PROBLEMA 1

En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? *(8 puntos)*

Marca	***Pienso de origen animal***	***Pienso origen vegetal***	***Coste***
A	*7*	*3*	*12*
B	*6*	*4*	*11*
	100 animales · 5 kg ·7 días =3500	*100 animales · 3 kg ·7 días =2100*	

Incógnitas

x = número de sacos de la marca A
y = número de sacos de la marca B

El problema a resolver es:

$$\text{Min } f(x,y) = 12x + 11y$$
$$7x + 6y \geq 3500$$
$$3x + 4y \geq 2100$$

Vamos a representar las restricciones:

$7x + 6y \geq 3500$

x	y
0	3500/6 =583,33
3500 / 7 =500	0

(0,0) → 0 ≥ *3500 NO*

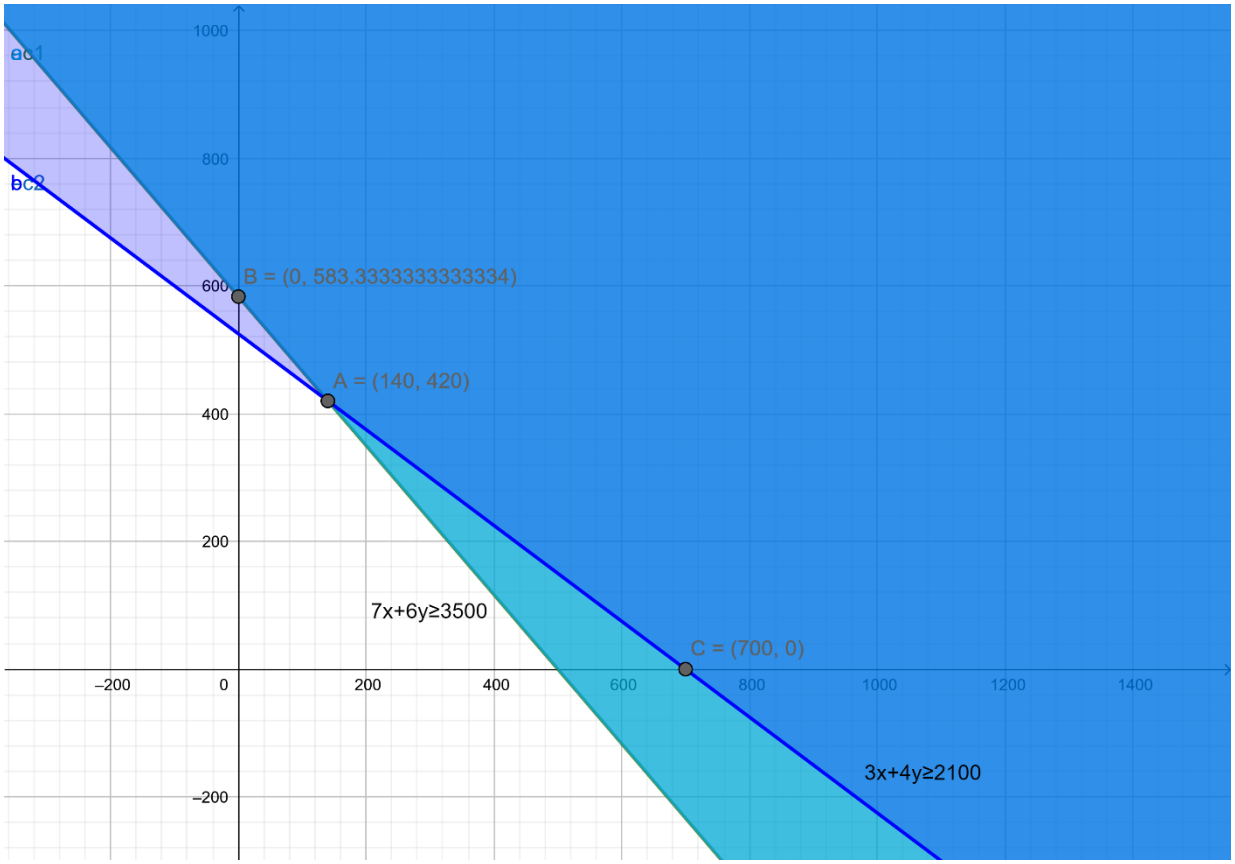
$3x + 4y \geq 2100$

x	Y
0	2100/4 =525
2100 / 3 =700	0

(0,0) → 0 ≥ *2100 NO*

Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

Con la Suite Calculadora de Geogebra obtenemos la siguiente representación gráfica,



https://www.geogebra.org/calculator/vtfnw7xd

La región factible es no acotada y los vértices son:

