

EXAMEN DE SELECTIVIDAD JUNIO 2017. MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

P1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$
, dependiente del parámetro real a .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La solución del sistema cuando $a=2$

El sistema tiene por matriz ampliada: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array} \right)$

Si $a=2$, entonces esta matriz se convierte en $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$: y como

el rango de la matriz es 3 ya que $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$; entonces el sistema es compatible determinado (ya que la matriz ampliada también tendrá rango 3, por no poder tener rango menor a A y no tener más de 3 filas).

Lo podemos resolver, por ejemplo, por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

y la solución del sistema es: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

CON WIRIS

$$\text{resolver} \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{2}{3} \right\} \right\}$$

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado.

Para que el sistema sea compatible determinado las matrices del sistema y la ampliada deben ser iguales a 3 (número de incógnitas). Esto sucederá si el rango de la matriz del sistema es 3, es decir, si su determinante no es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -a^2 - 6a - 3 = 0 \rightarrow a = -1$$

Así, si $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones para ese valor de a .

Para que el sistema sea compatible indeterminado, los rangos de la matriz del sistema y la matriz ampliada deben ser iguales pero inferiores a 3 (teorema de Rouché-Frobenius). Estudiamos, por tanto, el valor del parámetro que no hace el sistema compatible determinado:

Si $a = -1$: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$ y claramente la primera fila y la tercera son iguales, de forma que el rango de ambas matrices es 2 porque podemos encontrar una submatriz 2x2 con determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Este sistema, entonces, es compatible indeterminado.

Lo podemos resolver, por ejemplo, por Cramer (para sistemas compatibles indeterminados), escribimos:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -1 - 2z \\ 2x - y = 2 + z \end{cases}$$

De donde:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-2z & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+3}{3} = z+1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1-2z \\ 2 & 2+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3z}{3} = z$$

Y las (infinitas) soluciones a este sistema vienen dadas por: $(z+1, z, z)$ con $z \in \mathbb{R}$

P2. Se dan el punto $P=(1,1,1)$, la recta $r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+y+z=1$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta r.

En estos ejercicios es importante realizar el dibujo correspondiente a la situación que se plantea.

Con la notación del dibujo, llamamos P_r y Q_r a dos puntos de la recta r , $\overrightarrow{d_r}$ su vector director (que calcularemos como $\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{P_r Q_r}$) y π' al plano que nos piden: contiene a la recta r y a punto P .

Para obtener estos puntos de la recta podemos probar y sustituir valores, o podemos resolver ese sistema compatible indeterminado (como hemos hecho en el ejercicio A1):

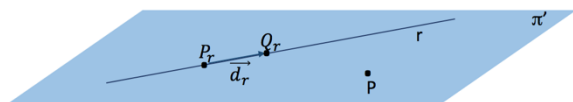
$$\begin{cases} x+y=z-1 \\ x+2y=z+1 \end{cases} \rightarrow (z-3, 2, z) \text{ con } z \in \mathbb{R}$$

Elegimos, por ejemplo, los puntos: $P_r = (0,2,3)$ y $Q_r = (1,2,4)$, y con esto: $\overrightarrow{d_r} = (1,0,1)$

Podemos escribir directamente la ecuación del plano que contiene a r y a P utilizando un punto (P) y dos vectores (el vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}$ y el vector de un punto de la recta al punto P , $\overrightarrow{P_r P} = (1, -1, -2)$):

Ecuación paramétrica:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \mu \cdot (1, 0, 1) + \lambda \cdot (1, -1, -2)$$



Con WIRIS

Apartado a) El plano que contiene al punto P y a la recta r.

Llamamos π' al plano que nos solicitan, d_r el vector director de la recta r. Llamamos Pr y Qr a dos puntos de la recta r con lo que calculamos el vector director de r.

