PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2016	CONVOCATORIA: JUNIO 2016
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema es valorarà de 0 a 10 punts i la nota final serà la mitjana aritmètica dels tres.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

OPCIÓN A

Problema A.1 Un ganadero dispone de alimento concentrado y forraje para alimentar sus vacas. Cada kg. de alimento concentrado contiene 300 gr. de Proteína Cruda (PC), 100 gr. de Fibra Cruda (FC) y 2 Mcal. de Energía Neta de Lactancia (ENL) y su coste es 11 euros. Por su parte, cada kg. de forraje contiene 400gr. de PC, 300 gr. de FC y 1 Mcal. de ENL, siendo su coste de 6,50 euros. Determina la ración alimenticia de mínimo coste si sabemos que cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr. de PC, 1500 gr. de FC y 15 Mcal. de ENL. ¿Cuál es su coste? *(10 puntos)*

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

	PC	*FC*	*ENL*	*Coste*
1 Kg de alimento concentrado	*300 gr*	*100 gr*	*2 Mcal*	*11 €*
1 Kg de forraje	*400 gr*	*300 gr*	*1 Mcal*	*6´50 €*

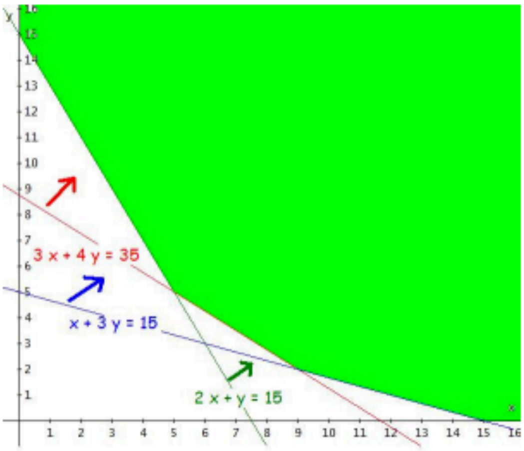
La ración alimenticia estará formada por
x *= Kg de alimento concentrado*
y *= Kg de forraje*

Las restricciones serán:
"cada vaca debe ingerir al menos 3500 gr de PC"; $300x + 400y \geq 3500 \rightarrow 3x + 4y \geq 35$
"cada vaca debe ingerir al menos 1500 gr de FC"; $100x + 300y \geq 1500 \rightarrow x + 3y \geq 15$
"cada vaca debe ingerir al menos 15 Mcal de ENL"; $2x + y \geq 15$
Como x e y representan Kg de alimentos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \geq 0$

El coste de la ración alimenticia será: $11x + 6'5y$

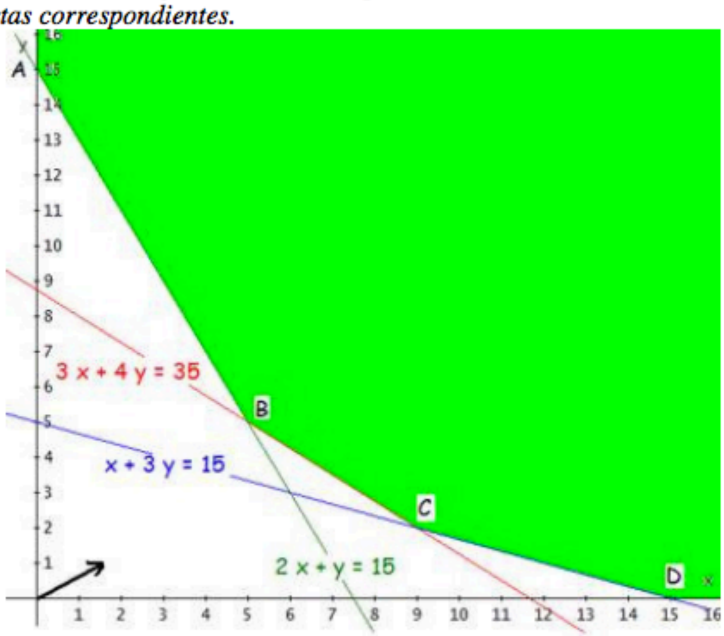
Para determinar la ración alimenticia de mínimo coste debemos resolver el siguiente problema:
Minimizar $z = 11x + 6'5y$

$$s.a.\ \begin{cases} 3x+4y \geq 35 \\ x+3y \geq 15 \\ 2x+y \geq 15 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.



Es una región factible abierta.
Como el vector perpendicular a la función de coste es el representado a partir del origen, la función de coste no alcanza el máximo en esta región pero si su mínimo.

Son evidentes los vértices A (0 , 15) y D (15 , 0); calculemos los otros vértices.

Son evidentes los vértices A (0 , 15) y D (15 , 0); calculemos los otros vértices.

