas de ellas.

2.1. Ecuaciones completas

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven por procedimientos análogos, aunque ya sabes que en la mayoría de los casos se resuelven automáticamente aplicando una fórmula, "la fórmula".

Una ecuacion de segundo grado se expresa de la forma con $a \neq 0$

$$ax^2+bx+c=0$$

y se resuelve con la formula $x=\dfrac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

es decir una solucion es $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

y la otra $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Sólo tienes que tener cuidado en sustituir los coeficientes de la ecuación y hacer operaciones. Ten especial cuidado con la regla de los signos. (si b es negativo, entonces -b es positivo, etc)

Pero no siempre es necesaria (ni aconsejable) la fórmula. O en otras ocasiones tendrás que elaborar la expresión antes de aplicarla.

Importante

Se llama discriminante de una ecuacion de segundo grado $\Delta=b^2-4.a.c$ y dependiendo de su signo la ecuacion tiene:

- dos soluciones distintas si $\Delta>0$
- dos soluciones iguales si $\Delta=0$
- no tiene soluciones reales en otro caso

Ejercicio resuelto

Resolver las ecuaciones que siguen

a) x ^{2} +4x-5=0

c) $x^2+2x+4=0$ es una ecuación que no tiene soluciones.

Comprueba lo aprendido

Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x^2 -7x+12=0

- a) 3 y 4
- b) 4 y 5
- c) No tiene solucion real

b) Al resolver la ecuacion x^2 -9=0 las raices que obtenemos son:

- a) 0 y 2
- b) 3 y 0
- c) 3 y -3

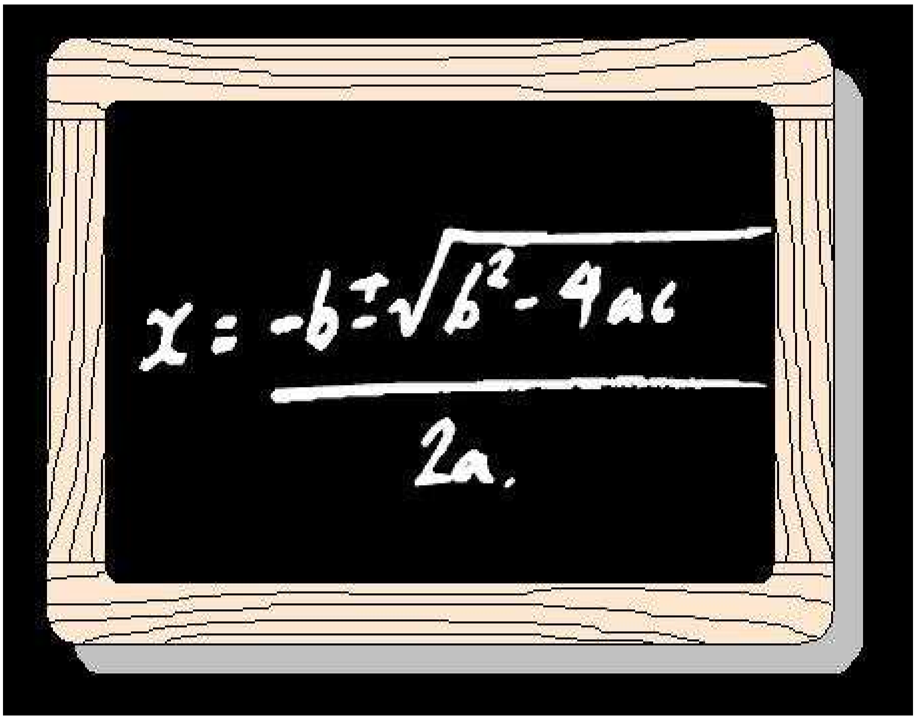
c) La raices de la ecuacion x^2 -2x= x son:

- a) 0 y 2

b) 3 y 0

c) 0 y -3

2.2. Otros casos



www.juntadeandalucia.es

Como ya hemos visto una el trinomio ax ^{2} +bx+c=0 tiene una formula general para resolverlas. Pero en aquellas que llamaremos incompletas, es decir cuando b=0 o c=0, conviene o es mas rapido por otros procedimientos particulares.

Vamos a estudiar los casos siguientes:

Tipo 1: ax ^{2} +bx=0

Tipo 2: ax ^{2} +c=0

Tipo 3: (x+e)(x+r)=0

Ejercicio resuelto

Las ecuaciones de segundo grado incompletas admiten una resolución casi inmediata. No te dejes llevar de la tendencia a aplicar siempre "la" fórmula.

a)Resuelve $x^2+5x=0$

b)Halla las soluciones de $x^2-7=0$

$x+3=0$ *entonces* $x=-3$
$x-2=0$ *y* $x=2$

Comprueba lo aprendido

$x^2+3x=0$ tiene como soluciones:

- ○ 0 y -3
- ○ 0 y 3
- ○ No tiene soluciones
- ○ Tiene infinitas soluciones

$2x^2-5=0$

- ○ No puede resolverse por el signo negativo de 5
- ○ No puede resolverse porque 5 no tiene raiz cuadrada exacta
- ○ Una de sus soluciones es 0
- ○ tiene como soluciones las raices cuadradas de 2,5

$(x-2)(x+1)=0$

- ○ Una de sus soluciones es -2
- ○ Una de sus soluciones es 1

- Tiene como soluciones 2 y -1

ENVIAR RESPUESTAS

notenemosnadaqhacer.blogsome.com

El problema de los grifos (regla inversa):

Un estanque se llena con un grifo en x_1 horas, con un segundo grifo en x_2 y asi sucesivamente. ¿cuanto tardara con todos a la vez? La ecuacion se plantea con la siguiente expresion:

$$\frac{1}{x_t}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+....+\frac{1}{x_n}$$

Ejemplo 1: Un grifo tarda en llenar un deposito 3 horas, otro solo necesita 2 horas ¿Cuanto tiempo emplearan los dos a la vez?

La ecuacion planteada sera siendo x el tiempo total empleado por ambos

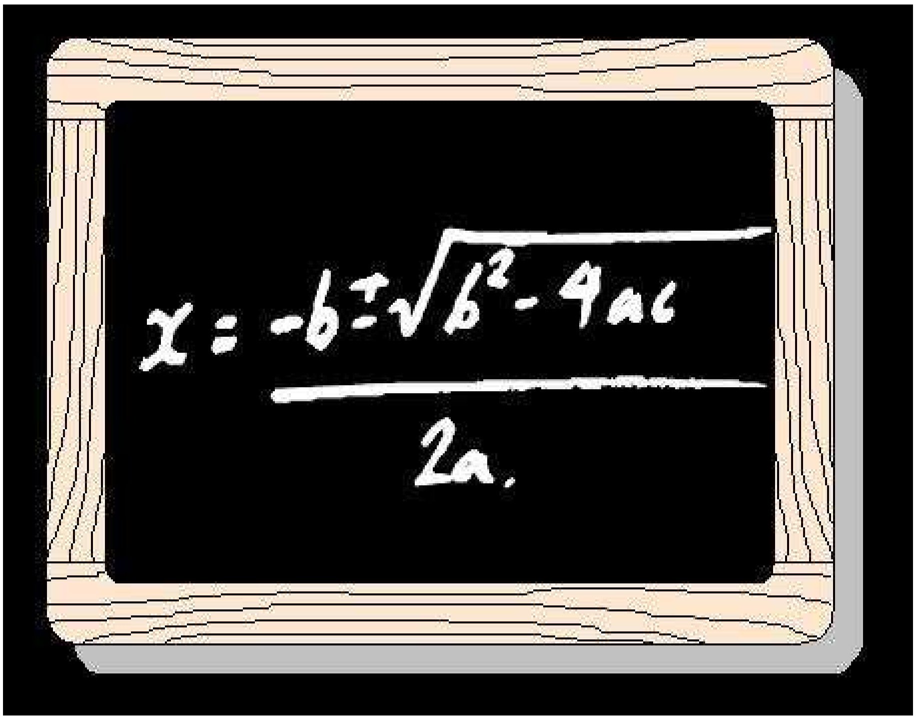
$$\begin{array}{l}
\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\\
mcm(x,2,3)=6x\\
6=2x+3x\\
5x=6\\
x=\frac{6}{5}=1.2\ horas\\
1\ hora\ y\ 12\ minutos
\end{array}$$

Ejemplo 2: Un obrero necesita 9 horas mas para terminar el trabajo solo que otro compañero, pero si lo hacen juntos el tiempo se reduce en 3 horas respecto al que menos tarda. ¿Cuanto se tarda?