1) Tenemos que el $d_r = n_{\pi'}$

2) Resolver el sistema formado por los planos, y obtenemos el vector director de la recta r

resolver $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} \rightarrow \{ \{x=z-3, y=2, z=z\} \}$

con dos puntos de la recta hallamos el vector director $Pr=(1,2,3)$ y $Qr(1,2,4) \rightarrow dr=(1,0,1)$

3) Ahora calculamos el plano solicitado



$P = \text{punto}(1,1,1) \rightarrow (1,1,1)$

$Pr = \text{punto}(0,2,3) \rightarrow (0,2,3)$

$dr = [1,0,1] \rightarrow [1,0,1]$

$ds = P - Pr = (1,1,1) - (0,2,3)$

$ds = [1, -1, -2] \rightarrow [1, -1, -2]$

$\text{plano}(P, dr, ds) \rightarrow x+3 \cdot y-z-3=0$

4) Ahora la representación gráfica

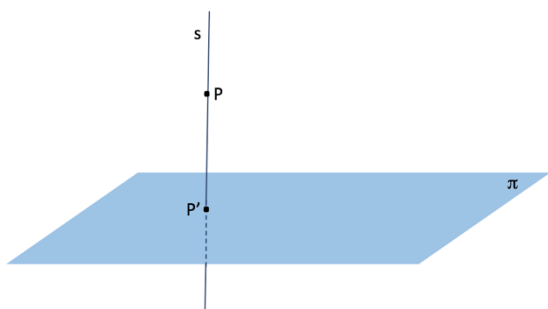
$\text{dibujar3d}(\text{plano}(P, dr, ds), \{\text{color}=\text{rojo}\}) \rightarrow \text{tablero1}$

$\text{dibujar3d}(\text{punto}(1,1,1)) \rightarrow \text{tablero1}$

$\text{dibujar3d}(x+y-z-1=0, \{\text{color}=\text{negro}\}) \rightarrow \text{tablero1}$

$\text{dibujar3d}(x+2y-z-1=0, \{\text{color}=\text{azul}\}) \rightarrow \text{tablero1}$

b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π .



Dado que el plano π tiene por vector normal $\vec{N}_{\pi} = (1,1,1)$, entonces $\vec{N}_{\pi} = ds$

Además debe pasar por el punto P, con lo que la ecuación paramétrica de la recta s se puede escribir como:

$$s \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + t \cdot (1, 1, 1)$$

El punto P' es el punto de intersección de la recta s con el plano p:

Hemos visto que un punto genérico de la recta tiene la forma $(1+t, 1+t, 1+t)$ que podemos sustituir en el plano p si es el punto P' que buscamos:

$$x + y + z = 1 \rightarrow 1 + t + 1 + t + 1 + t = 1 \rightarrow 3 + 3t = 1 \rightarrow t = \frac{-2}{3}$$

Así pues el punto P' lo obtenemos:

$$P' = (1,1,1) + \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot (1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Y la distancia del punto P al plano π coincide con la distancia de P al punto P', es decir, el módulo de su vector:

$$d(P, \pi) = d(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \left\| \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\| = \sqrt{3 \cdot \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 1.15$$

CON WIRIS

b) la recta s que paso por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π .

$ds=[1,1,1] \rightarrow [1,1,1]$

$P= punto(1,1,1) \rightarrow (1,1,1)$

$s=recta(P,ds) \rightarrow -x+z=0 \cap -x+y=0$

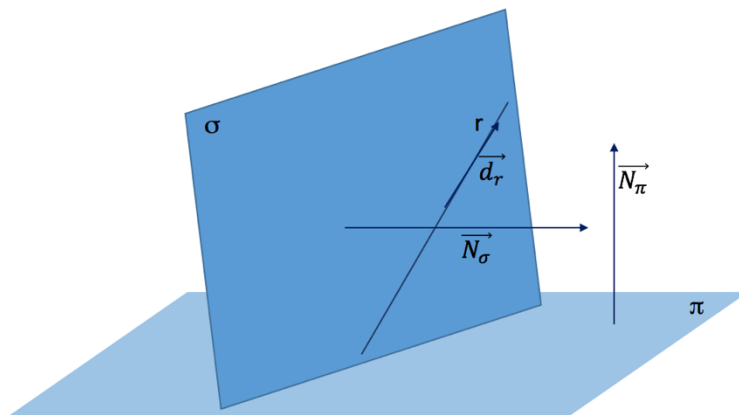
$dibujar3d(x+y+z=1, \{color=azul\}) \rightarrow \text{tablero1}$

