EJERCICIOS MATRICES

Actividad

Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot C$
c) $A \cdot B \cdot C$
d) $2(B + A \cdot C)$

Solución

a) $$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \\ 7 \cdot 5 + 6 \cdot 2 & 7 \cdot 0 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 47 & 18 \end{pmatrix}$$

b) $$\mathrm{B} \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 9 + 0 \cdot 2 & 5 \cdot 8 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 9 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 40 \\ 24 & 19 \end{pmatrix}$$

c) $$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \mathrm{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 & 40 \\ 24 & 19 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 45 + 4 \cdot 24 & 3 \cdot 40 + 4 \cdot 19 \\ 7 \cdot 45 + 6 \cdot 24 & 7 \cdot 40 + 6 \cdot 19 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 231 & 196 \\ 459 & 394 \end{pmatrix}$$

d) $$2\,(\mathrm{B} + \mathrm{A} \cdot \mathrm{C}) =$$
$$= 2\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right.$$
$$= 2\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 + 4 \cdot 2 \\ 7 \cdot 9 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix}\right.$$
$$= 2\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 28 \\ 75 & 62 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= 2\begin{pmatrix} 5 + 35 & 0 + 28 \\ 2 + 75 & 3 + 62 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 40 & 2 \cdot 28 \\ 2 \cdot 77 & 2 \cdot 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 5 \\ 154 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad

Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución

Actividad

Calcula la matriz traspuesta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

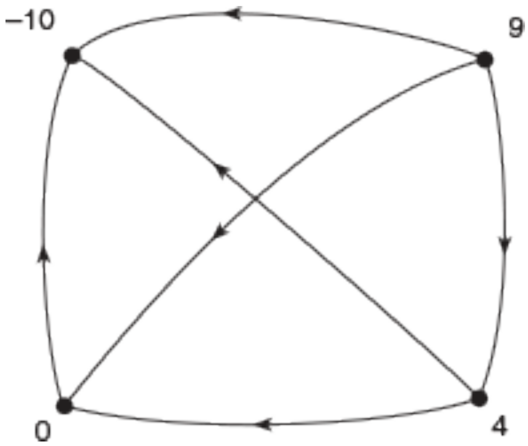
$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Actividad

Representa mediante un grafo la relación *R: es mayor que en el conjunto C* = {–10, 0, 4, 9}, y halla una matriz asociada al grafo anterior.

Solución

En un grafo, los elementos se representan por puntos, y la relación de un elemento con otro, mediante una curva del primero al segundo. Por tanto, un grafo asociado a esta relación es:



La matriz asociada a un grafo tiene tantas filas y tantas columnas como puntos tenga el grafo, cada una asociada a uno de los puntos. El elemento a_{ij} de la matriz es:

— 1 si el elemento (del conjunto) correspondiente a la fila i está relacionado con el correspondiente a la columna j.
— 0 en caso contrario. La matriz asociada a nuestro grafo es:

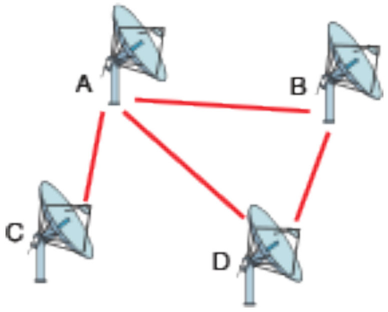
$$\begin{array}{c} \\ -10 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -10 & 0 & 4 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Actividad

El grafo de la figura representa las conexiones entre los elementos que forman un sistema de radiocomunicación.

a) Escribe una matriz asociada al grafo.

b) Calcula el número de caminos de comunicación en dos etapas entre cada par de elementos.



Solución

a) Al grafo de la figura podemos asociarle una matriz A en la que cada elemento indica el número de conexiones entre dos elementos que forman un sistema de radiocomunicación.

