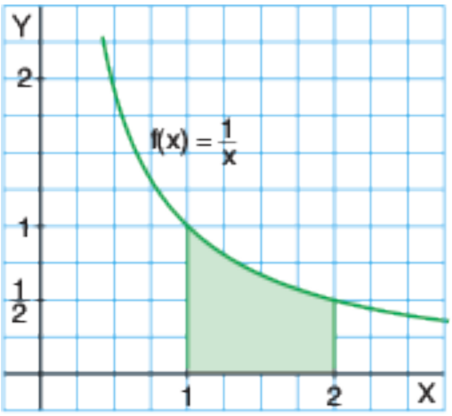
INTEGRALES

Actividad

Da una aproximación por defecto y una aproximación por exceso del área del recinto delimitado por la función

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.



Solución

El procedimiento 1 nos da aproximaciones por defecto. Por ejemplo:

$$s_2 = f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(2)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

El procedimiento 2 nos da aproximaciones por exceso. Por ejemplo:

$$S_2 = f(1)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Por tanto, el área A considerada es:

$$0,58 = \frac{7}{12} = s_2 \leq A \leq S_2 = \frac{5}{6} = 0,83$$

Actividad

Aplica el método de los trapecios para calcular aproximadamente el área comprendida entre el eje de abscisas, las rectas $x = 2$ y $x = 17$ y la gráfica de la función $y = f(x)$, a la que pertenecen los puntos de la tabla siguiente:

x	2	5	8	11	14	17
y	0,69	1,61	2	2,42	2,64	2,83

Solución

Dada la tabla

x	2	5	8	11	14	17
y	0,69	1,61	2	2,42	2,64	2,83

Observamos que tenemos 5 intervalos y calculamos h:

$$h = \frac{17-2}{5} = 3$$

Aplicamos la fórmula del método de los trapecios:

$$\int_2^{17} f(x)\,dx \approx 3\left(\frac{0,69}{2} + 1,61 + 2 + 2,42 + 2,64 + \frac{2,83}{2}\right) = 31,29$$

Actividad

Utiliza el cambio de variable indicado para calcular estas integrales.

$$a)\ \int \left(\frac{1}{3}x+2\right)^8 dx \left(\text{Cambio: } \frac{1}{3}x + 2 = t\right) \qquad b)\ \int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx \ (\text{Cambio: sen } x = t$$

Solución

a) 1. Sustituimos la variable x por t.
Para ello efectuamos el canvio de variable

$$\frac{1}{3}x + 2 = t.$$

Luego:

$$\frac{1}{3}dx = dt \Rightarrow dx = 3\,dt$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int\left(\frac{1}{3}x+2\right)^8 dx = \int t^8 \cdot 3\,dt$$

2. Calculamos la nueva integral:

$$\int 3t^8\,dt = 3\int t^8\,dt = 3\frac{t^9}{9} + C = \frac{t^9}{3} + C$$

3. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int\left(\frac{1}{3}x+2\right)^8 dx = \frac{t^9}{3} + C = \frac{\left(\frac{1}{3}x+2\right)^9}{3} + C$$

b) 1. Sustituimos la variable x por t.
Para ello efectuamos el cambio de variable sen x = t.
Luego:

cos x dx = dt

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

2. Calculamos la nueva integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

3. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} + C$$

c) 1. Sustituimos la variable x por t. Para ello efectuamos el cambio de variable $e^x = t$. Luego:

$$e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

2. Calculamos la nueva integral:

$$\int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+t| + C$$

3. Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln|1+t| + C = \ln|1+e^x| + C = \ln(1+e^x) + C$$

Actividad

Utiliza el método de integración por partes para hallar las integrales siguientes.

a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$
b) $\int 3\, x\, e^x\, dx$
c) $\int x^5 \ln x\, dx$
d) $\int x\, e^{3x}\, dx$

Solución

a) Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v:

u = x ⇒ du = dx
dv = sen x dx ⇒ v = –cos x

Aplicamos la expresión

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

y resolvemos la nueva integral:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x\cos x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

b) Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v:

$u = 3x \Rightarrow du = 3\,dx$
$dv = \operatorname{sen} e^x \, dx \Rightarrow v = e^x$

Aplicamos la expresión

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

y resolvemos la nueva integral:

$$\int 3x e^x dx = 3xe^x - \int 3e^x dx = 3xe^x - 3e^x + C = 3e^x(x-1) + C$$

c) Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = x^5 dx \Rightarrow v = \frac{1}{6}x^6$$

Aplicamos la expresión

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

y resolvemos la nueva integral:

$$\begin{aligned}\int x^5 \ln x \, dx &= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \int \frac{1}{6}x^6 \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \int \frac{1}{6}x^5 dx \\ &= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}x^6 + C \\ &= \frac{x^6(6\ln x - 1)}{36} + C\end{aligned}$$

d) Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Aplicamos la expresión

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

y resolvemos la nueva integral:

$$\int x\,e^{3x}dx = \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{e^{3x}(3x-1)}{9} + C$$

Actividad

Halla el área limitada por la gráfica de $f(x) = \cos x$ y el eje de abscisas entre las abscisas

$\frac{\pi}{2}$ y π.

Solución

1. Hallamos los ceros de f:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. La función f no tiene ceros en

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right);$$

luego el área pedida es:

$$A = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right| = \left|\Big[\operatorname{sen} x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right| = \left|\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right| = |0-1| = 1 \Rightarrow A = 1\,u^2$$

Actividad

Halla el área limitada por $f(x) = x^2 - 2x - 15$, el eje OX y las rectas $x = -4$ y $x = 7$.