$dibujar3d(s, \{color=rojo\}) \rightarrow \text{tablero1}$

$\pi=x+y+z-1=0 \rightarrow x+y+z-1=0$

$distancia(P,\pi) \rightarrow \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π



El plano σ tiene como vector normal un vector que debe ser perpendicular al plano π y a la recta r , es decir, $\vec{N}_\sigma$ debe ser perpendicular a $\vec{N}_\pi$ y a $\vec{d}_r$. Podemos calcular este vector como el producto vectorial de ambos:

$$\vec{N}_\sigma = \vec{N}_\pi \times \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -1)$$

Todos los planos perpendiculares a π y paralelos a la recta r tendrán la forma:

$$x - z + D = 0$$

De ellos, queremos obtener el que pasa por un punto de la recta r , por ejemplo P_r :

$$P_r = (0, 2, 3) \rightarrow 0 - 3 + D = 0 \rightarrow D = 3$$

La ecuación del plano pedido es: $\sigma \equiv x - z + 3 = 0$

P3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0 \leq x \leq 8$

Para resolver este ejercicio es necesario dibujar la situación en unos ejes coordenados:

Nos fijamos en los puntos que nos indica el enunciado y prestamos especial atención a:

$$\|\overrightarrow{MP}\| = \|(x, -6)\| = \sqrt{x^2 + 36}$$

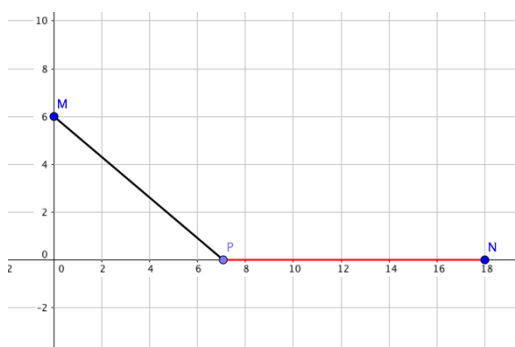
$$\|\overrightarrow{PN}\| = 18 - x$$

El coste total depende de la situación del punto P y, por tanto, de la variable x, y se calcula:

$$C(x) = 10 \cdot \|\overrightarrow{MP}\| + 5 \cdot \|\overrightarrow{PN}\| = 10\sqrt{x^2 + 36} + 5 \cdot (18 - x)$$

b) El valor de x, con $0 \leq x \leq 8$, para el que el costo total C es mínimo.

Estamos buscando un mínimo de esta función. Calculamos los puntos críticos:



$$C'(x) = 10 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 5$$

$$\begin{aligned} C'(x) = 0 &\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x \\ &= \sqrt{x^2 + 36} \rightarrow 4x^2 \\ &= x^2 + 36 \rightarrow 3x^2 = 36 \\ x^2 &= 12 \rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \end{aligned}$$

Este punto crítico es el candidato a mínimo pero habría que comprobarlo. Podríamos hacerlo con la segunda derivada u observando el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$ a partir del estudio del signo de $C'(x)$:

$$C'(3) = \frac{60}{2\sqrt{45}} - 5 \cong -0.53 \quad C'(4) = \frac{80}{2\sqrt{52}} - 5 \cong 0.55$$

Así pues, la función es decreciente a la izquierda de nuestro punto crítico y es creciente a su derecha, de forma que el punto de abscisa $x = 2\sqrt{3} \cong 3.46$ es el punto mínimo: es la distancia al origen donde debemos colocar el punto P para que el coste sea mínimo (ver gráfica anterior)

c) El valor de dicho costo total mínimo.