A = (140, 220)
B = (0, 3500/6)
C = (700,0)

Ahora hallamos el valor de la función objetivo para cada uno de los puntos anteriores

f(140,220) = 12 · *140* + 11 ·*220* = *6300*

f(0,3500/6) = 12 · *0* + *11* ·3500/6 = *6416.67*

f(700,0) = 12 · *700* + *11* ·*0* = *7700*

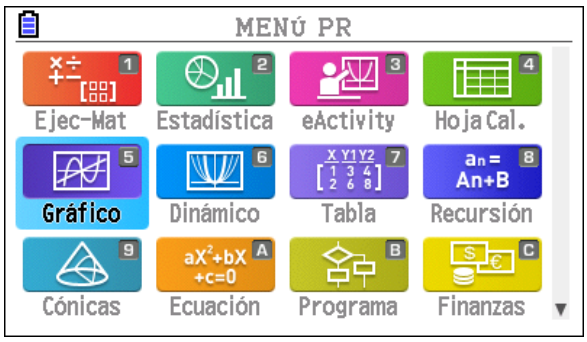
Y observamos que el mínimo se encuentra en el punto A (140,200). Así pues, la combinación de compra de se sacos será de 140 sacos de la marca A y 200 de la marca B para minimizar el coste.

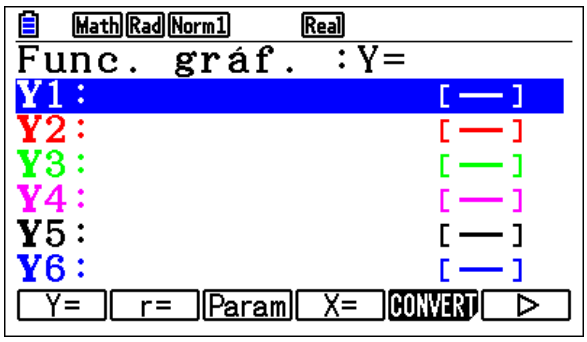
b) ¿cuál sería dicho coste mínimo? (2puntos)

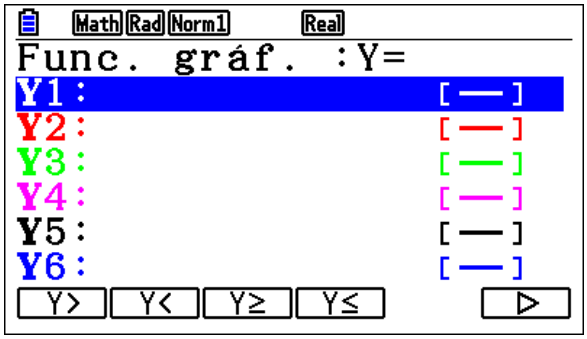
El coste mínimo será de 6300 euros a la semana.