Número de conexiones			
$A \to A$ (0)	$A \to B$ (1)	$A \to C$ (1)	$A \to D$ (1)
$B \to A$ (1)	$B \to B$ (0)	$B \to C$ (0)	$B \to D$ (1)
$C \to A$ (1)	$C \to B$ (0)	$C \to C$ (0)	$C \to D$ (0)
$D \to A$ (1)	$D \to B$ (1)	$D \to C$ (0)	$D \to D$ (0)

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}$$

b) El producto de la matriz asociada al grafo por ella misma es tal que cada componente a_{ij} nos indica el número de conexiones que hay entre la antena correspondiente a la fila i y la correspondiente a la columna j pasando por otra antena, que es lo que nos piden:

$$T \cdot C + B = \begin{pmatrix} \frac{50}{120} & \frac{15}{230} & \frac{7}{250} \\ \frac{25}{120} & \frac{48}{230} & \frac{15}{250} \\ \frac{70}{120} & \frac{80}{230} & \frac{70}{250} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 230 \\ 250 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 48 \\ 142 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 + 15 + 7 \\ 25 + 48 + 15 \\ 70 + 80 + 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ 142 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 72 \\ 88 \\ 220 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ 142 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 230 \\ 250 \end{pmatrix} = C$$

Actividad

En un determinado país, las matrices de transacciones intersectoriales y de demanda final en cierto año son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 15 & 9 \\ 30 & 42 & 22 \\ 90 & 70 & 65 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 44 \\ 135 \\ 40 \end{pmatrix}$$

— Halla la matriz de *outputs* totales.

Solución

Según el enunciado tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 15 & 9 \\ 30 & 42 & 22 \\ 90 & 70 & 65 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 44 \\ 135 \\ 40 \end{pmatrix}$$

y sabemos que se cumple la relación T · C + B = C, donde:

$$T \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{45}{a} & \frac{15}{b} & \frac{9}{c} \\ \frac{30}{a} & \frac{42}{b} & \frac{22}{c} \\ \frac{90}{a} & \frac{70}{b} & \frac{65}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 45 + 15 + 9 \\ 30 + 42 + 22 \\ 90 + 70 + 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 94 \\ 225 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de *outputs* totales, C, es:

$$C = T \cdot C + B = \begin{pmatrix} 69 \\ 94 \\ 225 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 135 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 \\ 229 \\ 265 \end{pmatrix}$$

Actividad

La matriz tecnológica y la matriz de *outputs* totales, que modelan la economía productiva de un país un determinado año, son las siguientes:

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 290 \end{pmatrix}$$

— Halla la matriz de demanda final.

Solución

Encontramos la matriz de demanda final, B, a partir de la relación T · C + B = C:

$$T \cdot C + B = C \Leftrightarrow B = C - T \cdot C =$$

$$= \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 290 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 290 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 290 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 139 \\ 134 \\ 217 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 116 \\ 73 \end{pmatrix}$$

Actividad

Cada año, el 20 % de los usuarios del transporte público, *P*, de una ciudad pasa a utilizar el vehículo privado, *V*. Por otra parte, el 10 % de los usuarios del vehículo privado pasa a utilizar el transporte público. Esta situación puede estudiarse matemáticamente mediante cadenas de Markov.

a) Escribe la matriz de transición que modela esta situación.
b) Si en el año 2009 el 30 % de los ciudadanos utilizó el transporte público y el 70 %, el vehículo privado, ¿cuál será el porcentaje de usuarios del transporte público y del vehículo privado en los años 2010 y 2011?

Solución

a) Seguimos el mismo razonamiento del ejercicio resuelto para encontrar la matriz de transición:

Consideramos:
P_t: la fracción de población que utiliza transporte público en el año t.
V_t: la fracción de población que utiliza vehículo privado en el año t.

Así:
$P_{t+1} = 0,8 \cdot P_t + 0,1\ V_t$
$V_{t+1} = 0,2 \cdot P_t + 0,9\ V_t$

Esto equivale al producto de matrices:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_{t+1} \\ V_{t+1} \end{pmatrix}}_{Pt+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} P_t \\ V_t \end{pmatrix}}_{Pt}$$

Luego la matriz de transición que modela esta situación es:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

b) Sabemos que en el año 2009

$$p_{2009} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$p_{2010} = A \cdot p_{2009} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,310 \\ 0,690 \end{pmatrix}$$

$$p_{2011} = A \cdot p_{2010} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,310 \\ 0,690 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,317 \\ 0,683 \end{pmatrix}$$

Actividad

Escribe una matriz cuadrada de orden 4 con las características que, en cada caso, se indican a continuación:

a) Triangular superior
b) Triangular inferior
c) Diagonal
d) Identidad

Solución

a) La respuesta sugerida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La respuesta sugerida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) La respuesta sugerida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Es la matriz

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad

Calcula el producto $A \cdot B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

— ¿Es posible calcular el producto $B \cdot A$? Explica por qué.