Para este valor de x , el coste del cable será:

$$C(\sqrt{12}) = 10 \cdot \sqrt{12 + 36} - 5\sqrt{12} = 30\sqrt{3} + 90 \cong 141.96 \text{ euros}$$

CON WIRIS

$$MP = \sqrt{x^2 + 36} \rightarrow \sqrt{x^2 + 36}$$

$$PN = 18 - x \rightarrow -x + 18$$

$$C(x) = 10 \cdot \sqrt{x^2 + 36} + 5 \cdot (18 - x) \rightarrow x \mapsto 10 \cdot \sqrt{x^2 + 36} + (-5 \cdot x + 90)$$

$$C'(x) \rightarrow \frac{-5 \cdot \sqrt{x^2 + 36} + 10 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$\text{resolver}(C'(x)=0) \rightarrow \{\{x=2 \cdot \sqrt{3}\}\}$$

$$\text{resolver}(C'(x)=0.) \rightarrow \{\{x=3.4641\}\}$$

Vamos a comprobar que en $x=2 \cdot \sqrt{3}$ hay un mínimo.

|

$$C'(3.) \rightarrow -0.52786$$

$$C'(4.) \rightarrow 0.547$$

Así pues en $x=2 \cdot \sqrt{3}$ hay un mínimo.

c) El valor de que minimiza el coste.

$$C(2 \cdot \sqrt{3.}) \rightarrow 141.96$$

Así pues el valor que minimiza el costo es de 141,96 euros.

OPCIÓN B

Problema B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$ siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3 .

Solamente tenemos que calcular C^2 y también $2C - I$ y ver que el resultado es el mismo:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2C - I &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además, para el cálculo de C^4 podemos utilizar ese resultado:

$$\begin{aligned} C^4 &= C^2 \cdot C^2 = (2C - I)(2C - I) = 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I \\ &= 4C - 3I = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

CON WIRIS

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot C - I_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de columnas cuyo determinante vale -1.

Por las propiedades de los determinantes:

$$\det[(3 \cdot A^4) \cdot (4A^2)^{-1}] = \frac{3^4 \cdot |A|^4}{4^4 |A|^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cong 0.31$$

CON WIRIS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| \rightarrow -1$$

$$X = 3 \cdot A^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = (4 \cdot A^2)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$|X \cdot Y| \rightarrow \frac{81}{256}$$

$$81 / 256. \rightarrow 0.31641$$

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB=B$.

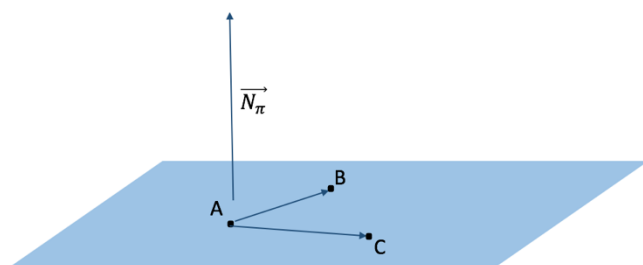
Si $BB = B$, entonces: $BB - B = 0$ (entendiendo esta como la matriz de ceros, no el valor escalar nulo).

Así pues: $B \cdot (B - I) = 0$ y de aquí obtenemos que la matriz B es la matriz identidad o la matriz nula. Pero la nula no puede ser porque debe permitir el cálculo de su inversa, así que debe ser la matriz identidad.

Problema B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 0)$ y $C = (0, 3, 0)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A,B y C y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que paso por O.

Notar que este tetraedro tiene uno de sus vértices en el origen de coordenadas.



