EJERCICIOS DE DETERMINANTES

Actividad

Discute, en función del parámetro *k*, el siguiente sistema de ecuaciones, aplicando el teorema de Rouché-Frobenius, y resuélvelo mediante la regla de Cramer en caso de que sea compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + kz = k \\ kx + ky + z = 1 \\ x + ky + z = k \end{array}\right\}$$

Solución

La matriz A asociada al sistema y su ampliada A' serán:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ k & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz A es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = k + k^3 + 1 - k^2 - k - k =$$

$$= k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

Si k = 1, el rango de A y A' es 1, y por lo tanto el sistema es, evidentemente compatible indeterminado, pues se reduce a una única ecuación.
Si k = –1, el rango de A y A' es 2, y por lo tanto el sistema es también compatible indeterminado.
Si k ≠ 1 y k ≠ –1, el sistema es compatible determinado según el teorema de Rouché-Frobenius porque el rango de A y A' es 3, que es el número de incógnitas. Lo resolvemos mediante a regla de Cramer:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 + k^3 - k^2 - k - k^2 =$$

$$= k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 1 + k^3 + k - k - k - k^2 =$$

$$= k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} = \frac{-(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)} = -1 \rightarrow x = -1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{|A|} = \frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)} = 1 \quad \rightarrow y = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{|A|} = \frac{(k-1)^2(k+1)}{(k-1)^2(k+1)} = 1 \quad \rightarrow z = 1$$

Por lo tanto, cualquiera que sea el valor de k, distinto de 1 y de –1, ésta es la solución única al sistema.

Actividad

Calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución

Para calcular el determinante de la primera matriz utilizamos la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot (-4) +$$
$$+ (-3) \cdot (-2) \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 \cdot (-2) -$$
$$- (-3) \cdot (-1) \cdot 1 = 131$$

En la segunda matriz, de orden 4, calculamos el determinante por recurrencia:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} -$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-36) - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-9) - 1 \cdot (-57) = 24$$

Actividad

Halla el valor del siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Solución

A partir de la aplicación de las propiedades de los determinantes estudiadas (D5 y D9) tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

Hemos sumado la segunda fila a la tercera, con lo que ésta es un múltiplo de la primera. Por lo tanto, el valor del determinante es 0.

Actividad

Averigua el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro *m*:

$$a)\ \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 & 1 \\ 5 & -m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Actividad

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Determina los valores de k para que el sistema $AX = B$ sea incompatible.
b) Determina los valores de m para que el sistema $AX = C$ sea compatible.
c) Para $k = 3$ y $m = -13$, estudia el sistema $AX = B + C$. Si es posible, resuélvelo. En caso contrario, justifica por qué.

Solución

a) Calculamos el rango de la matriz A. Para ello calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix} = -9 + 2 - 12 + 4 - 3 + 18 = 0$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, rang (A) = 2.

La matriz ampliada sería:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -9 & k \end{array}\right)$$

Calculamos ahora el rango de esta matriz A'. Sabemos que rang (A') ≥ rang (A). Como A' se consigue añadiendo una columna a A, bastará con calcular el siguiente menor de orden tres:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = k + 4 + 6 - 2 - 6 - 2k = -k + 2$$

Si k ≠ 2, rang (A') = 3. Por lo tanto, en este caso el sistema es incompatible.

b) La matriz ampliada sería:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & -9 & m \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de la matriz ampliada (A|C):

$$\text{rang}(A|C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = -m - 13$$

Si m = –13, rang (A|C) = 2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

c) La matriz ampliada sería:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 2 & 3 & -9 & -10 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rang}(A|B + C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -9 \\ 2 & 3 & -10 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Por lo tanto, como rang (A) = 2, el sistema es incompatible.

Actividad

Resuelve el siguiente sistema aplicando la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ x + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Calculamos el determinante de la matriz asociada al sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Calculamos el resto de determinantes para aplicar la regla de Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{21}{2} \qquad y = \frac{-8}{2} = -4 \qquad z = \frac{-11}{2}$$

Actividad

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 3 \\ kx + 10y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Halla, aplicando determinantes, los valores de *k* para los cuales el sistema no es compatible determinado.
b) Determina el valor de *k* para el cual el valor de *x* es 2. En este caso, calcula también los valores de *y* y *z*.

Solución

a) Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - k F_1]{F_2 \to F_2 - 2 F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 10-k & 4-k & 2-5k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - (10-k) F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 14-2k & 72-12k \end{array}\right)$$

Por tanto, no es compatible determinado si 14 – 2k = 0 o equivalentemente para k = 7.
Alternativamente por determinantes. El determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 20 + k - 3k - 10 - 8 = 14 - 2k$$

Con la misma conclusión.

b) Si x = 2, el sistema de las dos primeras ecuaciones da:

$$\left.\begin{aligned} y + z &= 3 \\ 3y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \text{ que tiene por solución } y = -2,\ z = 5.$$

Sustituyendo ahora en la tercera ecuación, resulta 2k – 20 + 20 = 2, de donde k = 1.

Actividad

Determina para qué valores de *k* se puede invertir la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

En caso de que sea posible, calcula la matriz inversa cuando *k* = 4.

Solución

La matriz A será invertible para aquellos valores en los que el determinante de la misma sea distinto de cero. Si calculamos dicho determinante obtenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 4 & 0 \end{vmatrix} = k^3 - 4k = k(k+2)(k-2)$$

A tiene inversa si k ≠ 0, k ≠ –2 o k ≠ 2.
Si k = 4, vamos a calcular A^{-1}. Calculamos primero el determinante de A:

$|A| = k^3 - 4k = 48$

Escribimos la matriz traspuesta de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de determinantes de los adjuntos de A^t será:

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 16 \\ 16 & 0 & -4 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Actividad

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + (k+1)y &= 1 \\ kx + 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *k*.
b) Resuélvelo para los valores de *k* que lo hacen compatible (determinado e indeterminado).

Solución

Discutimos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k+1 & 1 \\ k & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - k F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k+1 & 1 \\ 0 & 2-k^2-k & -2-k \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to -F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k+1 & 1 \\ 0 & (k-1)(k+2) & k+2 \end{array}\right)$$

Si k = 1 el sistema es incompatible.
Si k = –2 la última fila es toda cero y desaparece. El sistema será compatible indeterminado. La solución es:
$y = \lambda$; $x = 1 + \lambda$.
Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$ el sistema es Cramer compatible determinado.
En este caso, la solución es:

$$y = \frac{k+2}{(k-1)(k+2)} = \frac{1}{k-1}$$

$$x = 1 - \frac{k+1}{k-1} = \frac{k-1-k-1}{k-1} = \frac{-2}{k-1}.$$

Actividad

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} -3x + y + 2z = 1 \\ x + 5y - z = 4 \\ -4x - 2y + 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución

Calculamos el determinante de la matriz asociada al sistema:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -45 - 4 + 4 + 40 + 6 - 3$$

$$|A| = -2$$

Calculamos el resto de determinantes para aplicar la regla de Cramer:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 16 + 1 + 10 - 2 - 12 = -4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -36 - 2 + 4 + 32 + 3 - 3 = -2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 15 - 2 - 16 + 20 - 24 + 1 = -6$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{\Delta_x}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad \rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \rightarrow y = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad \rightarrow z = 3$$

todos