PAU 2019-2020

Problema 1. Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo? (8 puntos)

b) ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

Solución:

x = Número de kg que se necesitan de fertilizante A

y = Número de kg que se necesitan de fertilizante B

	Nitrógeno	Fósforo	Precio
A	25%	15%	1.2kg
B	16%	40%	1.6kg
	120	110	

$C(x,y) = 1,2x+1,6y$

s. a $\quad 0,25x +0,16y \geq 120 \quad (1)$

$\qquad 0,15x+0,40y \geq 110 \quad (2)$

$\qquad x,y\geq 0$

Representamos las restricciones:

$0,25x +0,16y \geq 120 \quad (1)$

$0,25x +0,16y =120$

x	y
0	750
480	0

$(0,0) \rightarrow 0.25*0+0.16*0 \geq 120 \rightarrow 0\geq 120$ (NO)

<u>Representamos las restricciones:</u>

0,15x +0,40y ≥110 (1)

0,15x +0,40y =120

x	Y
0	300
800	0

(0,0)→ 0.15*0+0.40*0 ≥110 → 0≥110 (NO)

Representamos las restricciones. Y nos queda la siguiente región NO acotada

Hallamos los vértices de la región NO ACOTADA, y son:

A= (400,125)

C= (0,750)

D= (733,3333.. ;0)

Ahora nos queda hallar la cantidad de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo.

A= (400,125)	C(x,y) = 1,2 * 400+1,6 *125 = 680€
C= (0,750)	C(x,y) = 1,2 * 0 + 1,6 * 750= 1200€
D= (733,3333.. ;0)	C(x,y) = 1,2 * 733,33 + 1,6 * 0 = 880€

Así pues, la cantidad que debemos emplear para minimizar el coste de fertilización es de 400 kg de fertilizante A y 125 kg de fertilizante B.

Y el coste será de 680€.

Problema 2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Solución:

El dominio de la función son todos los valores de la x que hacen que f(x) tome valores reales. Así pues, vamos a estudiar los valores que anulan el denominador, ya que son los que hace que no exista la función o que no tome valores reales.

x^2-1=0 → x= - 1, x=1

$\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{\pm 1\}}$

Puntos de corte con los ejes

Eje X (f(x) = 0)

$2x^2 - 3x + 5 = 0$ → No tiene soluciones reales. → No hay puntos de corte con el eje X

Eje Y (x=0)

f(0)= -5 → Hay un punto de corte con el eje Y en (0,-5)

A.V (x=1)

$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \pm\infty$ → **Hay una asíntota vertical en x= 1**

$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = -\infty$

A.V (x=-1)

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \pm\infty$ → **Hay una asíntota vertical en x= -1**

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = +\infty$

A.H.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = Indeterminación$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = 2$ → **Hay una asíntota horizontal en y= 2**

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

(f ‘ (x) = 0, puntos donde falla el dominio (x=1, x=-1)

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(x^2-1)-(2x^2-3x+5)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-14x+3}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$3x^2 - 14x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{7+2\sqrt{10}}{3} = 4.44 \quad x = \frac{7-2\sqrt{10}}{3} = 0.23$$

$-\infty$ $+\infty$

		-1		0.22		1		4.44	
signo f’(x)	<0	∄	>0	0	<0	∄	<0	0	>0
f(x)	Decrece	∄	Crece	Máx	decrece	∄	decrece	Mín	crece