Utilizaremos los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, -1) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1)$$

El plano que contiene a estos puntos tiene como vector normal un vector perpendicular a ambos:

Y lo podemos calcular, por ejemplo, con el producto vectorial de ambos:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3, 3, 3)$$

Por comodidad utilizaremos un vector proporcional a él:

$$\overrightarrow{N_\pi} = (1, 1, 1)$$

Como, además, queremos que los puntos pertenezcan a ese plano, lo podemos escribir como:

$$\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$$

La recta h_0 perpendicular a π tendrá como vector director, precisamente, $\overrightarrow{N_\pi}$. Y podemos escribir:

$$h_0 \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + t \cdot (1, 1, 1) = (t, t, t)$$

CON WIRIS

$$O = \text{punto}(0,0,0) \rightarrow (0,0,0)$$

$$A = \text{punto}(1,1,1) \rightarrow (1,1,1)$$

$$B = \text{punto}(3,0,0) \rightarrow (3,0,0)$$

$$C = \text{punto}(0,3,0) \rightarrow (0,3,0)$$

$$AB = B - A \rightarrow (2, -1, -1)$$

$$AC = C - A \rightarrow (-1, 2, -1)$$

$$vAB = [2, -1, -1] \rightarrow [2, -1, -1]$$

$$vAC = [-1, 2, -1] \rightarrow [-1, 2, -1]$$

$$vAB \times vAC \rightarrow [3, 3, 3]$$

$$\text{así pues } vN\pi = [1, 1, 1]$$

$$vN\pi = [1, 1, 1] \rightarrow [1, 1, 1]$$

$$\pi = \text{plano}(\text{punto}(1,1,1), vN\pi) \rightarrow x + y + z - 3 = 0$$

$$h_0 = \text{recta}(\text{punto}(1,1,1), vN\pi) \rightarrow -x + z = 0 \cap -x + y = 0$$

b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π .

Dado que $h_0 \equiv (x, y, z) = (t, t, t)$, entonces sustituimos en el plano y nos queda

$t + t + t - 3 = 0 \rightarrow 3t = 3 \rightarrow$ y por tanto $t = 1$. Así pues el punto de corte es el $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

CON WIRIS

$$\text{resolver} \left\{ \begin{array}{l} -x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \{ \{x=1, y=1, z=1\} \}$$

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, y el volumen del tetraedro T.

Para calcular el área y el volumen solamente hay que recordar los productos vectorial y mixto.

El producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo equivale al área del paralelogramo que forman los vectores. Dado que solamente queremos el triángulo dividiremos ese valor entre dos.

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \cdot \|(3,3,3)\| = \frac{1}{2} \sqrt{27} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \cong 2.60 u^2$$

Para calcular el volumen del tetraedro necesitamos dividir entre 6 el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores, así pues:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2} u^3$$

CON WIRIS

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{vAB} \times \mathbf{vAC}\| \rightarrow \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{vAB} \times \mathbf{vAC}\| \rightarrow 2.5981$$

$$\mathbf{vOC} = [1, 1, 1] \rightarrow [1, 1, 1]$$

$$\mathbf{VOB} = [3, 0, 0] \rightarrow [3, 0, 0]$$

$$\mathbf{vOC} = [0, 3, 0] \rightarrow [0, 3, 0]$$

$$\text{Volumne} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right| \rightarrow \frac{3}{2}$$

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f , y los extremos relativos de la función f .

El dominio de esta función es, claramente, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Para calcular los intervalos de crecimiento/decrecimiento, así como los extremos (máximos y mínimos) relativos, necesitamos la función derivada:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\text{Así: } f'(x) = 0 \leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \leftrightarrow x = \pm 1$$

Tenemos dos puntos críticos. Para analizar el crecimiento podemos ayudarnos de la siguiente tabla:

		-1		0		1	
sig(f')	>0	0	<0		<0	0	>0
f	Crece		Decrece	$\nexists$	Decrece		Crece

Así pues, es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$ y los puntos críticos son: $(-1, -2)$ que es un máximo y $(1, 2)$ que es un mínimo.