B, (a) y (c):

$$\begin{cases} 3x+4y=35 \\ 2x+y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y=35 \\ -8x-4y=-60 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad -5x \quad =-25 \quad \rightarrow \quad x=5$$

Sustituyendo este valor de x *en la* 2^a *ecuación,* $2 \,.\, 5 + y = 15;\quad y = 5$

Punto de corte B (5 , 5)

C, (a) y (b):

$$\begin{cases} 3x+4y=35 \\ x+3y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+4y=35 \\ -3x-9y=-45 \end{cases}$$

$$Sumando: \quad -5y \quad =-10 \quad \rightarrow \quad y=2$$

Sustituyendo este valor de y *en la* 2^a *ecuación,* $x + 3 \,.\, 2 = 15;\quad x = 9$

Punto de corte C (9 , 2)

Los vértices de la región factible son: (0, 15), (5 , 5), (9 , 2) y (15 , 0).

La función de coste, z, alcanza su valor mínimo en los vértices de la región anterior o en alguno de los segmentos que la delimitan.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	$z = 11\, x + 6'5\, y$	
$0 , 15$	$11 \cdot 0 + 6'5 \cdot 15 = 97'5$	
$5 , 5$	$11 \cdot 5 + 6'5 \cdot 5 = 87'5$	*Mínimo*
$9 , 2$	$11 \cdot 9 + 6'5 \cdot 2 = 112$	
$15 , 0$	$11 \cdot 15 + 6'5 \cdot 0 = 165$	

Para que el coste sea mínimo la ración alimenticia debe estar formada por 5 Kg. de alimento concentrado y 5 Kg. de forraje.
El coste de esta ración alimenticia será de 87´50 euros.

Problema A.2 Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

a) Calcular A^{-1}. *(5 puntos)*

Solución:

a) A^{-1}.

Calculamos el determinante de la matriz A,

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&1&3\end{vmatrix}=(F_2-F_1)=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=3\neq 0\ \Rightarrow\ \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&3&1\\5&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}8&-3&1\\-5&3&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}8&-5&-1\\-3&3&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Y, finalmente, $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8&-5&-1\\-3&3&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8/3&-5/3&-1/3\\-1&1&0\\1/3&-1/3&1/3\end{pmatrix}$

b) Determina la matriz X tal que $A\,X = A + B$. *(5 puntos)*

Multiplicamos la expresión anterior por A^{-1} *por la izquierda,*

$A^{-1}\ A\,X = A^{-1}\ (A+B);\qquad I\,X = A^{-1}A + A^{-1}B;\qquad X = I + A^{-1}B$

En primer lugar, calculamos $A^{-1}B$

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}8/3&-5/3&-1/3\\-1&1&0\\1/3&-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}0-\frac{5}{3}1-\frac{1}{3}2&-\frac{8}{3}-\frac{5}{3}0-\frac{1}{3}1&\frac{8}{3}2+\frac{5}{3}1-\frac{1}{3}0\\-1.0+1.1+0.2&1.1+1.0+0.1&-1.2-1.1+0.0\\\frac{1}{3}0-\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}2&-\frac{1}{3}1-\frac{1}{3}0+\frac{1}{3}1&\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7/3&-9/3&21/3\\1&1&-3\\1/3&0&3/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/3&-3&7\\1&1&-3\\1/3&0&1\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7/3&-3&7\\1&1&-3\\1/3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/3&-3&7\\1&2&-3\\1/3&0&2\end{pmatrix}$$

Problema A.3 Cinco amigos suelen tomar café juntos. El primer día tomaron 2 cafés, 2 cortados y un café con leche y debieron pagar 3 €. Al día siguiente tomaron un café, un cortado y tres cafés con leche, por lo que pagaron 3´25 €. El tercer día sólo acudieron cuatro de ellos y tomaron un café, dos cortados y un café con leche, ascendiendo la cuenta a 2´45 €. Calcular de forma razonada el precio del café, del cortado y del café con leche. *(10 puntos)*

Solución:
Utilizando las siguientes incógnitas,

x = precio del café
y = precio del cortado
z = precio del café con leche

el problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 2x+2y+x=3 \\ x+y+3z=3'25 \\ x+2y+z=2'45 \end{cases}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

la solución será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3'25 & 1 & 3 \\ 2'45 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-2'75}{-5} = 0'55 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3'25 & 3 \\ 1 & 2'45 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3}{-5} = 0'6 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3'25 \\ 1 & 2 & 2'45 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3'5}{-5} = 0'75$$

Por lo tanto, el café costó 0´55 €, el cortado 0´60 € y el café con leche 0´75 €.