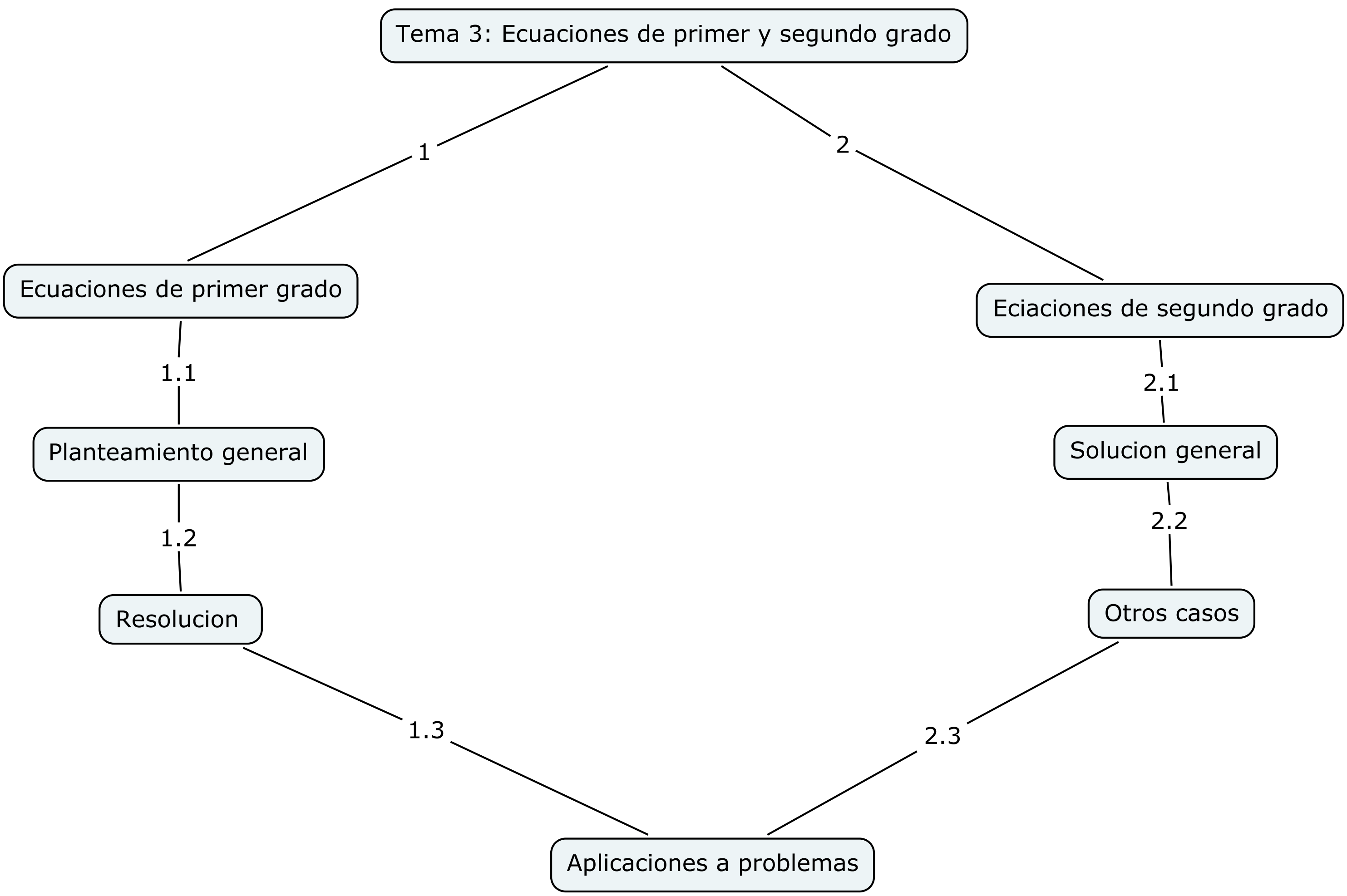
$$\begin{array}{l}
\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}\\
mcm(x-3,x,x+9)=x(x-3)(x+9)\\
x(x+9)=(x-3)(x+9)+x(x-3)\\
operando\ queda\ x^2-6x-27=0\\
es\ decir\ \ x_1=9\ \ x_2=-3
\end{array}$$

Un obrero tarda 9 horas, el otro 18 y en total lo harian juntos en 6 horas (la solucion negativa no se tiene en cuenta)

Ejercicio resuelto



1) Para vallar un terreno rectangular de $3000\ m^2$ se ha necesitado 220 mentros de cerca. Calcula las dimensiones del terreno.

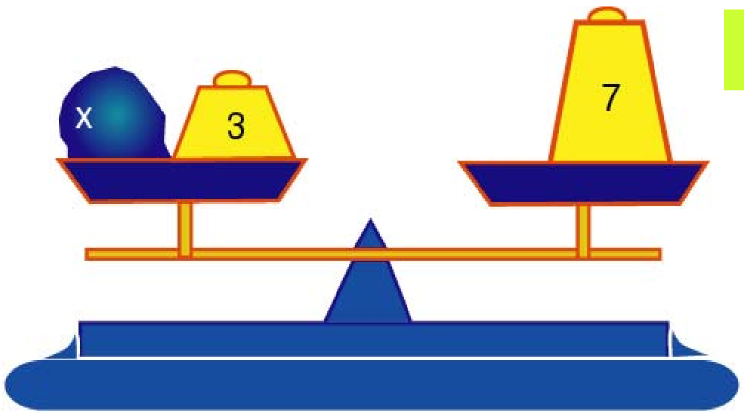

Tema 3: Ecuaciones de primer y segundo grado
1
2
Ecuaciones de primer grado
Eciaciones de segundo grado
1.1
2.1
Planteamiento general
Solucion general
1.2
2.2
Resolucion
Otros casos
1.3
2.3
Aplicaciones a problemas

TEMA 3. ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

1. ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

1.1 Planteamiento general

- **Identidad:** Es una expresión con una igualdad que se cumple siempre.
  - Identidad **numérica**: Sólo aparecen números.
  - Identidad **algebraíca**: Aparecen números y letras.
- **Ecuación:** Es una expresión con letras y números en una igualdad que se cumple sólo para ciertos valores de las letras.



¿Cuánto vale x si la balanza está equilibrada?

Hay que resolver le ecuación $x + 3 = 7$

$$x = 7 - 3$$

$$x = 4$$

La **solución** es $x = 4$ porque $4 + 3 = 7$

Soluciones de una ecuación son los valores que tiene que tomar la incógnita para que se verifique la igualdad.

Educación Permanente

1.2 Resolución de una ecuación de primer grado (I)

Resolver una ecuación es hallar sus soluciones

Ecuación	Soluciones
$x + 3 = 7$	Una
$x + 3 = y + 2$	Infinitas
$x + 5 = x - 1$	Ninguna

Una, Infinitas: Compatibles

Ninguna: Incompatibles

En este caso es una identidad

No hay ningún número tal que al sumarle 5 y restarle 1 dé lo mismo

JUNTA DE ANDALUCIA

1.2 Resolución de una ecuación de primer grado (II)

1	2
$5x - 3 = 7 - (1 - 2x)$	$x - 6 = -2(3x - 4)$
$5x - 3 = 7 - 1 + 2x$	$x - 6 = -6x + 8$
$5x - 3 = 6 + 2x$	$x = -6x + 14$
$5x = 9 + 2x$	$7x = 14$
$3x = 9$	$x = 2$
$x = 3$	

1.2 Resolución de una ecuación de primer grado (III)

3

$$\frac{x}{4} = 1 - \frac{x-4}{6}$$

m.c.m (4, 6) = 12

$$12 \cdot \frac{x}{4} = 12 - 12 \cdot \frac{x-4}{6}$$

$$3x = 12 - 2(x - 4)$$

$$3x = 12 - 2x + 8$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

4

$$\frac{3x}{2} - \frac{2x+1}{5} = \frac{5x}{4} + 7$$

m.c.m (2, 5, 4) = 20

$$20 \cdot \frac{3x}{2} - 20 \cdot \frac{2x+1}{5} = 20 \cdot \frac{5x}{4} + 140$$

$$30x - 8x - 4 = 25x + 140$$

$$22x - 4 = 25x + 140$$

$$-3x = 144$$

$$x = -48$$

1.2 Resolución de una ecuación de primer grado (IV)
Con qué debemos tener cuidado

- Al eliminar un paréntesis precedido de un signo menos, hay que cambiar todos los signos de los términos del paréntesis.
- En el caso de que un signo menos preceda a una fracción, éste ha de cambiar el signo del numerador o del denominador.

$$-3(x-2) = 3(-x+2) = -3x+6$$

También se puede poner:

$$-3(x-2) = 3(x-2)(-1)$$

Observa la siguiente ecuación:

$$-\frac{3x-5}{20} = \frac{x}{5}$$

Las siguientes igualdades son también válidas:

$$\frac{-3x+5}{20} = \frac{x}{5}$$

$$\frac{3x-5}{-20} = \frac{x}{5}$$

$$\frac{3x-5}{20} = -\frac{x}{5}$$

2. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

- Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación que puede expresarse de la
forma general $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números y $a \neq 0$.
- Las **soluciones** de una ecuación son los valores de x que al ser sustituidos verifican la ecuación.