Solución

1. Hallamos los ceros de f:

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ o $x = 5$

2. Los dos ceros se encuentran entre –4 y 7, luego el área pedida es:

$$A = \left|\int_{-4}^{-3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-3}^{5} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{5}^{7} f(x)\,dx\right|$$

Para calcular las integrales, usaremos la regla de Barrow:

$$\int f(x)\,dx = \int (x^2 - 2x - 15)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x + C$$

La primitiva obtenida al hacer C = 0 es:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x$$

Finalmente:

$$A = |F(-3) - F(-4)| + |F(5) - F(-3)| +$$

$$+ |F(7) - F(5)| =$$

$$= \left|27 - \frac{68}{3}\right| + \left|-\frac{175}{3} - 27\right| +$$

$$+ \left|-\frac{119}{3} - \left(-\frac{175}{3}\right)\right| = \frac{13}{3} + \frac{256}{3} + \frac{56}{3} =$$

$$= \frac{325}{3} \Rightarrow A = \frac{325}{3}\,u^2$$

Actividad

Halla el área limitada por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y el eje horizontal entre las abscisas –5 y

$\frac{3}{2}$.

Solución

1. Hallamos los ceros de f:

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 2$ o $x = -3$

2. En

$$\left(-5, \frac{3}{2}\right)$$

sólo hay dos ceros de f, x = –3 y x = –1; luego el área pedida es:

$$A = \left|\int_{-5}^{-3} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,dx\right| +$$
$$+\left|\int_{-3}^{-1} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,dx\right| +$$
$$+\left|\int_{-1}^{\frac{3}{2}} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,dx\right| =$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x\right]_{-5}^{-3}\right| +$$
$$+\left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-1}\right| +$$
$$+\left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x\right]_{-1}^{\frac{3}{2}}\right| =$$
$$= \left|-\frac{128}{3}\right| + \frac{16}{3} + \left|-\frac{2725}{192}\right| =$$
$$= \frac{128}{3} + \frac{16}{3} + \frac{2725}{192} = \frac{11941}{192} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = \frac{11941}{192}\,u^2$$

Actividad

Halla el área limitada por $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ y el eje OX.

Solución

1. Hallamos los ceros de f:

$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4,\ x = 1$ o $x = 2$

2. Los ceros de f determinan los siguientes intervalos:

[–4, 1] y [1, 2]

El área buscada es, pues:

$$A = \left|\int_{-4}^{1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-4}^{1} (x^3 + x^2 - 10x + 8)\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{1}^{2} (x^3 + x^2 - 10x + 8)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 8x\right]_{-4}^{1}\right| +$$

$$+ \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 8x\right]_{1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{43}{12} - \left(-\frac{208}{3}\right)\right| + \left|\frac{8}{3} - \frac{43}{12}\right| =$$

$$= \frac{875}{12} + \frac{11}{12} = \frac{443}{6} \Rightarrow A = \frac{443}{6}\,u^2$$

Actividad

Halla el área limitada por las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2 - 2x - 8$ entre las abscisas –1 y 2.

Solución

Seguiremos el procedimiento analítico, más exacto y rápido que el geométrico:

1. Hallamos las abscisas de los puntos de corte de las gráficas de f y g:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{41}}{2} = -1{,}7 \text{ o } x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2} = 4{,}7$$

2. Puesto que no existen puntos de corte en [–1, 2], el área pedida es:

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-1}^{2} (-x^2 + 3x + 8)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x\right]_{-1}^{2}\right| = \left|\frac{58}{3} - \left(-\frac{37}{6}\right)\right| =$$

$$= \frac{51}{2} \Rightarrow A = \frac{51}{2}\,u^2$$

Actividad

Halla el área limitada por las gráficas de $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$ entre 0 y π.

Solución

1. Calculamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \quad \text{sen } x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

2. Entre 0 y π hay un único punto de corte

$$x = \frac{\pi}{4};$$

luego el área buscada será:

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \text{sen } x) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos x - \text{sen } x) dx \right| = \left| \left[\text{sen } x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right| +$$

$$+ \left| \left[\text{sen } x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right| = \left| \sqrt{2} - 1 \right| + \left| -1 - \sqrt{2} \right| =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

Actividad

Halla, en cada caso, el área limitada por:

$a)\ f(x) = x^2 - 3x \quad y \quad g(x) = -x^2 + 5x$

$b)\ f(x) = x^3 - 3x \text{ y } g(x) = -\frac{x^2}{2}$

Solución

a) 1. Calculamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x = -x^2 + 5x \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 4$

2. Los puntos de corte definen un único intervalo, [0, 4], por lo que el área limitada por las gráficas es:

$$A = \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^4 (x^2 - 3x) - (-x^2 + 5x)) dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^4 (2x^2 - 8x) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2 \right]_0^4 \right| =$$

$$= \left| -\frac{64}{3} - 0 \right| = \frac{64}{3} \Rightarrow A = \frac{64}{3} \text{ u}^2$$

b) 1. Calculamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x = -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = -2,$$

$$x = 0 \text{ o } x = \frac{3}{2}$$

2. Los puntos de corte determinan dos intervalos:

$$[-2, 0] \text{ y } \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

Por tanto, el área buscada es:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))\,dx\right| +$$

$$+\left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (f(x) - g(x))\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-2}^{0} \left(x^3 - 3x - \left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) dx\right| +$$

$$+\left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} \left(x^3 - 3x - \left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0}\right| +$$

$$+\left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right| =$$

$$= \left|0 - \left(-\frac{10}{3}\right)\right| + \left|-\frac{99}{64} - 0\right| =$$