$]-\infty,-1[$ f’(-2) < 0

$]-1;0.22[$ f’(0) > 0

$]0.22;1[$ f’(0.5) <0

$]1,4.44[$ f’(2) <0

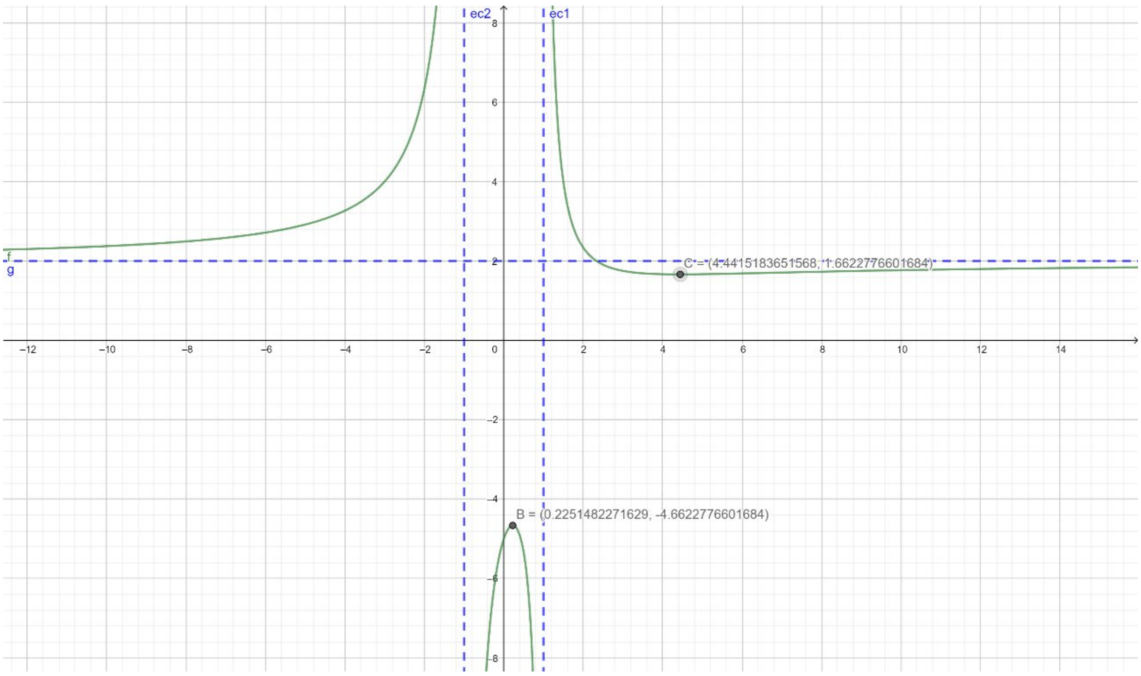
$]4.44,+\infty[$ f’(5) >0

I.C. = $]-\infty,-1[\cup]-1;0.22[\cup]4.44,+\infty[$

I.D. = $]0.22;1[\cup]1;4.44[$

Máximo = (0.22; -4.66)

Mínimo = (4.44; 1.66)



Problema 3. Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

a) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.

b) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

d) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Solución:

A= portador del anticuerpo A

B= portador del anticuerpo B

	B	No B	
A	20	30	50
No A	10	40	50
	30	70	100

a) P(B) = 30/100 = 0.3
b) P(A/B)= 20/30 = 0.6666…
c) P(NoA/NoB) =40/70 = 0.57
d) $P(A \cap NoB) = 30/100 = 0.3$

Problema 4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A. (3 puntos)

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$. (3 puntos)

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 4 - 4 = 0 \rightarrow$ B no tiene inversa

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 72 - 72 = 0 \rightarrow$ $A \cdot B$ no tiene inversa

$$A \cdot B - A \cdot X = B \cdot A$$

$$A \cdot B - B \cdot A = A \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = A \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A \cdot X$$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1} A \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = X$$

Problema 5: Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$\boldsymbol{B(x) = -x^2 + 16x - 55}$, donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? (2 puntos)

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? (2 puntos)

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

Solución:

a) $B(6) = -6^2 + 16*6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$ euros

b) $B(x) = -x^2 + 16x - 55 = 0 \rightarrow x_1 = 5$, $x_2 = 11$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-55)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 220}}{-2} =$$

$$= \frac{-16 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-16 \pm 6}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-16+6}{-2} = 5 \\ \dfrac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Así pues, debe de fijar entre 5 y 11 euros el valor de venta de cada caja para obtener beneficios.

c) Para maximizar o hallar el máximo de una función, hay que calcular la primera derivada e igualar a cero. Y posteriormente, debemos de comprobar que la función pasa de crecer a decrecer.

$B(x) \rightarrow B'(x) = -2x + 16 = 0 \rightarrow x = 8 \rightarrow B(8) = -8^2 + 16*8 - 55 = 9$

0 $+\infty$

		8	
signo f'(x)	>0		<0
f(x)	Crece	Máximo	decrece

Ha de vender a 8 euros cada caja para maximizar los beneficios. Y tendrá como beneficio máximo 8 euros.

d) A partir de la tabla del apartado anterior, la función crece desde 0 a 8, y decrece desde 8 en adelante.

Problema 6. Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)

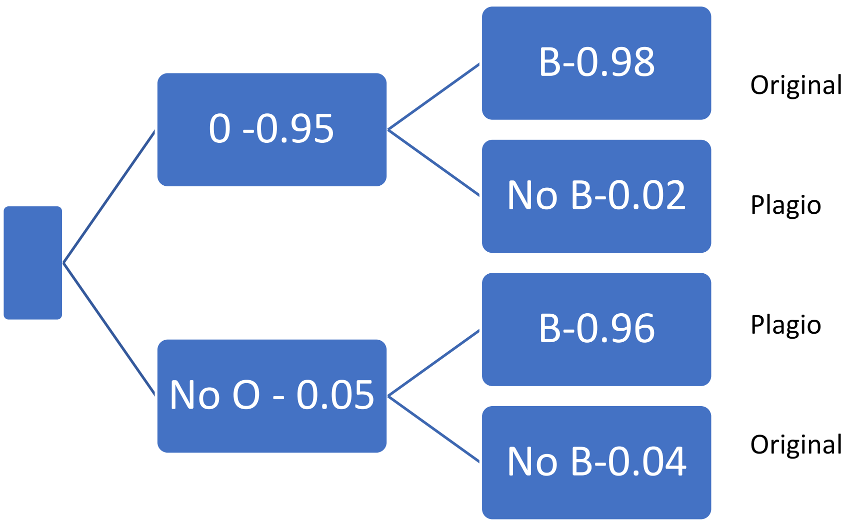
c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)

O = Trabajo original

No O = Plagio

B = Clasifica bien

No B = No se clasifica bien



Solución:

a) P(plagio)=

$$= P(0 \cap NoB) + P(No\ O \cap B) = 0.95 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot 0.96 = 0.067$$

b) $P(0/NoB) = \frac{P(0 \cap NoB)}{\text{P(NoB)}} = \frac{0.05 \cdot 0.04}{1\text{-}0.067} = \frac{0.002}{0.933} = 0.0021$

c) $P(\text{No O } \cap B) = 0.05 \cdot 0.96 = 0.048 \rightarrow 4.8\%$