Ecuaciones	Prueba para $x = 5$ y $x = -9$	Respuesta
$x^2 - 3x - 4 = 0$	$5^2 - 3 \cdot 5 - 4 \neq 0$ $(-9)^2 - 3 \cdot (-9) - 4 \neq 0$	$x = 5$ no es solución $x = -9$ no es solución
$x^2 - 6x + 5 = 0$	$5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 0$ $(-9)^2 - 6 \cdot (-9) + 5 \neq 0$	$x = 5$ sí es solución $x = -9$ no es solución
$3x^2 + 12x - 135 = 0$	$3 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 - 135 = 0$ $3(-9)^2 + 12(-9) - 135 = 0$	$x = 5$ sí es solución $x = -9$ sí es solución

2.1 Ecuaciones completas

- **Resolución de $ax^2 + bx + c = 0$**

- Se resta c en los dos miembros: $ax^2 + bx = -c$
- Se multiplica por 4a: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
- Se busca un cuadrado perfecto en el primer miembro, para lo cual hay que sumar b^2 a los dos miembros:
- $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
- Se expresa el primer miembro como cuadrado perfecto:
- $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
- Se extrae la raíz cuadrada y se tienen dos ecuaciones de primer grado:

$$\begin{cases} 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \end{cases}$$

- Se despeja x en ambas ecuaciones:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.2 Otros casos (I)

- Si en una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, alguno de los coeficientes b o c es nulo, se dice que es incompleta.
- Las ecuaciones incompletas son de la forma:
  - $ax^2 = 0$
  - $ax^2 + c = 0$
  - $ax^2 + bx = 0$

- **Resolución de ecuaciones con b = 0**: en este caso
- las ecuaciones se resuelven directamente, despejando x.

- $b = 0, c = 0$

•Resuelve $2x^2 = 0$
- Se divide por 2: $x^2 = 0$
- Se extrae la raíz cuadrada: $x = 0$

- $b = 0$

•Resuelve $7x^2 – 63 = 0$
- Se suma 63: $7x^2 = 63$
- Se divide por 7: $x^2 = 9$
- Se extrae la raíz cuadrada: $x = 3, x = – 3$

2.2 Otros casos (II)

- **Resolución de $ax^2 + bx = 0$**: en este caso se descompone
- en factores sacando factor común x

- Resuelve $4x^2 - 9x = 0$
- Se saca factor común x: $x(4x - 9) = 0$
- Se iguala a 0 el primer factor: $x = 0$
- Se iguala a 0 el segundo factor: $4x - 9 = 0$

$$x = \frac{9}{4}$$

La ecuación $ax^2 + bx = 0$ siempre tiene la solución x = 0, siendo su otra solución

$$x = \frac{-b}{a}$$

JUNTA DE ANDALUCIA

Número de soluciones de una ecuación de segundo grado

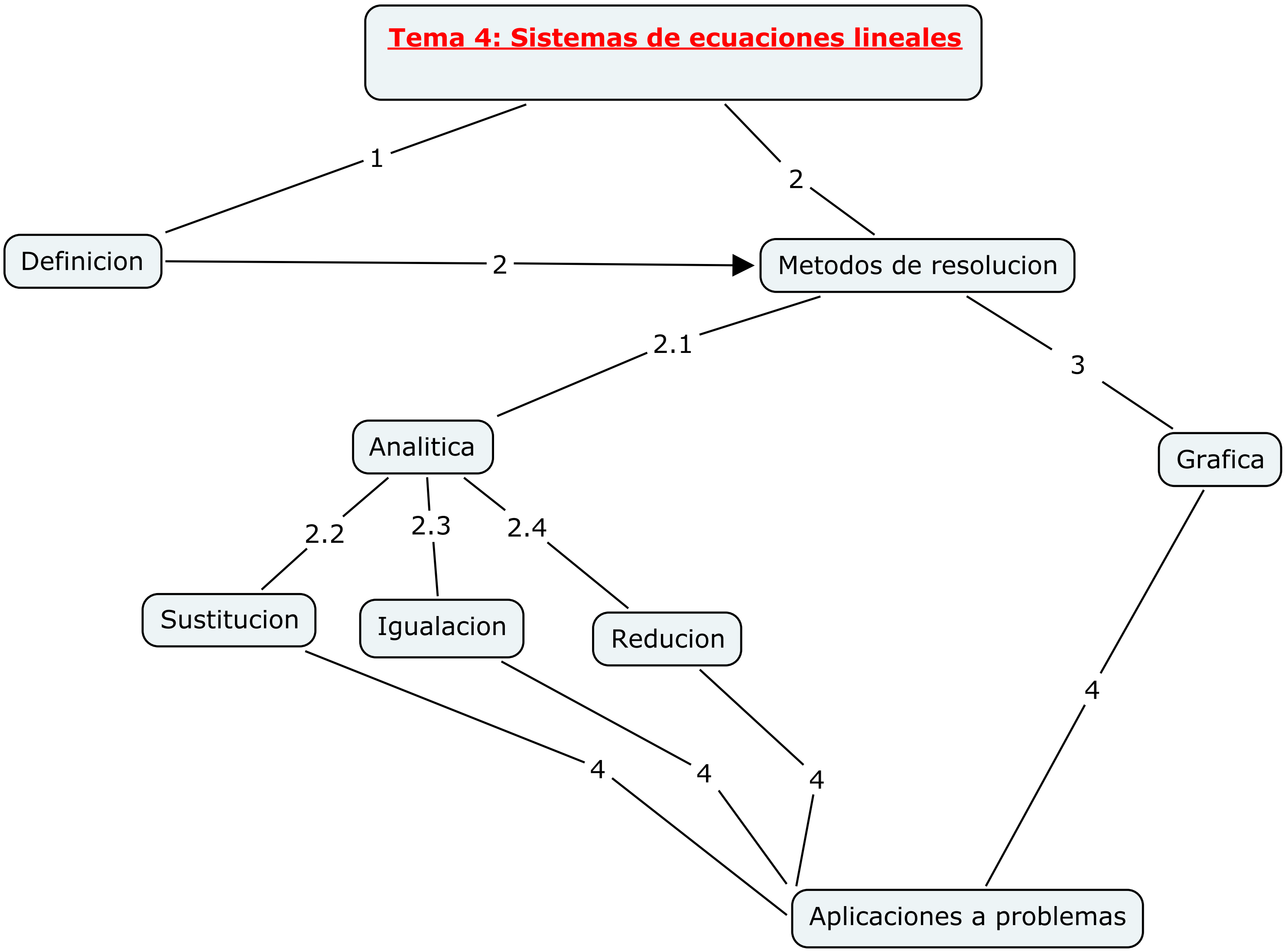
Hemos visto que las soluciones de una ecuación de segundo grado vienen dadas por la relación

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Discriminante: Δ
Determina el número de soluciones
de la ecuación

- Si $\Delta > 0$,existen dos soluciones reales
- Si $\Delta = 0$, existe una única solución real
- Si $\Delta < 0$, no existen soluciones reales


Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales
1
2
Definicion
2
Metodos de resolucion
2.1
3
Analitica
Grafica
2.2
2.3
2.4
Sustitucion
Igualacion
Reducion
4
4
4
4
Aplicaciones a problemas

Resumen

Tema 4: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Un ***sistema*** de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es una expresión del tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ son números y x e y las incógnitas.

La ***solución*** de un sistema es una pareja de valores que al sustituirlos en las incógnitas verifican a la vez las dos igualdades.

JUNTA DE ANDALUCIA

Número de soluciones de un sistema

Si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ SCD tiene una única solución

Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ SCI tiene infinitas soluciones

Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ S I no tiene solución

Método de sustitución

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de sustitución a través de los siguientes pasos:

1. En una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas en función de la otra.

2. La incógnita despejada se sustituye en la otra ecuación, con lo que obtenemos una ecuación donde solo hay una incógnita.

3. Se resuelve la ecuación obtenida obteniendo el valor de una de las variables.

4. Se sustituye el valor obtenido en la variable despejada en el apartado 1 y se obtiene la otra incógnita.

Ver la presentación o el ejercicio resuelto del apartado 2.1

Método de igualación

Los pasos a seguir en el método de igualación son los siguientes:

1. Despejamos en las dos ecuaciones la misma incógnita.

2. Igualamos entre sí los dos valores despejados. De esa manera obtenemos una ecuación donde sólo aparece la otra incógnita.

3. Se resuelve la ecuación obtenida. Así tenemos el valor de una de las incógnitas.

4. Se sustituye el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las dos expresiones despejadas en el paso 1 y se halla el valor de la otra incógnita.

Ver ejemplo en la presentación del apartado 2.2

Educación Permanente

Método de reducción

Tenemos que seguir los siguientes pasos:

1. Se multiplican una o las dos ecuaciones por números convenientes para que nos queden dos ecuaciones en las que una de las incógnitas vaya multiplicada por el mismo número cambiado de signo.