CON WIRIS

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$f'(x) \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$\text{resolver}(f'(x)=0) \rightarrow \{\{x=-1\}, \{x=1\}\}$$

$$f'(-2) \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$f'(0.5) \rightarrow -3.$$

$$f'(2) \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\text{Así pues IC} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \text{ID} = (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$f(-1) \rightarrow -2$$

$$f(1) \rightarrow 2$$

y el punto $(-1, -2)$ es un máximo y $(1, 2)$ un mínimo.

b) las asíntota de la curva $y=f(x)$

No existe asíntota horizontal dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

En cambio, sí existe una asíntota vertical en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Veamos si existe asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Así: tiene una asíntota oblicua en la recta $y = x$

CON WIRIS

b) Asintotas

AV

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \pm \infty$$

Así pues en $x=0$ hay una Asintota vertical

AH

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \rightarrow \pm \infty$$

Así pues no hay Asíntota horizontal.

AO

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$$

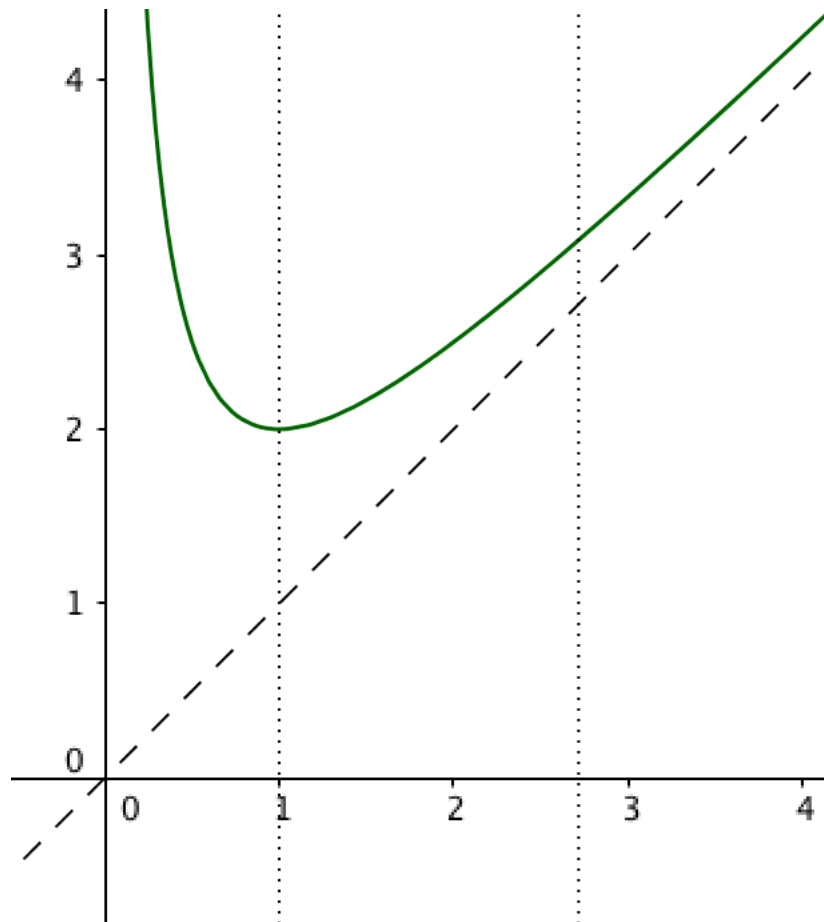
$$f(x) - m \cdot x \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

Así pues la AO es $y=x$

- c) El área de la región plana limitada por la curva $f(x)$ y, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$.

Es muy conveniente hacer un esbozo de la gráfica en la zona en la que nos piden calcular el área. Con la información calculada en los apartados anteriores debemos llegar a la gráfica:



El área pedida es:

$$A = \int_1^e f(x) dx$$

En primer lugar calcularemos la primitiva:

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int x + \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + K$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$A = \int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \cong 4.19 \text{ u}^2$$

CON WIRIS

c) Área limitada

$$\int f(x) dx \rightarrow \ln(|x|) + \frac{x^2}{2}$$

$$\int_1^e f(x) dx \rightarrow \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow 4.1945$$