EJERCICIOS RESUELTOS PL

Actividad

Una empresa fabrica dos modelos distintos de un mismo producto: el STAR i el POOM. Cada semana ha de fabricar como mínimo 30 000 unidades de STAR y 800 unidades de POOM, por lo que ha de mecanizar el proceso de producción. Puede elegir entre dos tipos de máquinas: con la máquina *A* se producen semanalmente 300 unidades de STAR y sólo 4 de POOM; en cambio la máquina *B* puede producir en el mismo período de tiempo 100 unidades de STAR y 8 de POOM. Sabiendo que la máquina *A* cuesta el doble que la máquina B, ¿cuál es la inversión que le resulta más económica a la empresa?

Solución

Sea x el número de máquinas del tipo A , e y el número de máquinas del tipo B que la empresa ha de adquirir.
La función objetivo que queremos maximizar es la que nos da el importe de inversión mínima necesaria, definida por la siguiente expresión, en la que se considera que el precio de la máquina B es p, y por lo tanto el precio de la máquina A es 2p:

$z = 2px + py$

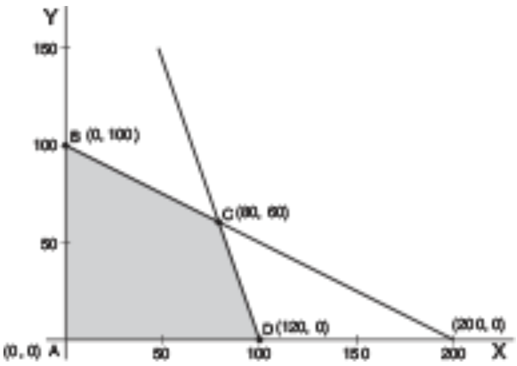
Entre las dos máquinas se han de producir como mínimo 30000 unidades de STAR y 800 de POOM. Por lo tanto, tendremos las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 300\,x + 100\,y \geq 30\,000 \\ 4\,x + 8\,y \geq 800 \end{array}\right\}$$

Se comprarán un número no negativo de máquinas.

$x \geq 0,\ y \geq 0$

Resolvemos el sistema de inecuaciones para hallar la región factible.



Los vértices de esta región son los puntos de corte de las rectas que lo definen, y las coordenadas de esos puntos son:

A = (0, 0)
B = (0, 100)
C = (80, 60)
D = (100, 0)

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos para ver en cual de ellos se alcanza el máximo:

A = (0 ,0) ⇒ $z = 2p \cdot 0 + p \cdot 0 = 0$
B = (0 ,24) ⇒ $z = 2p \cdot 0 + p \cdot 100 = 100p$
C = (8 ,20) ⇒ $z = 2p \cdot 80 + p \cdot 60 = 220p$

D = (16 ,0) ⇒ z = 2p · 100 + p · 0 = 200p

La función objetivo es máxima en el punto C sea cual sea el valor de p. Por tanto se comprarán 80 máquinas el tipo A y 60 del tipo B.

Actividad

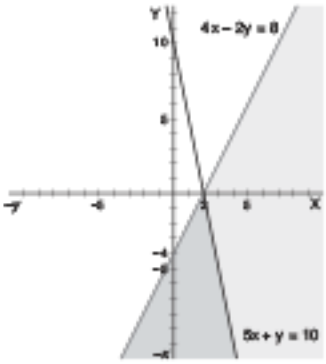
Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones, explicando detalladamente los distintos pasos del proceso seguido.

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 2y \geq 8 \\ 5x + y \leq 10 \end{array}\right\}$$

Indica qué puntos de los ejes de coordenadas son soluciones del sistema.

Solución

Representamos gráficamente las soluciones de ambas inecuaciones. Para ello representamos las rectas 4 x – 2 y = 8 y 5 x + y = 10.



Como el punto (0, 0) no es solución de 4 x – 2 y ≥ 8 rayamos el semiplano que determina esta recta que no contiene dicho punto.
Como el punto (0, 0) es solución de 5 x + y ≤ 10 rayamos el semiplano que determina esta recta que contiene dicho punto.
La solución del sistema de inecuaciones viene determinada por la intersección de los conjuntos solución de cada una de las inecuaciones que forman parte del sistema.