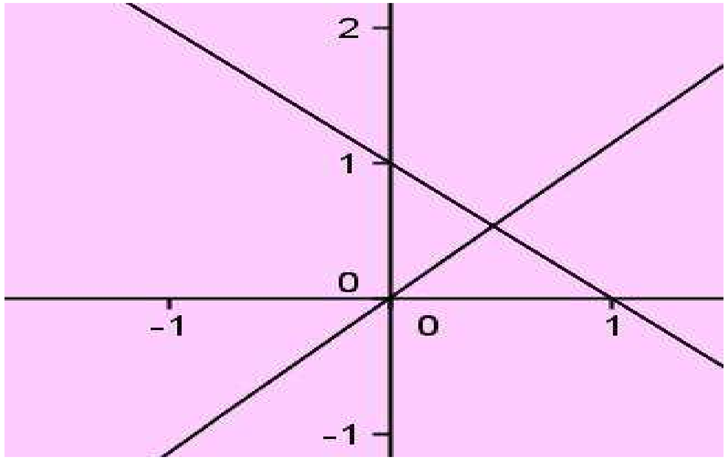
2. Se suman las dos ecuaciones término a término

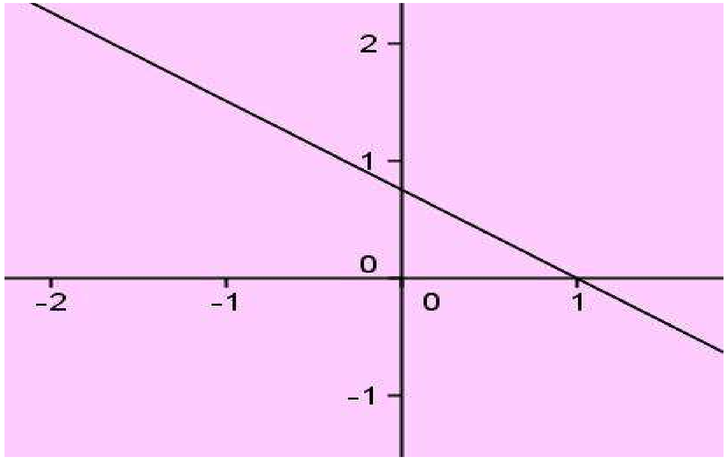
3. Ahora nos queda una ecuación con una sola incógnita, la resuelves.

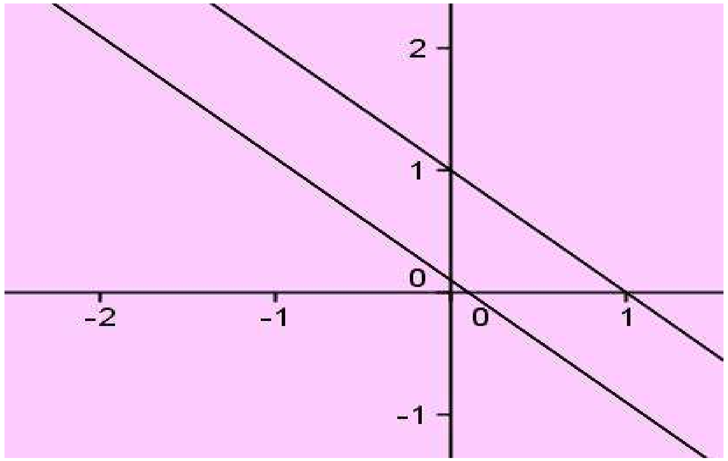
4. El valor de la incógnita resuelta se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones primeras , se resuelve la ecuación que nos queda y ya tienes la solución completa del sistema.

Ver el ejemplo que aparece en la presentación del apartado 2.3

Resolución gráfica de un sistema







Si resolvemos gráficamente un sistema, podemos obtener:

1. Dos rectas secantes: SCD (una solución)
2. Dos rectas coincidentes: SCI (∞ soluciones)
3. Dos rectas paralelas: SI (sin solución)

Aplicación a la resolución de problemas

Polya resumió en los siguientes pasos la mejor estrategia para resolver problemas:

1. Entender el problema

2. Configurar un plan

3. Ejecutar el plan

4. Mirar hacia atrás (comprobar que la solución es la correcta.

Curiosidad

www.marca.com

bajo licencia de creative commons

El 11 de Julio de 2010 España se proclamó campeón del mundo de fútbol en Sudáfrica. Seguro que al recordarlo, una sonrisa acaba de dibujarse en tu rostro. Dicen que es un acontecimiento único, que no se sabe si lo volveremos a vivir. Y eso es lo que yo me planteé, ¿volveremos a vivir ser campeones del mundo? Desde luego, contar con unos jugadores tan buenos como los que hemos tenido en este mundial va a ser difícil, tal vez si tuviéramos los mismos dentro de cuatro años, podríamos volver a levantar la copa en el mundial de Brasil del 2014.

Pero, ¿cuántos de estos jugadores estarán ahí? Seguro que los que tienen más de 30 años no estarán, pero lo jóvenes, tal vez sí. Pensé que para ver con quiénes podíamos contar, lo mejor era saber la edad de cada uno. La siguiente tabla muestra la edad de cada uno de los 23 componentes de la selección que nos llevó a la gloria (la edad es a fecha 11 de Junio de 2010, día de la final).

JUGADOR	EDAD	JUGADOR	EDAD	JUGADOR	EDAD	JUGADOR
CASILLAS	29	VILLA	28	MATA	22	LLORENTE
ALBIOL	24	XAVI	30	XAVI ALONSO	28	JAVI MARTINEZ
PIQUÉ	23	TORRES	26	RAMOS	24	SILVA
MARCHENA	30	CESC	23	BUSQUET	21	NAVAS
PUYOL	32	CAPDEVILLA	32	ARBELOA	27	REINA
INIESTA	26	VALDÉS	28	PEDRO	22	

fuente propia

Como ves, unos son mayores que otros, o unos menores que otros, que es decir lo mismo pero al revés. Las edades van desde los 21 de Busquet y Javi Martínez, hasta los 32 de Puyol y Marchena. Yo tenía la duda de quién era el portero mayor, y viendo éstos datos, veo que Casillas es mayor que Valdés, y a su vez, Valdés es mayor que Reina. Y aunque pensaba que Marchena era mayor que Xavi, resulta que no, que tienen la misma edad.

algunas ocasiones, utilizar algo que llamaremos desigualdad, y que refleja que un número es mayor que otro, o bien, que un número es menor que otro, que es decir lo mismo, pero al revés.

1. EL ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES

Tal como hemos visto en la introducción de este tema, si tomamos dos jugadores al azar, el jugador A, cuya edad va a ser a, y el jugador B, cuya edad es b, y comparamos sus edades, nos podemos encontrar con estas tres situaciones:

El jugador A es mayor que el jugador B, o sea, $a > b$;

o bien, que el jugador A es menor que el jugador B, esto es, $a < b$;

o por último, que sean de la misma edad, lo que escribimos, como muy bien sabes: $a = b$

Importante

Dados dos números reales cualesquiera, a y b, se pueden dar estas tres situaciones:

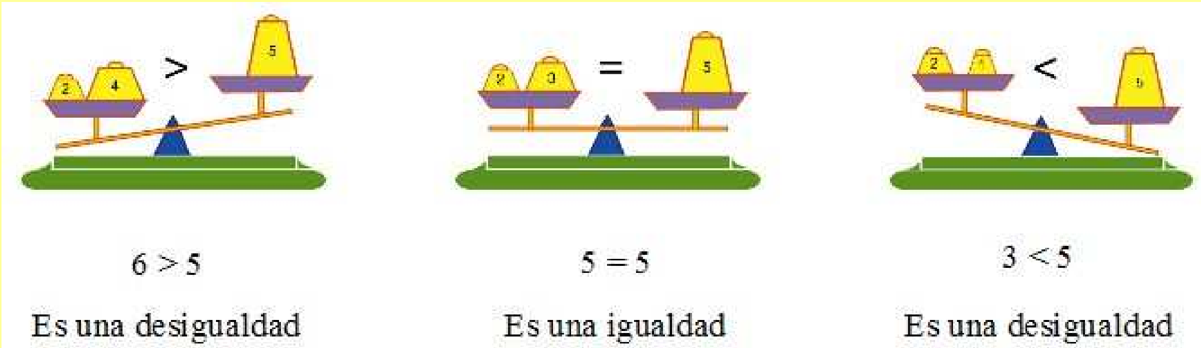
$a < b$; a menor que b. A la expresión la llamamos **desigualdad**

$a = b$; a igual que b. A la expresión la llamamos **igualdad**

$a > b$; a mayor que b. A la expresión la llamamos **desigualdad**

Esta propiedad que cumplen todos los números reales, hace que su conjunto, el conjunto de los números reales, sea **totalmente ordenado** . Hablamos entonces, del **orden de los números reales** .

Otra forma de visualizar las desigualdades y el orden de los números reales sería:



fuente propia

2. RELACIONES ENTRE ORDEN Y OPERACIONES

Cuando se tiene una nueva propiedad sobre el conjunto de los números reales, lo primero que debe plantearse es cómo actúa ésta propiedad con las operaciones básicas que tenemos en nuestro conjunto, que son: la suma y el producto. Evidentemente, cuando decimos suma, estamos incluyendo a la resta, y cuando decimos producto, también hablamos de la división.

www.ludoteka.com/siete-y-medio.html

Y esto es lo que vamos a ver en este apartado. Para ello vamos a separarlos en dos epígrafes, y te vamos a pedir que seas tú, quien mediante unas actividades, vayas descubriendo cómo se comporta nuestro recién estrenado orden de los números reales, con las ya conocidas operaciones, suma y producto.

Ejercicio resuelto

Vamos a estudiar cómo se comporta el orden de los números reales y la suma. Para ello, vamos a realizar varios ejercicios, de manera que sumemos tanto números positivos como negativos a una desigualdad, para comprobar si se mantiene la desigualdad una vez hayamos realizado la suma.