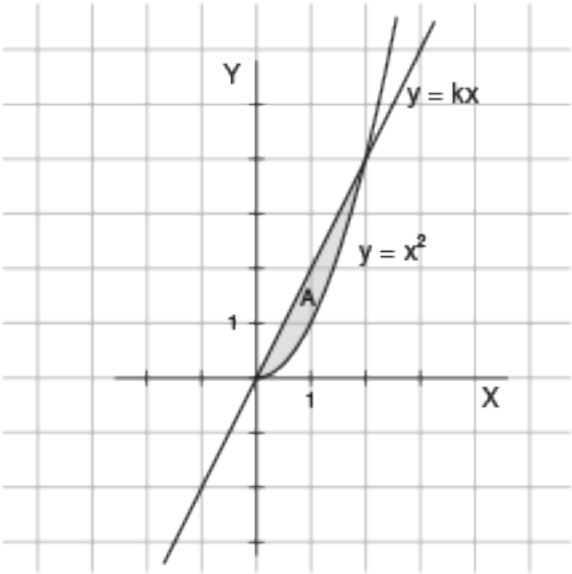
$$= \frac{10}{3} + \frac{99}{64} = \frac{937}{192} \Rightarrow A = \frac{937}{192}\,u^2$$

Actividad

Determina el valor del parámetro *k* sabiendo que el área de la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = kx$ es 288 y que $k > 0$.

Solución

Realizamos un dibujo orientativo, teniendo en cuenta que la recta tiene pendiente $k > 0$:



Calculamos las abscisas de los puntos de corte entre la recta y la parábola:

$kx = x^2 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = k > 0$

Por tanto, teniendo en cuenta a partir de la gráfica que la recta siempre está por encima de la parábola, el área comprendida entre ellas es:

$$A = \int_0^k (kx - x^2)\,dx = \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = \frac{k^3}{6} - 0 = \frac{k^3}{6}$$

Puesto que sabemos que esta área es de 288:

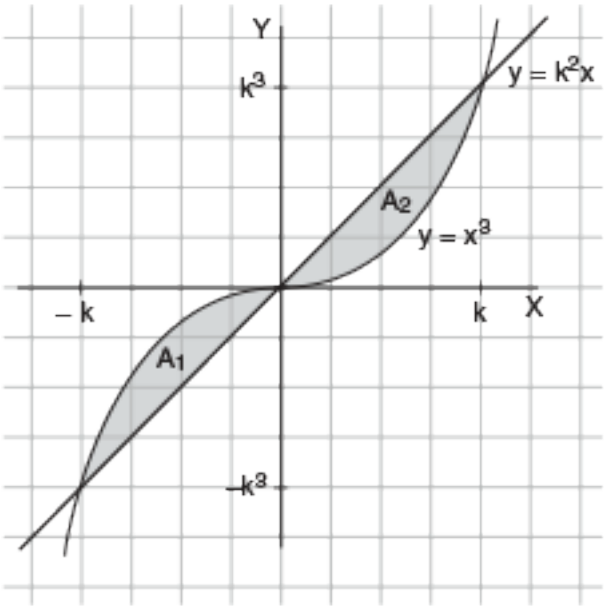
$$288 = A = \frac{k^3}{6} \Rightarrow k = 12$$

Actividad

Determina el valor del parámetro k sabiendo que el área de la región comprendida entre $y = x^3$ y la recta $y = k^2 x$ es 4 y que $k > 0$.

Solución

Realizamos un dibujo orientativo, teniendo en cuenta que la recta tiene pendiente $k^2 > 0$.



Calculamos las abscisas de los puntos de corte entre la recta y la cúbica:

$k^2x = x^3 \Leftrightarrow x = -k$, $x = 0$ o $x = k$

Como nos dicen que $k > 0$, estos puntos de corte determinan los intervalos:

$[-k, 0]$ y $[0, k]$

Por tanto, teniendo en cuenta que, según la figura, la recta está por debajo de la cúbica en $[-k, 0]$ y por encima en $[0, k]$, el área de la región comprendida entre la recta y la cúbica es:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-k}^{0} (x^3 - k^2x)\,dx + \int_{0}^{k} (k^2x - x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{k^2x^2}{2}\right]_{-k}^{0} + \left[\frac{k^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{k} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{k^4}{4}\right) + \frac{k^4}{4} - 0 = \frac{k^4}{2}$$

Como nos dicen que el valor de esta área es 4:

$$8 = A = \frac{k^4}{2} \Rightarrow k = \sqrt[4]{16} = \pm 2$$

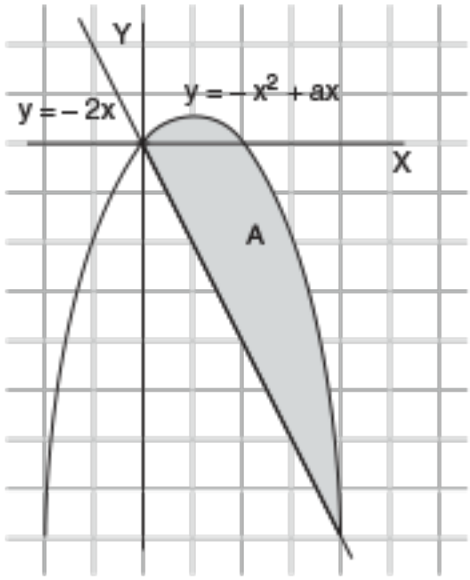
Y, como $k > 0$, la solución es $k = 2$.

Actividad

Halla el valor del parámetro *a* para que el área de la región comprendida entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = -2x$ sea de 36.