Actividad

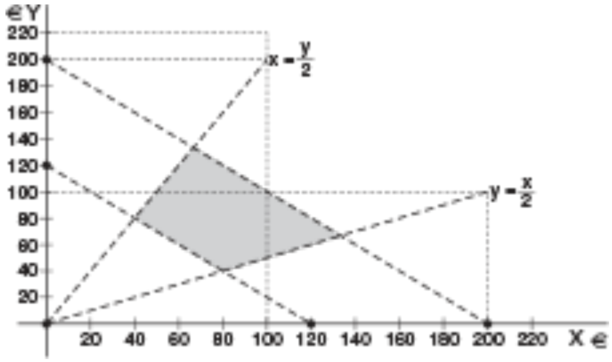
Juan le dice a José: «Entre los dos tenemos más de 120 €, pero si a los dos nos quitan la mitad de lo que tiene el otro (y esto es posible), nos quedaremos con menos de 100 €».
Representa la región de soluciones factibles a la pregunta: ¿cuánto dinero tiene cada uno? Da una posible solución a dicha pregunta.

Solución

Sea x el dinero que tiene Juan e y el que tiene José.
Planteamos las restricciones con el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y > 120 \\ \left(x - \dfrac{y}{2}\right) + \left(y - \dfrac{x}{2}\right) < 100 \\ x > \dfrac{y}{2} \\ y > \dfrac{x}{2} \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas correspondientes y marcamos la región solución, teniendo en cuenta que ninguno de los puntos de las rectas forman parte de la solución (por eso están punteadas).



Actividad

Una constructora dispone de 60 000 m^2 disponibles para urbanizar. Decide construir dos tipos de viviendas: unas, en parcelas de 200 m^2, cuyo precio de venta será de 300 000 €; y otras, de mayor calidad, en parcelas de 300 m^2, que costarán 400 000 €. Las viviendas del primer tipo están pensadas para un máximo de 5 habitantes y las del segundo para un máximo de 4.
El Ayuntamiento le impone dos condiciones: 1) el número de casas no puede superar las 225; 2) el número de habitantes esperado no puede sobrepasar el millar.
¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para maximizar los ingresos de venta?

Solución

Sea x el número de viviendas de 200 m^2, e y el número de viviendas de 300 m^2 que se van a construir. La función objetivo que queremos maximizar es la que nos da el importe de los ingresos obtenidos por la empresa, definida por la siguiente expresión:

$z = 30\,x + 40\,y$

Las restricciones a las que están sujetas las variables son:

• El número de edificios no puede ser superior a 225.

$x + y \leq 225$

• El número de habitantes de los edificios no puede sobrepasar los 1000.

$5\,x + 4\,y \leq 1000$

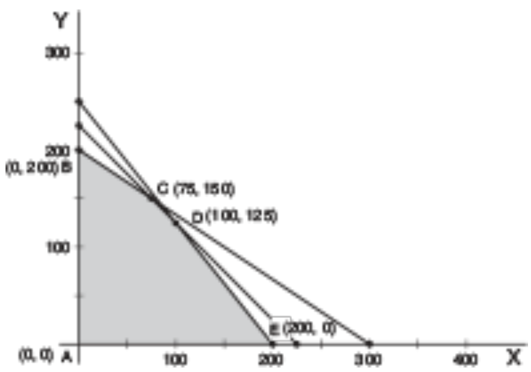
• Para construir todas las casas se dispone de 60000 m^2 de terreno edificable

$200\,x + 300\,y \leq 60\,000$

• Se construyen un número no negativo de casas.

$x \geq 0,\ y \geq 0$

Resolvemos el sistema de inecuaciones para hallar la región factible.