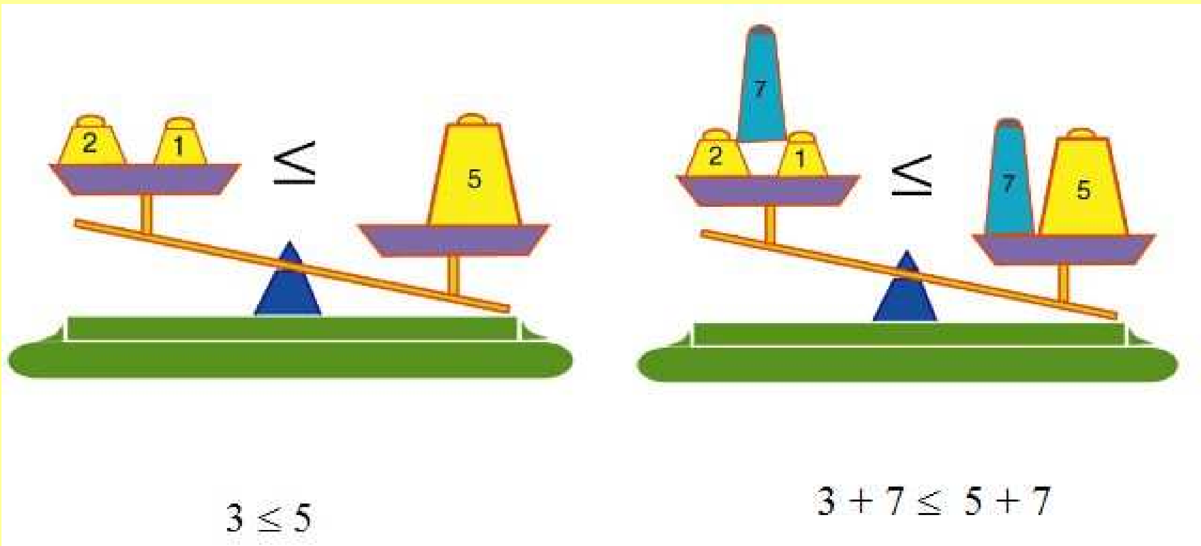
Aplica a la desigualdad 3< 5, las siguientes transformaciones.

a) Suma 2 a cada uno de los miembros de la desigualdad y comprueba si es cierta.

b) Suma ahora 1,72 a cada miembro y comprueba.

c) Suma esta vez -5 a cada miembro, y verifica si se mantiene la desigualdad.

Una vez realizado los tres apartados, debes llegar a una conclusión, y activar la opción "Ver solución" para comprobar que estás en lo cierto.



fuente propia

Ejercicio resuelto

Escribe las siguientes informaciones utilizando las desigualdades: (comprueba

b) La tarifa de mi móvil es plana desde las 10 de la mañana hasta las 6 de la tarde.

c) La edad del seleccionador español Vicente Del Bosque es 59 años, cifra que supera las edades de Busquet y Javi Martínez (ambos tienen 21)

d) Como todo el mundo sabe el valor del número real π es menor que 4.

Ejercicio resuelto

A continuación te proponemos una serie de ejercicios que te deben llevar a descubrir dos propiedades de las desigualdades. Lo que debes hacer es multiplicar (o dividir) los dos miembros de una desigualdad, y comprobar si se mantiene o no.

Dada la siguiente desigualdad: $2 < 5$. Realiza:

a) Multiplica los dos miembros por 3, y comprueba si se mantiene la desigualdad.

b) Multiplica ahora por 4,5 y vuelve a comprobar.

c) Multiplica esta vez por 1/2, o lo que es lo mismo, divide por 2 ambos miembros, y comprueba la desigualdad.

Una vez hayas hecho los tres apartados y hayas llegado a una conclusión, pincha en "Ver solución" y comprueba.

Veamos ahora que ocurre cuando multiplicamos por un número negativo. Sea la desigualdad: $2 < 4$. Realiza:

a) Multiplica por -1, y comprueba a ver si se mantiene la desigualdad o se obtiene otra distinta.

b) Multiplica ahora por -4, y vuelve a comprobar.

c) Divide ahora por -2, a ver que ocurre.

Cuando hayas llegado a una conclusión, pincha en "Ver solución", y obtén la propiedad adecuada.

Por último, debemos mencionar que si multiplicamos los dos miembros de una desigualdad por 0, la desigualdad deja de tener sentido.

3. INECUACIONES. DEFINICIONES

Importante

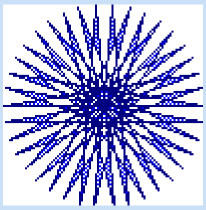
· Una **inecuación** es una desigualdad entre letras y números, relacionados mediante operaciones aritméticas. A las letras las llamaremos **incógnitas** .

Recordemos que las operaciones aritméticas son las siguiente: suma, resta, producto, división y potenciación.

· Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es una inecuación con una sóla incógnita, y cuyo exponente es necesariamente 1.

Ejemplos:

$2x-5 < 7$



$3-x > 2x-5$

Llamaremos **soluciones** de una inecuación a todos los números reales que verifican la inecuación cuando sustituimos su valor en la incógnita de la misma.

Ejemplo:

En la inecuación $2x-5 < 7$, el número 3 verifica la inecuación, ya que: $2·3-5 = 1$ que es menor que 7.
También el 2 lo verifica, ya que $2·2-5 = -1$, que también es menor que 7. Y el 1, y el 0, y el -7, y muchos más, y es que la solución de una inecuación es, generalmente, un conjunto de infinitos números reales.

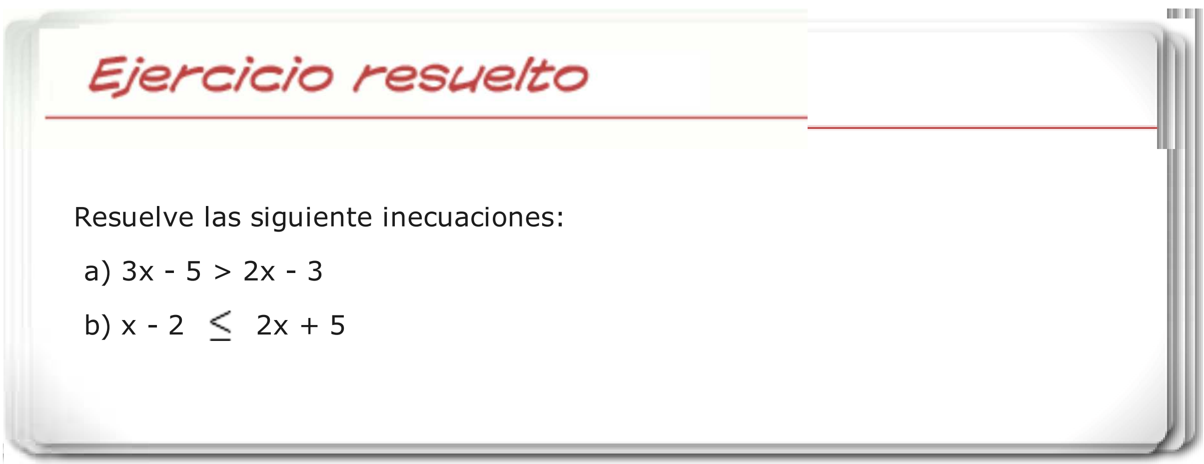
Vamos a aprender a resolver inecuaciones. Lo vamos a hacer en tres pasos sencillos, con los que además estás familiarizado porque te recordarán mucho a las ecuaciones.

En primer lugar veremos cómo utilizar la suma en la resolución de inecuaciones, después cómo utilizar el producto -aquí debemos tener cuidado al multiplicar por un número real negativo-, y por último resolveremos inecuaciones en general, con sus fracciones, paréntesis, etc ...

4.1 RESOLUCIÓN DE INECUACIONES MEDIANTE LA SUMA

Vamos a ver este punto, a través de una presentación en la cual deberías ir entendiendo y anotando cada diapositivas que vas viendo en tu cuaderno. Más tarde deberás aplicar la misma técnica para obtener las soluciones de una inecuación de primer grado con una incógnita.

Pincha en la diapositiva que tienes más abajo y verás la siguiente.



Resuelve ahora las siguientes inecuaciones:

a) $5x - 9 > 4x + 2$

b) $2x + 5 < 3x + 5$

c) $x - 2 + 2x > 4x - 6$

4.2 RESOLUCIÓN DE INECUACIONES MEDIANTE EL PRODUCTO

Veamos de la misma manera que en el punto anterior, la forma de utilizar el producto para resolver una inecuación:

Ejercicio resuelto

Como ya sabes, hay que tener cuidado en resolver una inecuación cuando multiplicamos por un número negativo, puesto que en tal caso la desigualdad cambia de sentido. Resuelve esta inecuación de dos maneras diferentes: una primera en la que te lleves las incógnitas x al segundo miembros (la resolverás sin problemas, porque no tendrás que dividir por un número negativo); y una segunda, donde deberías traer las incógnitas al primer miembro, y tendrás que aplicar lo dicho anteriormente, y después pincha en "Mostrar retroalimentación", para comprobar que la hiciste bien.