Solución

Realizamos un dibujo orientativo, teniendo en cuenta que la parábola tiene las ramas hacia abajo y pasa por el origen



Calculamos los puntos de corte entre la recta y la parábola.

$-2x = -x^2 + ax \Leftrightarrow x = 0$ o $x = a + 2$

Así, los extremos de integración que nos permiten calcular el área de esa región son x = 0 y x = a + 2. Que el valor de este último sea mayor o menor que 0 depende del valor de a. Por otro lado, cambiar el orden de los extremos de integración sólo afecta al signo de la integral, y en cualquier caso sólo hay dos puntos de corte entre la recta y la parábola. Así, el área buscada se puede calcular con la fórmula:

$$A = \left|\int_0^{a+2} ((-x^2 + ax) - (-2x))\ dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^{a+2} (-x^2 + (a+2)x)\ dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{(a+2)x^2}{2}\right]_0^{a+2}\right| =$$

$$= \left|\frac{(a+2)^3}{6} - 0\right| = \frac{|a+2|^3}{6}$$

Para que el valor de esta área sea 36:

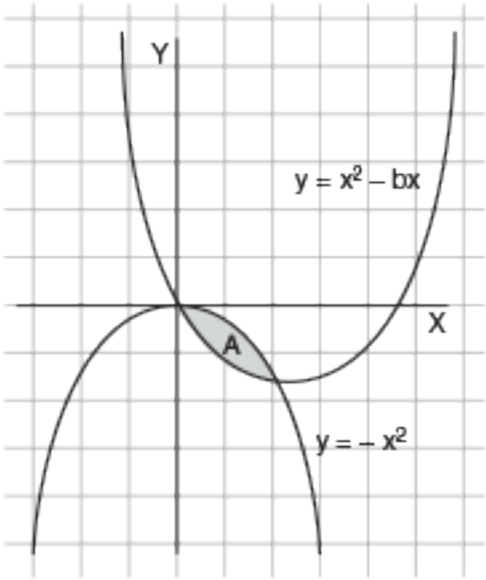
$$36 = A = \frac{|a+2|^3}{6} \Rightarrow |a+2| = 6 \Rightarrow a = 4 \text{ o } a = -8$$

Actividad

Calcula qué valor debe tener el parámetro *b* para que el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2 - bx$ e $y = -x^2$ sea 9.

Solución

Realizamos un dibujo orientativo, teniendo en cuenta que la parábola $y = x^2 - bx$ tiene las ramas hacia arriba y pasa por el origen.



Calculamos las abscisas de los puntos de corte entre las dos parábolas:

$$-x^2 = x^2 - bx \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \frac{b}{2}$$

Depende del signo de b cuál sea el primer extremo de integración, pero como en cualquier caso sólo hay dos puntos de corte, el área del recinto considerado será:

$$A = \left| \int_0^{\frac{b}{2}} (-x^2 - (x^2 - bx))\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\frac{b}{2}} (-2x^2 + bx))\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right]_0^{\frac{b}{2}} \right| = \left| \frac{b^3}{24} - 0 \right| = \frac{|b|^3}{24}$$

Para que el área sea 9:

$$9 = A = \frac{|b|^3}{24} \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

Actividad

El coste marginal de fabricar la unidad $x + 1$ de un determinado producto viene dado por la función:

$$CMg(x+1) = 6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

a) Sabiendo que el coste de funcionamiento asciende a 84000 €, halla la función *C* que expresa el coste total de fabricación de *x* unidades de este producto.
b) Calcula cuánto cuesta fabricar 400 unidades de dicho producto.

Solución

a) Sabemos que la función de costes es una primitiva de la función

$$CMg(x+1) = 6 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Busquemos la función de C(x):

$$\int \left(6 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = 6x - 4\sqrt{x} + k$$

Determinamos el valor de k teniendo en cuenta el coste de funcionamiento (x = 0):

$$C(0) = 6 \cdot 0 - 4\sqrt{0} + k = 84\,000;\ k = 84\,000$$

Por tanto la función de costes es:

$$C(x) = 6x - 4\sqrt{x} + 84\,000$$

b) Fabricar 400 unidades cuesta:

$$C(400) = 6 \cdot 400 - 4\sqrt{400} + 84\,000 = 86\,320$$

86320 €

Actividad

Calcula el área limitada por $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ y el eje *OX*.

Solución

1. Hallamos los ceros de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = 2$

2. Estos ceros determinan los siguientes intervalos:

[0, 1] y [1, 2]

El área buscada será:

$$A = \left|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1\right| +$$

$$+\left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_1^2\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - x^2\right]_1^2\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}u^2$$

Actividad

Halla el área de la región limitada por $f(x) = -e^x$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución

Como $f(x) = -e^x < 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, el área A delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = –1 y x = 2 coincide con:

$$A = -\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{2} -e^x\,dx = \int_{-1}^{2} e^x\,dx =$$

$$= \left[e^x\right]_{-1}^{2} = e^2 - e^{-1} = \frac{e^3-1}{e} \Rightarrow A = \frac{e^3-1}{e}\,u^2$$

Actividad

Determina el área limitada por $f(x) = \cos x$ y el eje OX entre las abscisas 0 y 2 π.

— Halla $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx$. ¿Coincide este resultado con el valor del área calculada?

Solución

1. Calculamos los ceros de f:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. En [0, 2 π], la función f(x) = cos x tiene 2 ceros:

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ y } x = \frac{3\pi}{2},$$

luego el área A del recinto que delimita con el eje de abscisas en dicho intervalo coincide con:

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|\left[\operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + \left|\left[\operatorname{sen} x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right| =$$

$$= |1-0| + |-1-1| + |0-(-1)| =$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4 \Rightarrow A = 4\,u^2$$

— Si aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

Claramente, obtenemos un valor distinto al del área anterior, debido a que la función f(x) = cos x cambia de signo en [0, 2 π].