Solución

Basta con usar la definición:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 2 \\ -2 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 14 & 5 \\ -9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

No es posible calcular el producto B · A, pues el número de columnas de la primera, B, que es 3, es distinto del número de filas de la segunda, A, que es 2.

Actividad

Halla la matriz traspuesta de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

Intercambiando filas por columnas da la matriz obtenemos:

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Actividad

Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula *A* (*B* + *C*) y comprueba que se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Solución

En primer lugar calculamos B + C, lo cual es posible ya que ambas matrices tienen la misma dimensión. Así se obtiene:

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtengamos ahora A · (B + C), lo cual también es posible, ya que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B + C. Así pues:

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19 & 3 \\ 22 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

Se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición ya que:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 8 & 0 \\ 14 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 8 & 16 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19 & 3 \\ 22 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

Actividad

Sea

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x+1 & x-7 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Determina el valor o los valores de *x* para los que no existe inversa de *A*.
b) Calcula *a* y *b* para que con *x* = 2 se cumpla

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solución

a) Una matriz cuadrada no tiene inversa cuando su determinante es nulo. Buscamos, por tanto, los valores de x que anulan el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} x & -3 \\ x+1 & x-7 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Así, la matriz A no tiene inversa para x = 3 y x = 1.

$$b)\ A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de A para x = 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \;;\; \mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{Adj}(A)]^T = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los valores de a y b son:

a = –2 y b = –1

Actividad

Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

La tercera fila de la matriz A se puede obtener como suma de las dos primeras, por lo tanto se puede suprimir sin que altere el rango.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la primera fila por la segunda y hacemos sucesivas transformaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 21 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 21 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido una matriz escalonada en la que tenemos 2 filas no nulas. Por lo tanto rang (A) = 2.
Intercambiando filas de la matriz B obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Las tres primeras filas forman una matriz escalonada, en la que ninguna de ellas es nula, por lo tanto rang (B) = 3, no pudiendo ser mayor porque no hay más columnas.

Actividad

Encuentra dos matrices, *X* e *Y*, de orden 2 × 2, tales que se verifiquen las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} AX + BY &= C \\ AX &= Y \end{aligned}\right\}$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución

En la primera ecuación sustituimos AX por Y y despejamos Y.

$$Y + BY = C \quad \rightarrow \quad (I + B)Y = C \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad Y = (I + B)^{-1}C$$

Calculamos la matriz I + B:

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa será:

$$(I + B)^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz Y:

$$Y = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$
$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X despejándola de la segunda ecuación:

$AX = Y \rightarrow X = A^{-1}Y$

Hallamos la inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos X:

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -0,5 & -0,75 \end{pmatrix}$$

Actividad

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^2 + 2AB + B^2$.
b) Calcula $(A + B)^2$.

Solución

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

b)

$$(A + B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Actividad

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtén los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, comentando la dimensión de los resultados obtenidos.

Solución

El producto A · B se reduce a un número, ya que la dimensión de la matriz producto viene dada por tantas flas como tiene la primera y tantas columnas como tenga la segunda. Así pues:

$A \cdot B = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 11$

Por la misma razón, B · A será una matriz de dimensión 3 × 3, cuya expresión es:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Actividad

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Averigua si existe una matriz *C* que cumpla *B* · *C* = *A* y, si es el caso, calcúlala.

Solución

Escribimos el producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar los valores posibles, formamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 3z &= 2 \\ 2x + 6z &= 1 \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} y + 3t &= 3 \\ 2y + 6t &= 2 \end{aligned}\right\}$$

que es incompatible. Por lo tanto, no existe ninguna matriz C.