La inecuación a resolver es: $2x - 3 < 4x + 5$

Comprueba lo aprendido

Resuelve la siguiente inecuación:

3x - 5 > 3 -5x

- ○ x < 1 $\rightleftharpoons (-\infty, 1)$
- ○ x > 1 $\rightleftharpoons (1, +\infty)$

Resuelve la siguiente inecuación:

$1 - 4x \leq -10x + 5$

- ○ $x \geq \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightleftharpoons \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$
- ○ $x \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightleftharpoons \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

Veamos varios casos de resolución de inecuaciones con fracciones y paréntesis. La manera de proceder es igual que en las ecuaciones, te servirá de repaso de éstas.

Lo más adecuado es que vayas realizando las inecuaciones antes de verlas en las diapositivas que siguen. Así, las diapositivas te servirán de comprobación, o si lo has hecho mal, lo aprenderás mucho mejor.

Veamos otro ejemplo, esta vez con fracciones y paréntesis.

Haz lo mismo que arriba, resuelve antes y comprueba después.

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$a)\ 3x+5 \leq 4x+4(2-x)$

$b)\ \frac{2x-5}{3}+4(3x-1)>1-2x+\frac{2-x}{4}$

$c)\ \frac{2x-4}{6} \geq \frac{-x+2}{4}$

$d)\ 1-x+\frac{x}{4}<x+3(1-x)-\frac{2-x}{8}$

A la hora de comprar un coche es bueno mirar qué tipo de combustible nos conviene utilizar, dependiendo evidentemente de la cantidad de kilómetros a realizar. Simplificando un poco el tema, para que podamos utilizar las inecuaciones, vamos a ver cuántos kilómetros nos hace falta realizar para compensar el gasto que realizar a la hora de comprarnos un coche diesel.

Supongamos que hemos decidido comprar el coche de la marca A, y en concreto del módelo B. Pero para este modelo tenemos dos versiones, la GT, que es un turismo de gasolina, y el TD, que un turismo exactamente igual que el anterior pero con motor turbo-diesel. Los precios de compra de los dos coches son:

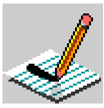
Módelo GT: 19500 €
Módelo TD: 22000 €

Además mientras al módelo de gasolina, cada kilómetro le cuesta 0,12 €, al módelo diesel el coste es de 0,07 € por kilómetros. La pregunta es obvia: ¿cuántos kilómetros hacen falta recorrer para que nos salga rentable comprar un diesel?

Please install Java 1.4 (or later) to use this page.

Y ahora te toca a tí, resolver el siguiente problema:

Supongamos que tienes dos ofertas de trabajo de dos empresas de libros. La oferta de la empresa A, es un cantidad fija mensual de 1200 € sin incentivos, mientras que la empresa B te hace una oferta de 850 € más 8,75 € por cada libro que vendas al mes. Realiza un estudio de la empresa que más te conviene, teniendo en cuenta que ambas gozan de igual prestigio y número de ventas.



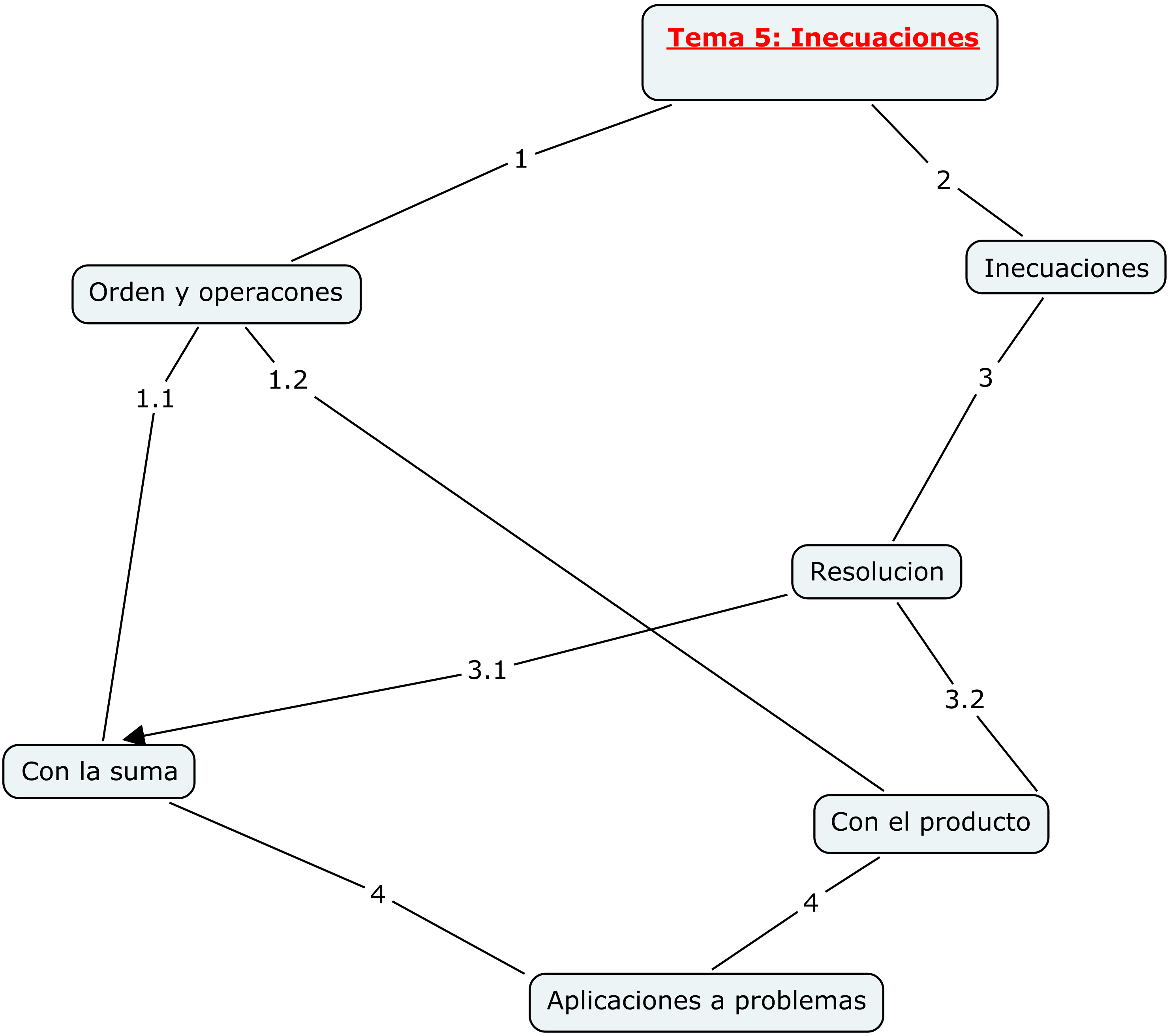
Reflexiona

A la hora de comprar un coche es bueno mirar que tipo de combustible nos conviene utilizar, dependiendo evidentemente de la cantidad de kilómetros a realizar. Simplificando un poco el tema, para que podamos utilizar las inecuaciones, vamos a ver cuántos kilómetros nos hace falta realizar para compensar el gasto que realizar a la hora de comprarnos un coche diesel.

Supongamos que hemos decidido comprar el coche de la marca A, y en concreto del módelo B. Pero para este modelo tenemos dos versiones, la GT, que es un turismo de gasolina, y el TD, que un turismo exactamente igual que el anterior pero con motor turbo-diesel. Los precios de compra de los dos coches son:

Módelo GT: 19500 €
Módelo TD: 22000 €

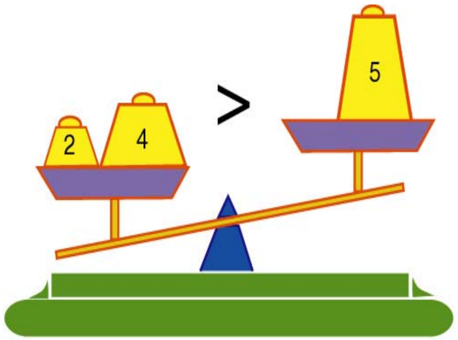
¿cuántos kilómetros hacen falta recorrer para que nos salga rentable comprar un diesel?


Tema 5: Inecuaciones
1
2
Orden y operacones
Inecuaciones
1.1
1.2
3
Resolucion
3.1
3.2
Con la suma
Con el producto
4
4
Aplicaciones a problemas

TEMA 5: INECUACIONES

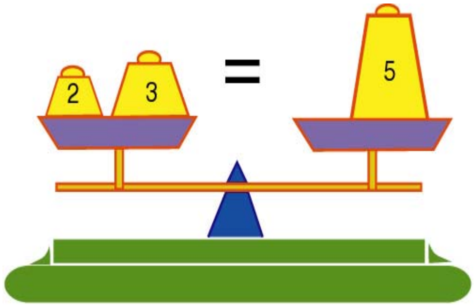
1. El orden de los números reales

Dados dos números reales a y b, se pueden dar solamente una de estas tres posibilidades: a > b, a = b ó a < b.