Actividad

El crecimiento poblacional de un país en función del tiempo sigue, aproximadamente, esta expresión:

$$p(t) = \frac{0{,}8\,e^{\frac{-t}{100}}}{\left(4\,e^{\frac{-t}{100}} + 1\right)^2}$$

Sabiendo que la población actual del país ($t = 0$) es de 4 millones de habitantes, utiliza el cambio de variable:

$$4e^{\frac{-t}{100}} + 1 = x$$

para hallar la función *P* que rige la población de este país.

— ¿Cuál sería la función *P* si la población actual fuese de 5,5 millones de habitantes?

Solución

Consideramos el cambio de variable:

$$x = 4e^{\frac{-t}{100}} + 1 \Rightarrow dx = -\frac{4}{100}e^{\frac{-t}{100}}\,dt$$

Así, se tiene:

$$P(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{0,8e^{\frac{-t}{100}}}{\left(4e^{\frac{-t}{100}} + 1\right)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{-0,8}{x^2}\frac{dx}{0,04} = \int -\frac{20}{x^2}\,dx = \frac{20}{x} + C =$$

$$= \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1} + C$$

Por otro lado sabemos que P(0) = 4:

$$P(0) = 4 \Leftrightarrow \frac{20}{5} + C = 4 \Leftrightarrow 4 + C = 4 \Leftrightarrow C = 0$$

Así,

$$P(t) = \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1}$$

— Si P(0) = 5,5, calculamos C:

$P(0) = 5,5 \Leftrightarrow 4 + C = 5,5 \Leftrightarrow C = 1,5$

Así, la función P sería:

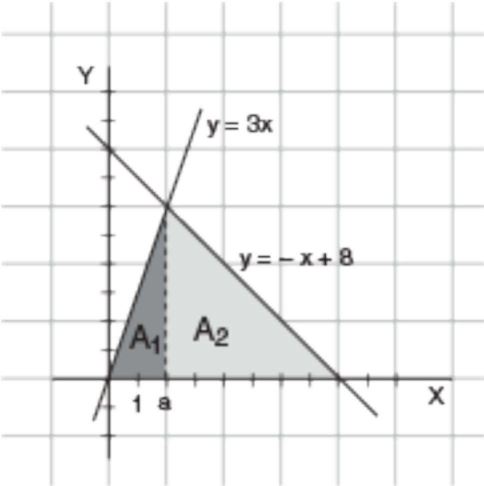
$$P(t) = \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1} + 1,5$$

Actividad

Las rectas $y = 3x$ e $y = -x + 8$, junto con el eje de abscisas, determinan un triángulo.
Halla el área usando el cálculo integral y comprueba que se obtiene el mismo resultado por un procedimiento geométrico.

Solución

Hacemos una representación aproximada para ver la disposición de ese triángulo.



De su observación deducimos que su área A es la suma de:

• El área A_1 del recinto limitado por la recta y = 3 x, el eje OX y las rectas x = 0 y x = a, siendo a la abscisa del punto de corte entre las dos rectas del enunciado.
• El área A_2 del recinto limitado por la recta y = – x + 8, el eje OX y las rectas x = a y x = 8.

Para calcular estas áreas, debemos encontrar el valor de a:

$3a = -a + 8 \Rightarrow a = 2$

Por tanto:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 3\,x\,dx + \int_2^8 (-x + 8)\,dx =$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^2}{2} + 8\,x\right]_2^8 =$$

$$= 3 \cdot (2 - 0) + (32 - 14) = 24 \Rightarrow A = 24\,u^2$$

Podemos comprobar geométricamente el resultado calculando directamente el área del triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(8 - 0) \cdot (3 \cdot 2)}{2} = 24 \Rightarrow A = 24\,u^2$$

Actividad

La evolución de la población de un país, en millones de habitantes, entre los años 2000 y 2009 viene dada por la expresión siguiente:

$p\,(t) = 38\,e^{-0{,}02\,t}$

donde *t* es el tiempo en años transcurridos desde 2000.

a) Halla la integral indefinida *P* de la función *p*.
b) La población en este período, ¿ha aumentado o ha disminuido?
c) Calcula la población media del país en el período considerado.

Solución

a) Hallamos P una primitiva de p:

$$P = \int 38\,e^{-0,02t}\,dt = \int \frac{38}{0,02}(-0,02)\,e^{-0,02t}dt =$$

$$= \frac{38}{0,02}\,e^{-0,02t} + C = -1\,900\,e^{-0,02t} + C$$

b) Calculamos la población entre los años 2000 y 2009, que corresponde al período [0,9]:

$$P(9) - P(0) = \int_0^9 38\,e^{-0,02t}\,dt =$$

$$= \left[-1900\,e^{-0,02t}\right]_0^9 = 312,986\,598 > 0$$

Por tanto, la población en este período ha aumentado.

c) Calculamos la población media:

$$\frac{P(9) - P(0)}{9 - 0} = \frac{312,986\,598}{9} = 34,776\,289$$

Así, la población media es de 34776289 habitantes.

Actividad

En el proceso de recuperación de un determinado enfermo que se ha llevado a cabo en un hospital, se ha observado que el ritmo al que elimina una sustancia tóxica viene dado por la función:

$f(t) = –0,198\, e^{–0,22\, t}$

donde t es el tiempo en horas transcurrido a partir de la ingestión de esta sustancia.
Halla la función $F(t)$ que expresa la concentración de la sustancia en la sangre en gramos por litro, sabiendo que una hora tras la ingestión la concentración es 1 g · L^{-1}.