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2016	CONVOCATORIA: JUNIO 2016
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN B

Problema B.1 . El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a 1,50 euros. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 euros. ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos? Determina los ingresos máximos. *(10 puntos)*

Solución:
Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Tipo de paquete	*Paquetes de pipas*	*Chicles*	*Bombones*	*Precio de venta*
A	*1*	*2*	*2*	*1´50 €*
B	*1*	*4*	*1*	*2 €*
Existencias	*10*	*30*	*18*	

Utilizamos las siguientes incógnitas
x = número de paquetes del tipo A que confecciona
y = número de paquetes del tipo B que confecciona
Las restricciones serán:
"dispone de 10 paquetes de pipas"; $x + y \leq 10$
"dispone de 30 chicles"; $2x + 4y \leq 30 \rightarrow x + 2y \leq 15$
"dispone de 18 bombones"; $2x + y \leq 18$
Como x e y representan número de paquetes, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in N$
Los beneficios que obtiene el frutero serán: $1´5x + 2y$

El problema a resolver es:
$$\text{Maximizar } z = 1´5x + 2y \qquad \text{s.a.} \begin{cases} x+y\leq 10 \\ x+2y\leq 15 \\ 2x+y\leq 18 \\ x,\ y\in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x+y\leq 10$ — $x+y=10$

x	y
0	10
10	0

¿(0,0) cumple? $0+0\leq 10$ Sí

(b) $x+2y\leq 15$ — $x+2y=15$

x	y
0	7,5
15	0

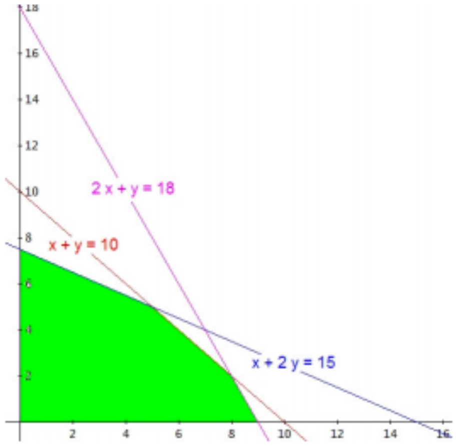
¿(0,0) cumple? $0+2.0\leq 15$ Sí

(c) $2x+y\leq 18$ — $2x+y=18$

x	y
0	18
9	0

¿(0,0) cumple? $2.0+0\leq 18$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.
Son evidentes los vértices (0 , 0), (0 , 7´5) y (9 , 0); calculemos los otros dos vértices.
De (a) y (b): (5 , 5)

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x+2y=15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x-y=-10 \\ x+2y=15 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $y = 5$
sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $x + 5 = 10$; $x = 5$

De (a) y (c): (8 , 2)

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+y=18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x-y=-10 \\ 2x+y=18 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $x = 8$
sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación: $8 + y = 10$; $y = 2$

Los vértices de la región factible son: (0, 0), (0 , 7´5), (9 , 0), (5 , 5) y (8 , 2). De estos vértices el (7´5 , 0) no tiene sus coordenadas naturales, esperemos que el máximo se alcance en otro de los vértices para que el problema tenga una solución sencilla.
Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	z = 1´5 x + 2 y	
0 , 0	1´5 . 0 + 2 . 0 = 0	
0 , 7´5	1´5 . 0 + 2 . 7´5 = 15	
9 , 0	1´5 . 9 + 2 . 0 = 13´5	
5 , 5	1´5 . 5 + 2 . 5 = 17´5	Máximo
8 , 2	1´5 . 8 + 2 . 2 = 16	

El máximo se alcanza en el punto (5 , 5) lo cual quiere decir que para maximizar sus ingresos el tendero debe preparar 5 paquetes del tipo A y 5 del tipo B. De esta forma conseguirá un ingreso máximo de 17´50€.

Problema B.2 Se dan las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz X que satisface la ecuación *A X – B C X = C. (5puntos)*

a) ¿Matriz X / A X – B C X = 3 C?
A X – B C X = 3 C, sacando factor X por la derecha,
(A – B C) X = 3 C, si existe $(A - B C)^{-1}$ entonces $X = (A - B C)^{-1}\ 3\ C$

Calculemos A – B C,

$$A-BC=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2.1+2.1 & 2.(-1)+2.(-3) \\ 1.1-1.1 & 1.(-1)-1.(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-6+10=4\neq 0 \rightarrow \exists\ (A-BC)^{-1}$

Cálculo de $(A - B C)^{-1}$,

$$A-BC=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego, $(A-BC)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Cálculo de la matriz X,

$$X=(A-B C)^{-1}\ 3\ C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} -8 & 28 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix} -6 & 21 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de *A*. *(5puntos)*

$$A^t+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=9-3=6\neq 0 \rightarrow \exists\ (A^t+B)^{-1}$

Cálculo de $(A^t + B)^{-1}$,

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, $(A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $(A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema B.3 Juan decide invertir una cantidad de 12.000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas, A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4%, las de B un 5% y las de C han perdido un 2% de su valor original. Con resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,50 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Solución:
Utilizando las siguientes incógnitas,

x = precio del café
y = precio del cortado
z = precio del café con leche

el problema se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 2x+2y+x=3 \\ x+y+3z=3'25 \\ x+2y+z=2'45 \end{cases}$$

el determinante de la matriz de coeficientes es,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

la solución será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3'25 & 1 & 3 \\ 2'45 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-2'75}{-5} = 0'55 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3'25 & 3 \\ 1 & 2'45 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3}{-5} = 0'6 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3'25 \\ 1 & 2 & 2'45 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-3'5}{-5} = 0'75$$

Por lo tanto, el café costó 0´55 €, el cortado 0´60 € y el café con leche 0´75 €.