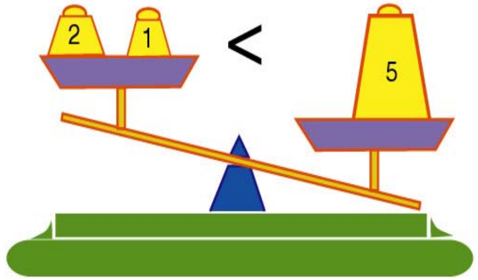
6 > 5

Es una desigualdad



5 = 5

Es una igualdad



3 < 5

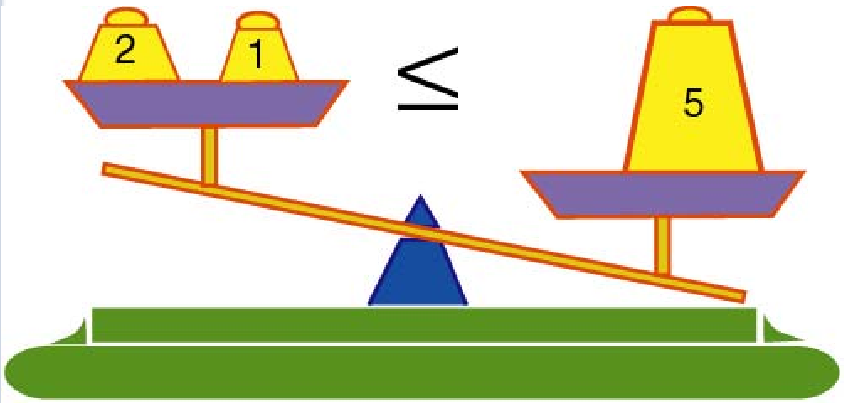
Es una desigualdad

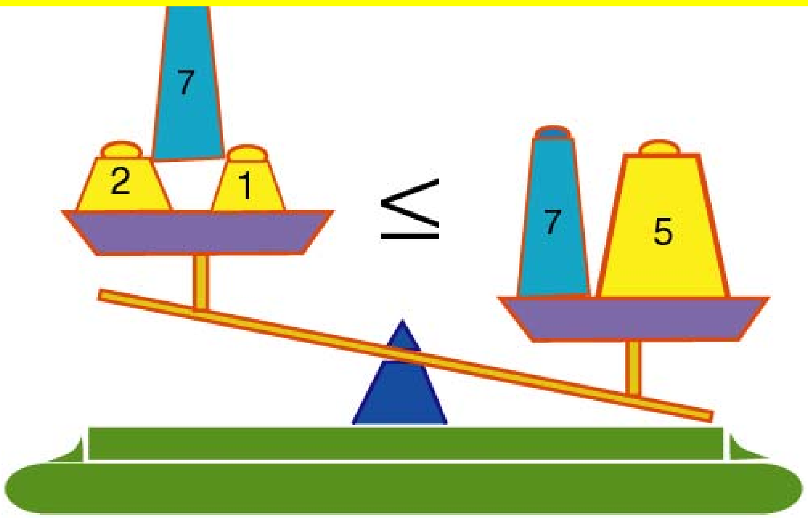
2. Relación entre orden y operaciones

2.1 Relación entre orden y suma

Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$a \le b \Rightarrow a \pm c \le b \pm c$$





$3 \le 5$

$3 + 7 \le 5 + 7$

2. Relación entre orden y operaciones

2.1 Relación entre orden y producto

•Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra desigualdad:

- Del mismo sentido si el número es positivo.
- De distinto sentido si el número es negativo.

$a \,\square\, b$ y $c \,\square\, 0 \,\square\, a \cdot c \,\square\, b \cdot c \,\square\, a/c \,\square\, b/c \,\square$

$a \,\square\, b$ y $c \,\square\, 0 \,\square\, a \cdot c \,\square\, b \cdot c \,\square\, a/c \,\square\, b/c \,\square$

$4 \le 8 \,\square\, 4 \cdot 3 \le 8 \cdot 3$

La desigualdad se mantiene

$4 \le 8 \,\square\, 4 \cdot \square -2 \square \ge 8 \square -2 \square$

$-8 \ge -16$

La desigualdad cambia

Educación Permanente

3. Inecuaciones. Definiciones

- Una **inecuación** es una desigualdad entre letras y números, relacionados mediante operaciones aritméticas. Las letras se llaman incógnitas.
- Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es una inecuación con una sola incógnita cuyo exponente es 1.
- Se llaman **soluciones** de una inecuación a los números tales que al sustituir la incógnita por ellos la desigualdad es cierta.
- Resolver una inecuación es hallar todas sus soluciones.

$3x - 2 \leq x + 4$ es una inecuación de primer grado con una incógnita

POSIBLES VALORES DE LA INECUACIÓN $2x - 6 \leq 0$							
Valores de x	-2	0	2	4	10	≤ 3	≥ 3
Desigualdad ¿cierta o falsa?	F	F	F	V	V	F	V

JUNTA DE ANDALUCIA

4. Resolución de inecuaciones
4.1 Resolución mediante la suma

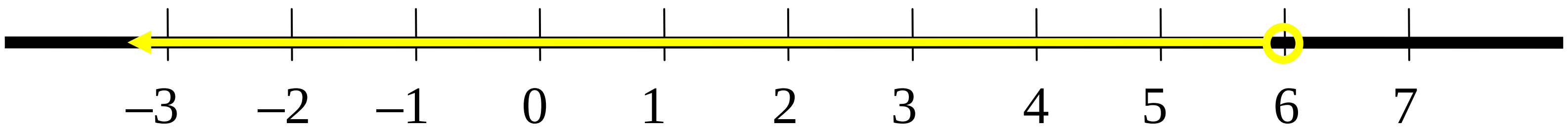
- Dos inecuaciones que tienen las mismas soluciones se dice que son equivalentes.
- Para resolver una inecuación conviene transformarla en otra equivalente en la que la incógnita esté solo en uno de los miembros.
- Para resolver inecuaciones a veces hemos de aplicar la regla de la suma

$$2x - 5 < x + 1$$

Se suma 5 a los dos miembros $\qquad 2x < x + 6$

Se resta x a los dos miembros $\qquad x < 6$

La soluciones de la inecuación $2x - 5 < x + 1$ son los números que cumplen la condición $x < 6$.En forma de intervalo se puede escribir: $(-\infty,6)$



4. Resolución de inecuaciones
4.2 Resolución mediante el producto

Para resolver inecuaciones a veces hemos de aplicar la regla del producto.

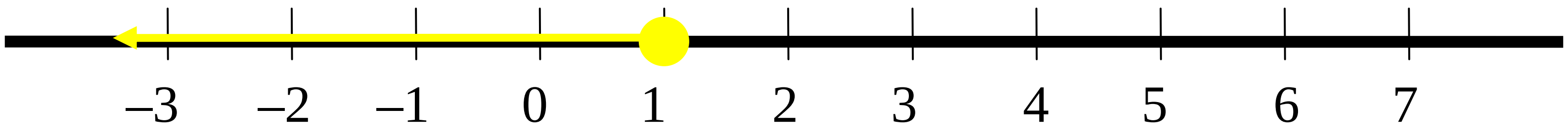
$$-4x + 5 \geq 2x - 1$$

Se resta 5 a los dos miembros $\qquad -4x \geq 2x - 6$

Se resta 2x a los dos miembros $\qquad -6x \geq -6$

Se divide entre – 6 $\qquad x \leq 1$

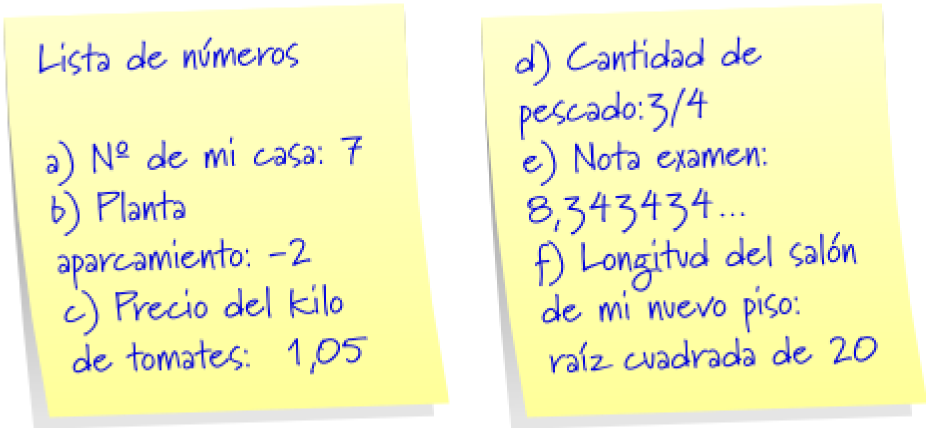
La soluciones de la inecuación $-4x + 5 \geq 2x - 1$ son los números que cumplen la condición $x \leq 1$. O en forma de intervalo: $(-\infty, 1]$



TAREAS PREPRAR RUEBA DE ACCESO AL GRADO SUPERIOR

EJERCICIO 1

Le proponemos a Teresa que apunte algunos de los números que suele ver diariamente. Al día siguiente nos proporciona la siguiente lista:



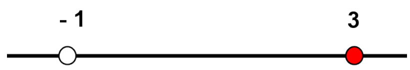
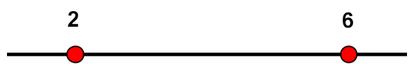
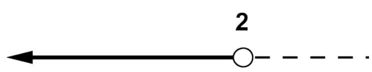
A. Te pedimos que la ayudes a clasificar los números anteriores, colocando cada uno en su conjunto (o conjuntos, si pertenece a más de uno) correspondiente: N, Z, Q, I, R.