Solución

Calculamos F sabiendo que es primitiva de f:

$$F(t) = \int -0,198 \cdot e^{-0,22t}dt = -0,198 \int e^{-0,22t}\,dt =$$

$$= -0,198 \cdot \left(\frac{-1}{0,22} e^{-0,22t} + C \right) = 0,9\,e^{-0,22t} + C$$

Hallamos C imponiendo que F(1) = 1:

$F(1) = 1 \Leftrightarrow 0,9 \cdot e^{–0,22} + C = 1 \Leftrightarrow C = 0,28$

Así, se tiene que la función buscada es:

$F(t) = 0,9\, e^{–0,22\, t} + 0,28$

Actividad

Calcula el área del recinto limitado por la función $f(x) = \ln x$, el eje de abscisas y las rectas $x = –1$ y $x = 2$.

Solución

Hallamos los ceros de f: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
No existe ningún cero de f en (1, 0), luego:

$$A = \int_1^2 \ln x\,dx$$

Para realizar esta integral utilizamos el cambio

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Aplicamos la expresión $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = x \ln x - x + C$$

Consideramos la primitiva F(x) que resulta al hacer C = 0 y calculamos la integral definida mediante la regla de Barrow

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \left[x \ln x - x\right]_1^2 = 2 \cdot (\ln 2 - 1) + 1 = 2\ln 2 - 1 = 0{,}39$$

Actividad

Aplica la regla de Barrow y halla el valor de las siguientes integrales definidas:

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx \qquad c)\ \int_{-2}^{2} (x^3 + 1)dx$$

$$b)\ \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$$

$$d)\ \int_{-3}^{2} f(x)dx \text{ siendo } f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución

$$a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2 \cdot 0 =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\ 0 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

$$b)\quad \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$$

Para calcular la integral definida hacemos el cambio de variable: $u = \sqrt{x +$

$$u = \sqrt{x+4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - 4 \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}dx = \dfrac{1}{2u}dx \Rightarrow dx = 2u\,du \end{cases}$$

Sustituyendo en la integral inicial y calculando la integral en la variable u , se tiene:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = \int \frac{u^2-4}{u} 2u\,du =$$

$$= \int (2u^2 - 8)\,du = \frac{2u^3}{3} - 8u + C$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = \frac{2\left(\sqrt{x+4}\right)^3}{3} - 8\sqrt{x+4} + C$$

Consideramos la primitiva que resulta al hacer C= 0:

$$F(x) = \frac{2\left(\sqrt{x+4}\right)^3}{3} - 8\sqrt{x+4}$$

Calculamos la integral definida a partir de la regla de Barrow:

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x+4}\right)^3}{3} - 8\sqrt{x+4}\right]_0^5 = \frac{14}{3}$$

Nota: También se puede obtener este resultado aplicando la regla de Barrow a la integral que resulta después de sustituir x por u.

c) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\,dx$

Calculamos la integral definida:

$$\int (x^3 + 1)\,dx = \int x^3\,dx + \int dx = \frac{x^4}{4} + x + C$$

Consideramos la primitiva que resulta al considerar C= 0:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x$$

Determinamos la integral definida mediante la regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4}+2\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+(-2)\right) = 4$$

d) $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ *siendo* $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x^2+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Aplicamos la propiedad correspondiente y obtenemos:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2}(x^2+1)\,dx$$

Ahora aplicamos la regla de Barrow a cada uno de los sumandos.
Calculamos la integral indefinida de las funciones que definen f:

$$\int -x\,dx = \frac{-x^2}{2} + C_1$$

$$\int (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3} + x + C_2$$

Consideramos la primitiva de cada una de ellas, que resulta al hacer $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$:

$$F_1(x) = \frac{-x^2}{2}$$

$$F_2(x) = \frac{x^3}{3} + x$$

Determinamos la integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2}(x^2+1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{0}^{2} = \frac{9}{2} + \frac{14}{3} = \frac{55}{6}$$

Actividad

Calcula el área de la región del plano limitada por el gráfico de la parábola $y = x^2 - x$ y por la función

$$f(x) = \frac{x - x^2}{(x+1)(x+2)}$$

Solución

1. Hallamos los puntos de corte entre las dos funciones f y g(x) = x^2 – x (que define la parábola):

$$f(x) = g(x),\ \frac{x - x^2}{(x+1)(x+2)} = x^2 - x$$

$$x - x^2 = (x^2 - x)(x+1)(x+2)$$

$$0 = (x^2 - x)((x+1)(x+2)+1) =$$

$$= x(x-1)(x^2 + 3x + 3) \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 1$$

2. Puesto que los puntos de corte son 0 y 1, y las funciones f y g son continuas en [0, 1], el área que nos interesa es:

$$A = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left(\frac{x - x^2}{(x+1)(x+2)} - (x^2 - x) \right) dx \right|$$