Los vértices de esta región son los puntos de corte de las rectas que lo definen, y las coordenadas de esos puntos son:

A = (0, 0)
B = (0, 200)
C = (75, 150)
D = (100, 125)
E = (200, 0)

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos para ver en cual de ellos se alcanza el máximo:

A = (0, 0) = (0 ,0) ⇒ z = 30 · 0 + 40 · 0 = 0
B = (0, 200) = (0 ,0) ⇒ z = 30 · 0 + 40 · 200 = 8000
C = (75, 150) = (0 ,0) ⇒ z = 30 · 75 + 40 · 150 = 8250
D = (100, 125) = (0 ,0) ⇒ z =30 · 100 + 40 · 125 = 8000
E = (200, 0) = (0 ,0) ⇒ z = 30 · 200 + 40 · 0 = 6000

Luego se deben construir 75 casas del tipo x y 150 del tipo y.

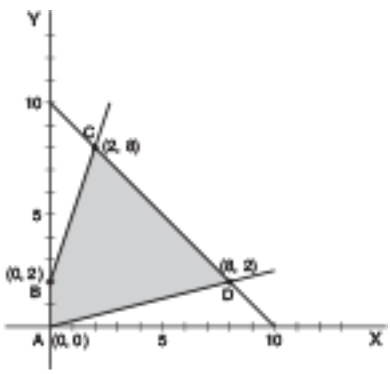
Actividad

Maximiza y minimiza la función $f(x, y) = 2x - 4y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &\leq 10 \\ 3x - y &\geq -2 \\ x - 4y &\leq 0 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Resolviendo el sistema de inecuaciones formado por las restricciones obtenemos la región acotada representada en el siguiente gráfico:



Los vértices del polígono son A = (0, 0), B = (0, 2), C = (2, 8) y D = (8, 2). Calculamos el valor de la función objetivo en estos puntos y tenemos:

f(0,0) = 2 x – 4 y = 0
f(0,2) = 2 x – 4 y = –8
f(2,8) = 2 x – 4 y = –28
f(8,2) = 2 x – 4 y = 8

Por tanto la función objetivo alcanza su valor mínimo en el punto C (x = 2; y = 8) y su valor máximo en el punto D (x = 8; y = 2)

Actividad

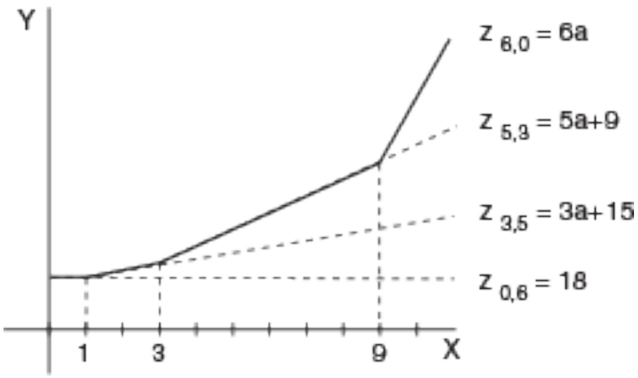
El pentágono limitado por los vértices (0, 0), (0, 6), (3, 5), (5, 3) y (6, 0) corresponde a la región factible de un problema de programación lineal en el que maximizamos la función objetivo $z = ax + 3y$ ($a \geq 0$).

a) Indica la solución (o soluciones) en función del parámetro a.
b) ¿Cuál es la solución para $a = 4$? ¿Para qué valores de a la solución está en (0, 6)?

Solución

Sabemos por teoría que en un problema de programación lineal cuya región factible es un polígono existe solución y ésta está en la frontera de dicha región. Desechamos el vértice (0, 0) al que corresponde $z_{0,\,0} = 0$ por ser menor que cualquier otro valor de $z = ax + 3y$ en la región factible.
Construimos y representamos gráficamente cuatro funciones que nos proporcionan el valor de la función objetivo en los cuatro vértices restantes en función de a:

$$z_{0,6} = 18$$
$$z_{3,5} = 3a + 15$$
$$z_{5,3} = 5a + 9$$
$$z_{6,0} = 6a$$



a) Observando la gráfica de las funciones z es fácil ver:
Para $0 \leq a < 1$, la solución es (0, 6) ya que los valores más grandes corresponden a $z_{0,\,6}$.
Para $a = 1$, las soluciones son todos los puntos del segmento que une (0, 6) y (3, 5) ya que los valores más grandes corresponden tanto a $z_{0,\,6}$ como a $z_{3,\,5}$.
Para $1 < a < 3$, la solución es (3, 5) ya que los valores más grandes corresponden a $z_{3,\,5}$.
Para $a = 3$, las soluciones son todos los puntos del segmento que une (3, 5) y (5, 3) ya que los valores más grandes corresponden tanto a $z_{3,\,5}$ como a $z_{5,\,3}$.
Para $3 < a < 9$, la solución es (5, 3) ya que los valores más grandes corresponden a $z_{5,\,3}$.
Para $a = 9$, las soluciones son todos los puntos del segmento que une (5, 3) y (6, 0) ya que los valores más grandes corresponden tanto a $z_{5,\,3}$ como a $z_{6,\,0}$.
Para $9 < a$, la solución es (6, 0) ya que los valores más grandes corresponden a $z_{6,\,0}$.

b) A partir del apartado a), obtenemos que para $a = 4$ la solución es (5, 3). Para $a \leq 1$, la solución es (0, 6).

Actividad

Una fábrica de muebles está produciendo mesas y sillas. Para fabricar una mesa, se requieren 5 horas de trabajo y 20 kg de madera. Para fabricar una silla, se emplean 10 horas de trabajo, 8 kg de madera y 1 m de tela. En la sección hay 6 trabajadores que tienen una jornada laboral de 8 horas diarias y en el almacén hay 320 kg de madera y 30 m de tela.
Si por la venta de una mesa se obtiene un beneficio de 90 €, y por la venta de una silla 50 €, ¿cuántas mesas y cuántas sillas tienen que fabricarse durante los próximos 5 días para que el beneficio sea máximo? ¿Qué influencia tiene la tela disponible en esta decisión?

Solución

Sea x el número de mesas fabricadas e y el numero de sillas.
La función objetivo que queremos maximizar es la que nos da en el importe del beneficio obtenido por la empresa, definida por la siguiente expresión:

z = 90 x + 50 y

Las restricciones a las que están sujetas las variables son:

• En 5 días se dispone de 240 horas de trabajo, que es el que prestan seis personas trabajando ocho horas diarias. Como se utilizan 5 horas de trabajo para fabricar una mesa y 10 horas para fabricar una silla, tenemos:

$5x + 10y \leq 240$

• En el almacén hay 320 Kg. de madera. Si se utilizan 20 Kg. para fabricar una mesa y 8 kg para fabricar una silla nos queda la siguiente restricción:

$20x + 8y \leq 320$

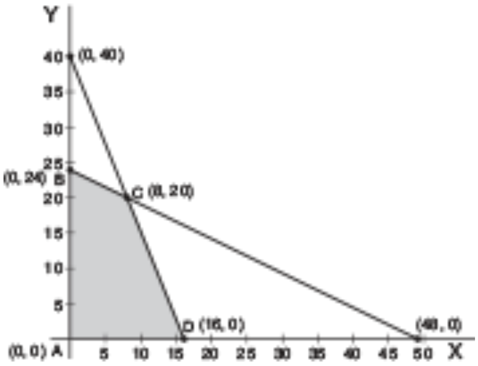
• Como hay 30 metros de tela en el almacén, y para cada silla se utiliza un metro, no se podrán fabricar más de 30 sillas.

$y \leq 30$

• Se fabricará un número no negativo de mesas y sillas.

$x \geq 0, y \geq 0$

Resolvemos el sistema de inecuaciones para hallar la región factible.



Los vértices de esta región son los puntos de corte de las rectas que lo definen, y las coordenadas de esos puntos son:

A = (0, 0)
B = (0, 24)
C = (8, 20)
D = (16, 0)

Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos para ver en cual de ellos se alcanza el máximo:

A = (0, 0) ⇒ z = 90 · 0 + 50 · 0 = 0
B = (0, 24) ⇒ z = 90 · 0 + 50 · 24 = 1200
C = (8, 20) ⇒ z = 90 · 8 + 50 · 20 = 1720
D = (16, 0) ⇒ z = 90 · 16 + 50 · 0 = 1440