B. Coloca las letras correspondientes a los números anteriores (a, b, c, d, e, f), aproximadamente, en el lugar correspondiente de la recta real.

EJERCICIO 2

Ya sabes que en el año 2002 adoptamos una nueva moneda, el euro. Los comercios que hasta entonces trabajaban con pesetas, tuvieron que adaptar sus precios a la nueva situación. Te recordamos que un 1€ = 166,386 pts.
Por ejemplo, 1000 € serían 6,010121043838, pero para trabajar más cómodamente debemos dar una aproximación con menos decimales.
Te pedimos que expreses en euros aproximando a las milésimas, por redondeo y truncamiento, la siguiente lista de precios.

EJERCICIO 3
Completa la siguiente tabla

Intervalo	Desigualdad	Representación Gráfica
(-2,1)		
	$\{x/0 \leq x \leq 3\}$	
		
	$\{x/-5 \leq x < -4\}$	
		
$[0,+\infty)$		
	$\{x/x \leq -1\}$	
		

EJERCICIO 4
En el periódico local hemos visto una noticia que establece en 5300 el número de habitantes de nuestro pueblo y en 2400 los habitantes del pueblo vecino. Como no estamos muy conformes con estos datos, hemos visitado los dos ayuntamientos y nos han proporcionado los datos correctos de población: 5450 para nuestra localidad y 2300 para la otra. Calcula el error absoluto y relativo en cada caso. ¿En qué localidad ha sido mejor la estimación de la población?

Imagen en Open Clip Art de NetAlloy bajo Dominio Público

EJERCICIO 1 (Septiembre 2012)

Suponiendo que una persona duerme una media de 7 horas diarias ¿Cuánto ha dormido una persona de 50 años? Expresa el resultado en notación científica y en dos tipos de unidades: segundos y años.

EJERCICIO 2 (Septiembre 2011)

La luz recorre en un día $259 \cdot 10^8$ kilómetros aproximadamente. La galaxia Andrómeda se encuentra a $236 \cdot 10^{17}$ kilómetros de la Tierra. Expresa ambas cifras en notación científica y calcula cuántos años tarda la luz (distancia que recorre la luz en un año) que emite Andrómeda en alcanzarnos.

EJERCICIO 3

Completa los siguientes cuadros.

a) Expresa los resultados utilizando potencias de exponente positivo.

A	**B**	**A·B**	**A:B**
$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$		
$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$		
	$\left(\frac{4}{5}\right)^5$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	
$\left(\frac{3}{7}\right)^4$		$\left(\frac{3}{7}\right)^2$	

b)

Expresión con exponentes fraccionarios	**Expresión con radicales**

$5^{\frac{1}{3}}$	
	$\sqrt{2^3}$
$4^{\frac{-2}{5}}$	
	$\sqrt[8]{(-6)^4}$

EJERCICIO 4

Resuelve con la calculadora las siguientes operaciones.

a) $\left(2{,}45\cdot10^{5}\right)+\left(3{,}26\cdot10^{6}\right)$

b) $\left(4{,}89\cdot10^{-3}\right)-\left(2{,}31\cdot10^{-3}\right)$

c) $\left(6{,}43\cdot10^{7}\right)\cdot\left(1{,}72\cdot10^{4}\right)$

d) $\left(8{,}07\cdot10^{-3}\right)\div\left(3{,}16\cdot10^{-5}\right)$

EJERCICIO 1 (Junio 2012)

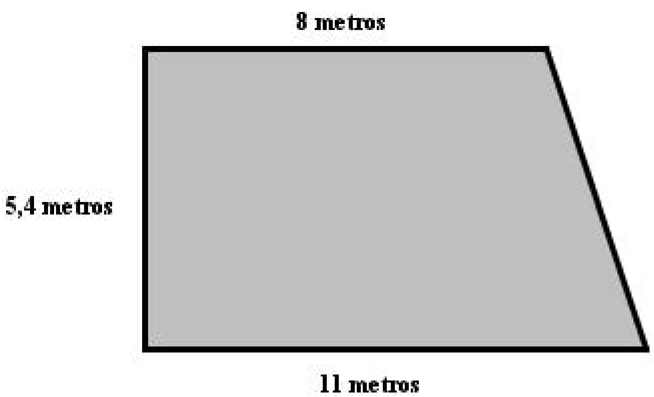
Una familia hace el siguiente reparto según el testamento del patriarca: "La tercera parte de sus camellos se entregarán a su primogénito, una cuarta parte a su segundo hijo, y el resto los conservará su viuda. Si a la esposa le corresponden 10 camellos ¿cuántos camellos componían el rebaño de esta familia?

EJERCICIO 2

Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 15 cm y su perímetro mide 36 cm.

EJERCICIO 3 (Junio 2014)

Después de una obra, un estudio de arquitectura le encarga a un profesional, pintar un local totalmente diáfano de planta trapezoidal. Para que pueda hacer sus cálculos, le proporcionan las siguientes dimensiones: 2,5 metros de altura y la planta con las medidas que puedes observar en la imagen:



Si necesita 1 litro de pintura para revestir 8 m2. ¿Cuántos litros necesitará para pintar todas las paredes y el techo?

EJERCICIO 4 (Junio 2013)

Hemos cubierto con césped artificial el suelo de un jardín de forma cuadrada. Al ampliar su lado en 3 metros, la nueva superficie es el triple de la original.

A. ¿Cuáles eran las dimensiones del jardín antes de la ampliación?

B. Expresa la superficie del jardín después de la ampliación en notación científica y en cm2.

EJERCICIO 1 (Septiembre 2014)

En mi anterior recibo, por un consumo de 180 kw y 70,5 m3 de gas pagué 54,42 €. Aunque el precio del gas se mantiene, el de la luz ha subido un 18%. Así, por el mismo consumo este mes pagaré 58,632 €. Averigua el coste del kw antiguo y nuevo y el del m3 de gas

EJERCICIO 2 (Septiembre 2013)

Una empresa dedicada a la compra-venta adquiere dos vehículos (un coche y una moto) por 14350 € y los vende por 16402 €. ¿Cuál fue el precio de compra de cada vehículo si en la venta del coche ganó el 15% y en la de la moto el 10 %?

EJERCICIO 3 (Septiembre 2012)

Entre una madre y su hijo duermen un total de 17 horas de sueño reparador. Si al tiempo que invierte la madre al dormir le restamos 2 horas, da como resultado la mitad de las horas que duerme el hijo. ¿Cuántas horas dedican cada uno a dormir?

EJERCICIO 4 (Junio 2010)

Una empresa, tras realizar el balance anual y observar que ha obtenido importantes beneficios, decide obsequiar a sus 32 empleados con un ordenador portátil para cada uno. Este regalo le ha supuesto a la empresa un coste total de 22.040 €. La empresa ha elegido un modelo valorado en 835 € para los jefes de equipo y un modelo con un coste de 640 € para los operarios que componen los distintos equipos.

a) ¿Cuántos ordenadores de cada modelo ha comprado la empresa?

b) ¿Cuántos jefes de equipo hay en la empresa?

c) Si cada jefe de equipo tiene bajo su supervisión al mismo número de operarios, ¿Cuántos operarios componen cada equipo?

EJERCICIO1

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2(x+4)-5x \leq 3x+4(3-x)$

b) $\frac{3x+4}{2}-\frac{x+7}{4}\geq 5+\frac{2(x-1)}{4}$

c) $3-x+\frac{2x-1}{6}<\frac{-2+x}{3}-\frac{x}{2}$

EJERCICIO 2 (Septiembre 2011)

De la comparación de recorridos en distintos intervalos de tiempos de una sonda espacial se ha deducido la siguiente inecuación, donde x representa la velocidad en m/s.

$$\frac{x+3}{3}-\frac{2x+2}{4}\leq\frac{x}{6}$$

Averigua la velocidad a partir de la cual la sonda comienza a ahorrar combustible, resolviendo la desigualdad.

EJERCICIO 3 (Junio 2011)

Según las condiciones de mi cuenta corriente, puedo gastar mensualmente un poco más de lo que gano, siempre que la diferencia entre los gastos totales y mi nómina no supere un 15% de la misma.

a) Expresa algebraicamente con una única línea las condiciones de gasto anteriormente descritas sabiendo que mi nómina asciende a 1.350 €.

b) Resuelve la expresión anterior y proporciona el intervalo en el que se pueden mover mis gastos este mes. ¿Cómo es el intervalo? Representa el intervalo obtenido sobre la recta real.

EJERCICIO 4 (Junio 2012)

En algunas culturas la riqueza de una familia se mide por el número de animales que poseen.

El rebaño de una de las familias, que llamaremos familia 1, tiene actualmente 221 reses, pero, como es muy mala gestora, cada mes su rebaño disminuye en 2 animales. Sin embargo el rebaño de otra de las familias, que llamaremos familia 2, se compone de 100 reses y mensualmente su número aumenta en 20 animales. ¿Cuántos meses han de pasar para que la riqueza de la familia 2 sea superior a la de la familia 1?

Imagen en Open Clip Art de johnny_automatic bajo Dominio Público.