Para aplicar la regla de Barrow, calculamos la integral indefinida:

$$\int \left(\frac{x - x^2}{(x+1)(x+2)} - x^2 + x \right) dx =$$

$$= \int \left(-1 + \frac{4x+2}{x^2 + 3x + 2} - x^2 + x \right) dx =$$

$$= \int (-x^2 + x - 1)\,dx + \int \frac{4x+2}{x^2+3x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{4x+2}{x^2+3x+2}\,dx$$

y para calcular la nueva integral:

$$\frac{4x+2}{\underbrace{x^2+3x+2}_{x^2+3x+2=(x+1)(x+2)}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$4x+2 = (A+B)x + 2A + B$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 = A + B \\ 2 = 2A + B \end{array}\right\} \Rightarrow A = -2, B = 6$$

$$\int \frac{4x+2}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{-2}{x+1}dx + \int \frac{6}{x+2}dx =$$

$$= -2\ln|x+1| + 6\ln|x+2| + C$$

Por tanto, de acuerdo con la regla de Barrow:

$$A = \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x+1| + 6\ln|x+2|\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \ln\frac{(x+1)^2}{(x+2)^6}\right]_0^1\right| =$$

$$= \left|\left(-\frac{5}{6} - \ln\frac{2^2}{3^6}\right) - \left(0 - \ln\frac{1^2}{2^6}\right)\right| =$$

$$= \left|-\frac{5}{6} + \ln\frac{3^6}{2^8}\right| = \left|-\frac{5}{6} + 2\ln\frac{27}{16}\right| = 0,21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0,21\ u^2$$

Actividad

Halla las siguientes integrales:

a) $\int x^{-1}dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x}}dx$

c) $\int (x+1)^2 dx$

d) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx$

e) $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

f) $\int \frac{x^3+2}{(x^4+8x+1)^2}dx$

g) $\int \frac{2^x}{5^x}dx$

Solución

a) $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{6}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$

c) $\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1)\, dx =$

$= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$

d) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x\, dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^{4+1}}{4+1} + C =$

$= \frac{(\operatorname{sen} x)^5}{5} + C$

e) $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\, dx =$

$2\int 3^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\left(\frac{3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} + C\right) =$

$\frac{2}{\ln 3} \cdot 3^{\sqrt{x}} + C$

f) $\int \frac{x^3+2}{(x^4+8x+1)^2}$

$= \int (x^4 + 8x + 1$

$= \int (x^4 + 8x + 1$

$= \frac{1}{4}\int (x^4 + 8x +$

$= \frac{1}{4}\, \frac{(x^4 + 8x + 1}{-2+1}$

$= -\frac{1}{4(x^4 + 8x +}$

g) $\int \frac{2^x}{5^x}\, dx = \int \left(\frac{2}{5}\right.$

Actividad

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determina los coeficientes a, b y c para que se cumpla

$$\int_0^2 f(x)dx = 2,\ f(0) = 0 \ \text{y}\ f(1) = 4$$

Solución

Imponemos la condición que debe cumplir f:

$$2 = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 (ax^2 + bx + c)\, dx =$$

$$= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^2 = \frac{8a}{3} + 2b + 2c$$

$$0 = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

$$4 = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

$0 = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$
$4 = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \frac{8}{3}a + 2b + 2c \\ 0 = c \\ 4 = a + b + c \end{array}\right\} \Rightarrow a = -9,\ b = 13,\ c = 0$$

Actividad

Halla el área de la región plana limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2$ entre las abscisas 0 y k, para cualquier $k > 0$. ¿Cuánto ha de valer k para que dicha área sea de 72 u^2?

Solución

El área A limitada por las gráficas de las dos funciones f y g entre las abscisas x = a y x = b es:

$$A = \left|\int_a^b g(x) - f(x)\,dx\right|$$

En este problema, las funciones que se deben considerar son $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x^2$ y las abscisas son a = 0 y b = k, luego.

$$A = \left|\int_0^k (2x^2 - x^2)dx\right| = \left|\int_0^k x^2 dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^k\right|$$

$$= \left|\frac{k^3}{3} - 0\right| = \frac{k^3}{3} \text{ siendo } k > 0$$

Para que esta área sea de $72u^2$, el valor de k debe ser:

$$72 = A = \frac{k^3}{3} \Rightarrow k = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6$$

Actividad

Los datos de la tabla siguiente se han obtenido de forma experimental:

x	0	0,25	0,5	0,75	1
y	1,05	1,27	1,62	2,14	2,73

Aplica el método de los trapecios para calcular aproximadamente el área comprendida entre la gráfica de la función $y = f(x)$ que pasa por los valores dados por la tabla, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Aplicamos el método de los trapecios para n = 4; ya que en el enunciado nos dan 5 valores de abscisas:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx 0,25\left(\frac{1,05}{2} + 1,27 + 1,62 + 2,14 + \right.$$

$$\left. + \frac{2,73}{2}\right) = 1,73 \Rightarrow A = 1,73\,u^2$$

Actividad

La facturación de una empresa tuvo en el último año un crecimiento continuo del 1% mensual. Sabiendo que a comienzos de año la facturación alcanzó la cifra de 10 millones de euros, ¿a cuánto ascendía a finales de año?

Solución

Si llamamos C a la función que nos da el valor del capital en cada momento, su crecimiento instantáneo

vendrá dado por C'.
Expresamos el hecho de que el crecimiento continuo fue del 1%:

$$C'(t) = \frac{1}{100} C(t)$$

Operamos y se tiene:

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = \frac{1}{100}$$

Consideramos la integral indefinida de cada uno de los dos miembros de la igualdad, las resolvemos y agrupamos las constantes:

$$\int \frac{C'(t)}{C(t)} dt = \int \frac{1}{100} dt$$

$$\ln(C(t)) + k_1 = \frac{1}{100} t + k_2$$

$$\ln(C(t)) = \frac{1}{100} t + k_3 \ ; \ C(t) = e^{\frac{t}{100} + k_3} = e^{\frac{t}{100}} \cdot e^{k_3} = k \cdot e^{\frac{t}{100}}$$