Actividad

Halla la matriz inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

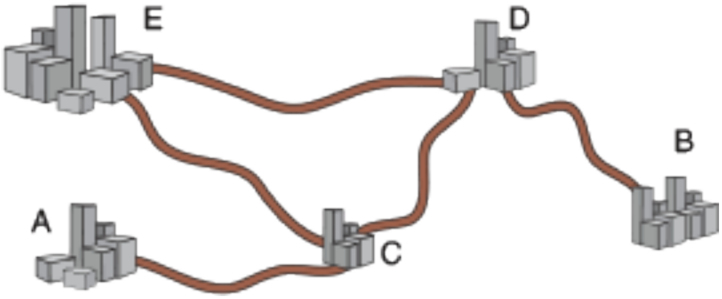
Solución

Aplicando el método de Gauss-Jordan, y al hacer las correspondientes transformaciones a la matriz ampliada se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{4}{21} & \frac{-1}{42} \\ \frac{-2}{7} & \frac{5}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{3}{14} & \frac{-2}{21} & \frac{11}{42} \end{pmatrix}$$

Actividad

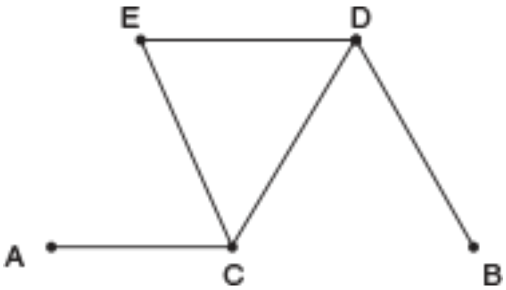
Observa la red de carreteras del siguiente mapa:



a) Representa mediante un grafo esta red de carreteras y escribe una matriz asociada a él.
b) Halla el número de caminos en dos y tres etapas que conectan *A* y *B*.

Solución

a) Basta con representar cada ciudad con un punto y cada carretera con una línea:



La matriz asociada indica si la localidad correspondiente a cada fila está relacionada con la correspondiente a cada columna:

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

b) Sabemos que el elemento a_{ij} de M^n nos da el número de caminos en n etapas entre la localidad correspondiente a la fila i y la correspondiente a la columna j.
Para encontrar los caminos en dos etapas entre A y B, calculamos M^2 y miramos cuál es el elemento a_{12}:

$$M^2 = M \cdot M =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entre A y B hay $a_{12} = 0$ caminos en dos etapas.
Para encontrar los caminos en tres etapas entre A y B, basta con calcular el elemento a_{12} de M^3, que es:

$$a_{12} = (M^3)_{12} = (M^2 \cdot M)_{12} =$$

$$= F_1 \cdot C_2 = (1\ 0\ 0\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Entre A y B hay $a_{12} = 1$ camino en tres etapas.

Actividad

Sean A y B dos matrices de dimensión $n \times 1$ y C una matriz de dimensión desconocida.

a) Si $M \cdot A = B$, ¿qué dimensiones debe tener la matriz M?
b) Si $M–1 \cdot C = B$, ¿qué dimensión debe tener la matriz C?
c) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

¿cuál es el valor de M?

Solución

Para poder efectuar el producto $M \cdot A$, el número de columnas de M ha de coincidir con el número de filas de A. Según el enunciado, A tiene n filas; por tanto, M tendrá n columnas.
a) $M \cdot A = B \Rightarrow$ el número de filas de M debe coincidir con el número de filas de B. Según el enunciado, B tiene n filas. Por tanto, M tendrá n filas.
En consecuencia, M es una matriz cuadrada de orden n.
b) Podemos razonar como en el apartado a) pero basta observar que M^{-1} tiene el mismo orden que M y puesto que $M \cdot A = B$ y $M^{-1} \cdot C = B$, las dimensiones de C deben coincidir con las de A.
En consecuencia, C es una matriz de dimensión $n \times 1$.
Por otro lado, si $M^{-1} \cdot C = B$, existe M^{-1}; lo cual significa que $\det(M) \neq 0$.
c) Puesto que A, B y C tienen dimensión 2×1, M será una matriz cuadrada de orden 2.

Si tenemos en cuenta, además, que $M^{-1} \cdot C = B \Rightarrow M \cdot M^{-1} \cdot C = M \cdot B \Rightarrow C = M \cdot B$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} M \cdot A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ z - t = 0 \end{cases} \\ M \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 0 = 4 \\ z + 0 = 1 \end{cases} \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es x = 4, y = 3, z = 1, t = 1. Por tanto:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

todos