La función objetivo es máxima en el punto C. Por tanto se fabricarán 8 mesas y 20 sillas para obtener el máximo beneficio.
La tela disponible no es ninguna limitación para la toma de esta restricción, ya que la zona delimitada por ella engloba toda la región factible.
Actividad

Un curso de 30 alumnos come en un restaurante durante el viaje de fin de curso. El cocinero prepara una ración de espaguetis para cada uno. Algunos comen solamente la mitad de la ración, otros un tercio y el resto se la come completa. Al final sobra la mitad de los espaguetis servidos. Suponiendo que el grupo de alumnos que come la mitad es el doble del que lo come todo, ¿cuál es el número de alumnos de cada grupo?

Solución

Definimos en primer lugar las incógnitas:

x: número de alumnos que comen la mitad de la ración.
y: número de alumnos que comen un tercio de la ración.
z: número de alumnos que comen toda la ración.

Si denominamos k (no importa la unidad) a la cantidad correspondiente a una ración, las condiciones del enunciado se traducen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ \frac{k}{2}x+\frac{k}{3}y+kz=\frac{30k}{2} \\ x \geq 2z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ 3x+2y+6z=90 \\ x-2z=0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por el método de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 90 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=10\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 3 & 90 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=15$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 3 & 2 & 90 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}=5$$

Comprobamos que se verifica la inecuación:

$x \geq 2z \Rightarrow 10 \geq 2 \cdot 5$

Así, la solución es: 10 alumnos comen media ración, 15 alumnos un tercio y 5 todo.

Actividad

Un trabajador dedica parte de su jornada laboral al reparto de revistas especializadas. La empresa BOOK le paga 0,1€ por cada ejemplar repartido, mientras que la empresa WARGAMER le paga a 0,05 € el ejemplar. El trabajador debe repartir por lo menos 30 ejemplares de BOOK, pero el número total de ejemplares de esta revista nunca debe ser superior al doble de los ejemplares de la otra.
Si puede repartir un máximo de 148 ejemplares cada día, averigua cuántas revistas de cada empresa debe repartir para que el beneficio sea máximo.

Solución

Sea x el número de revistas de la empresa BOOK e y el de revistas de la empresa WARGAMER que reparte el trabajador en un día.
Queremos maximizar el beneficio que obtiene el trabajador del reparto de revistas, que viene dado en euros por la función:

$z = 0{,}1\ x + 0{,}05\ y$

Las condiciones que deben cumplir las variables son:

• El trabajador debe repartir por lo menos 30 ejemplares de BOOK:

$x \geq 30$

• El número de ejemplares de BOOK repartidos no debe ser superior al doble de los ejemplares repartidos de WARGAMER:

$x \leq 2y$

• El trabajador puede repartir un máximo de 148 ejemplares al día:

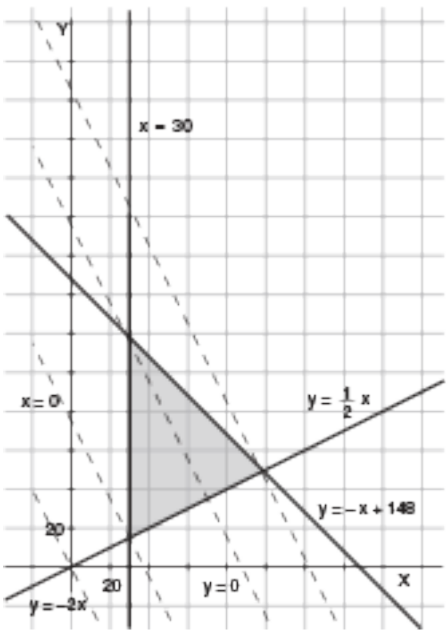
$x + y \leq 148$

• El número de ejemplares de cada revista repartidos tiene que ser un número entero no negativo:

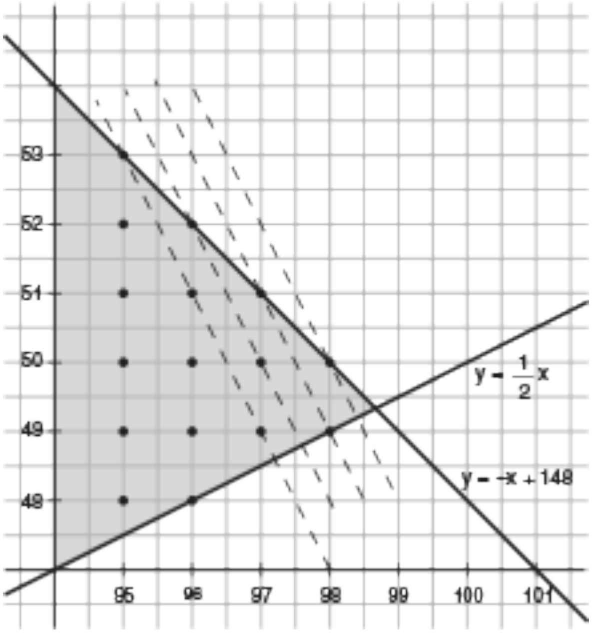
$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$

Resolvemos gráficamente el problema planteado y obtenemos que la función objetivo alcanza su máximo en el vértice correspondiente al punto de corte entre las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x \\ y = -x + 148 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{296}{3} \\ y = \frac{148}{3} \end{array}$$



Como las coordenadas de este punto no son enteras, no es la solución. Para encontrarla, representamos las soluciones válidas del problema alrededor del vértice que maximiza la función y dentro de la región factible, y trazamos las rectas de nivel por esos puntos.



Observamos que la recta de nivel con una mayor ordenada en el origen, que es la que queda por encima de todas las demás, es la que pasa por el punto (98, 50).
Por tanto, ésta es la solución del problema. Para maximizar el beneficio obtenido por el trabajador, debe repartir 98 revistas de la empresa BOOK y 50 de la empresa WARGAMER.

Actividad

Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\leq 8 \\ x + y &\geq 5 \\ x - 5y &\leq 0 \end{aligned}\right\}$$

a) Resuélvelo gráficamente.
b) Halla todas las soluciones enteras.

Solución

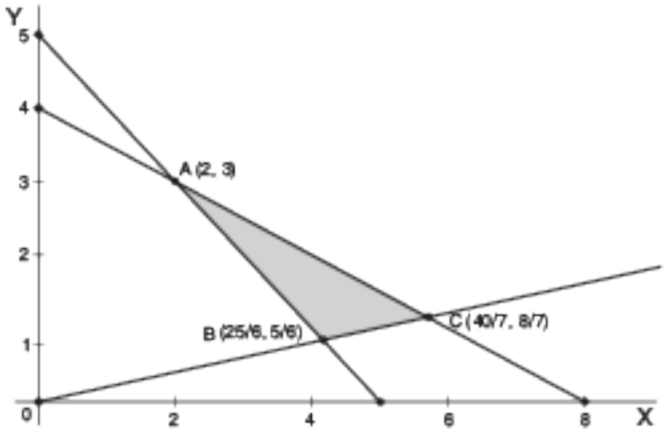
Los puntos de intersección de los lados son:

$$A : \left\{\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$B : \left\{\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 5y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{5}{6} \\ x &= \frac{25}{6} \end{aligned}\right\}$$

$$C : \left\{\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ x - 5y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= \frac{8}{7} \\ x &= \frac{40}{7} \end{aligned}\right\}$$

La gráfica de la región factible es:



b) Para determinar las soluciones enteras fijamos el mínimo valor entero de y factible que es y = 1 y ponemos las condiciones sobre las x. Resultan:

$$y = 1 \quad \left.\begin{matrix} x \le 6 \\ x \ge 4 \\ x \le 5 \end{matrix}\right\} \rightarrow (4,1) \quad \text{i} \quad (5,1);$$

$$y = 2 \quad \left.\begin{matrix} x \le 4 \\ x \ge 3 \\ x \le 10 \end{matrix}\right\} \rightarrow (3,2) \quad \text{i} \quad (4,2);$$

$$y = 3 \quad \left.\begin{matrix} x \le 2 \\ x \ge 2 \\ x \le 15 \end{matrix}\right\} \rightarrow (2,3).$$

Estas son las únicas soluciones enteras.