A principios de año, la facturación fue de 10 millones de euros, C(0) = 10. Por tanto:

$$C(0) = 10 = k \cdot e^{\frac{0}{10}} = k \ ; \ \ k = 10$$

Para hallar la facturación a finales de año, calculamos C(12):

$$C(12) = 10 \cdot e^{\frac{1}{100} \cdot 12} = 11{,}275$$

Así, la facturación a finales de año será de 11,275 millones de euros.
Actividad
El crecimiento de la población de un país en función del tiempo sigue, aproximadamente, la función siguiente:

$$p(t) = \frac{0{,}8e^{\frac{-t}{100}}}{\left(4e^{\frac{-t}{100}} + 1\right)^2}$$

Sabiendo que la población actual del país (t = 0) es de 4 millones de habitantes, utiliza el cambio de variable:

$$x = 4e^{\frac{-t}{100}} + 1$$

para encontrar la función *P* que rige la población de dicho país.

— ¿Cuál sería la función *P* si la población actual fuese de 5,5 millones de habitantes?

Solución

Consideramos el cambio de variable:

$$x = 4e^{\frac{-t}{100}} + 1 \Rightarrow dx = -\frac{4}{100}e^{\frac{-t}{100}}dt$$

Así, se tiene:

$$P(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{0,8e^{\frac{-t}{100}}}{\left(4e^{\frac{-t}{100}} + 1\right)^2}dt =$$

$$= \int \frac{-0,8}{x^2}\frac{dx}{0,04} = \int -\frac{20}{x^2}dx = \frac{20}{x} + C =$$

$$= \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1} + C$$

Por otro lado sabemos que P(0) = 4:

$$P(0) = 4 \Leftrightarrow \frac{20}{5} + C = 4 \Leftrightarrow 4 + C = 4 \Leftrightarrow C = 0$$

Así, $P(t) = \dfrac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1}$

— Si P(0) = 5,5, calculamos C:

P(0) = 5,5 ⇔ 4 + C = 5,5 ⇔ C = 1,5

Así, la función P sería:

$$P(t) = \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1} + 1,5$$

Actividad

Utiliza el cambio de variable indicado para resolver las siguientes integrales:

a) $\int x\sqrt{x-2}\,dx$ (cambio: $\sqrt{x-2} = t$)

b) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ (cambio: $\sqrt{1+\ln x} = t$)

c) $\int \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x\,dx$ (cambio: $\operatorname{sen} x = t$)

Solución

a) Sustituimos la variable x por t. Para ello efectuamos el cambio de variable

$$\sqrt{x-2} = t$$

Luego:

$x - 2 = t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt$
$\Rightarrow x = 2 + t^2$

Sustituyendo en la integral:

$$\int x\sqrt{x-2}\,dx = \int (2+t^2)\cdot t\cdot 2t\,dt$$

Calculamos la nueva integral:

$$\int (2+t^2)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int (4t^2 + 2t^4)dt =$$
$$= \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int x\sqrt{x-2}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5} + C$$

b) Sustituimos la variable x por t.
Para ello efectuamos el cambio de variable

$$\sqrt{1+\ln x} = t$$

Luego:

$$1 + \ln x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2t\,dt$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{t^2}\,2t\,dt$$

Calculamos la nueva integral:

$$\int t\ \ 2t\,dt = 2\int t^2\ t\,dt = \frac{2}{3}t^3 + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C$$

c) Sustituimos la variable x por t.
Para ello efectuamos el cambio de variable sen x = t
Luego:

$\cos x\ dx = dt$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \cos x \cdot \mathrm{sen}^3 x\ dx = \int t^3 dt$$

Calculamos la nueva integral:

$$\int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$$

Actividad

Aplica el método de integración por partes para resolver las siguientes integrales:

$$a)\ \int (5x - 2e^x)^2 dx \qquad b) \int x^2 \cos\frac{x}{2} dx \qquad c) \int x^2 \ln x\, dx$$

Solución

$$a)\quad \int (5x - 2e^x)^2\, dx$$

Desarrollemos primero el cuadrado de la integral:

$$\int (5x - 2e^x)^2\, dx = \int (25x^2 - 20xe^x + 4e^{2x})\, dx$$

Por tanto, realizando por partes la primitiva, con el cambio u = x y dv = e^xdx, obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C$$

De donde la integral inicial será:

$$\int (5x - 2e^x)^2\, dx =$$

$$25\frac{x^3}{3} - 20e^x(x-1) + 2e^{2x} + C$$

$$b)\quad \int x^2 \cos\frac{x}{2} dx$$

Usemos el cambio

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx$$

$$dv = \cos\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + C$$

Tenemos

$$\int x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx =$$
$$= 2x^2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} - \int 2x \cdot 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$$
$$= 2x^2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} - 4\int x \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$$

Hagamos ahora la integral $\int x \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx$ con el cambio

$$u = x \Rightarrow du = 1d\,x$$
$$dv = \operatorname{sen}\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = -2\cos\frac{x}{2} + C$$

$$\int x \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx = -2x\cos\frac{x}{2} - \int -2\cos\frac{x}{2}\,dx$$
$$= -2x\cos\frac{x}{2} + 4\operatorname{sen}\frac{x}{2} + C$$

Por tanto, la integral que queríamos calcular queda como:

$$\int x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx = 2x^2 \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 8x\cos\frac{x}{2} - 16\operatorname{sen}\frac{x}{2} + C$$

c) $\int x^2 \ln x \; dx$

Usemos el cambio

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} + C$$

Aplicando el método de integración por partes:

$$\int x^2 \ln x \; dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx =$$
$$\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$