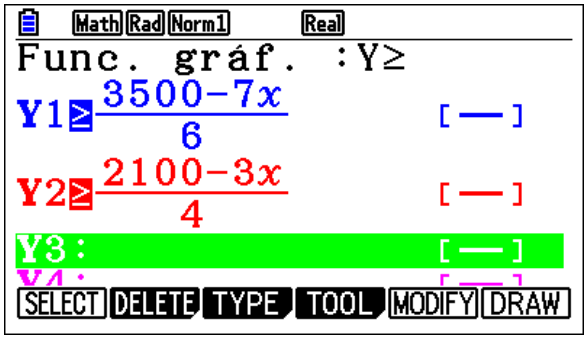
Solución con fx-CG50

Menú 5 (Gráfico) + TYPE (F3) + F6 + F3





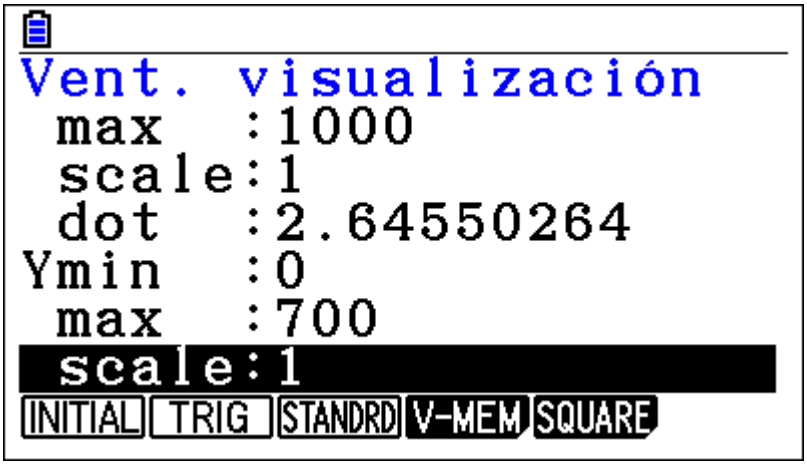




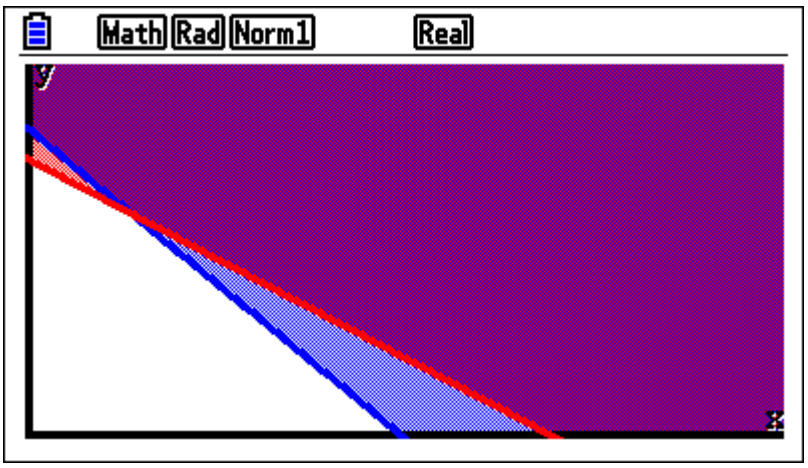
Además, hay que despejar la Y, e introducir las dos restricciones.

$$7x + 6y \geq 3500 \rightarrow y \geq (3500 - 7x) / 6$$
$$3x + 4y \geq 2100 \rightarrow y \geq (2100 - 3x) / 4$$

Además para poder visualizar la región factible hay que pulsar en F3 (V-WINDOW(), y cambiar la escala de la venta de visualización.

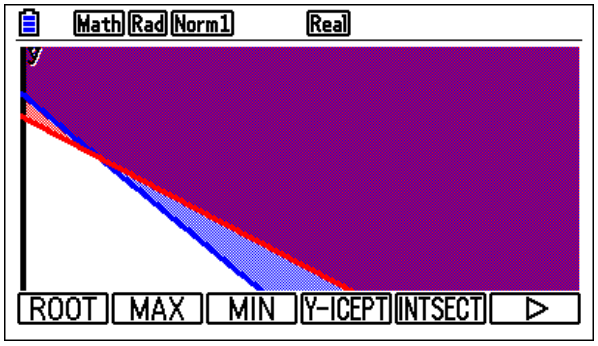


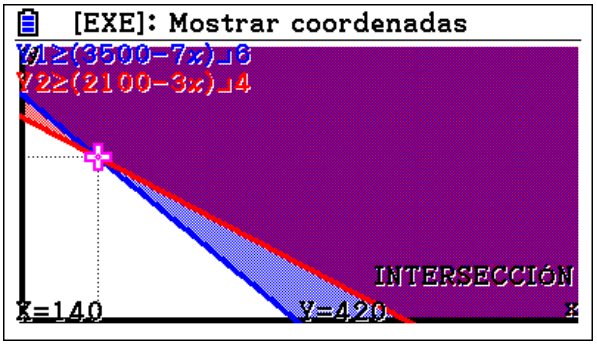
Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es



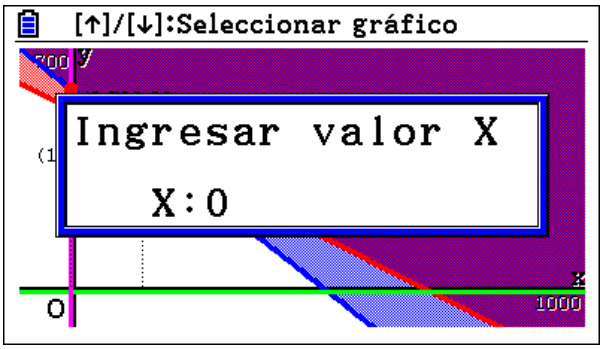
Ahora debemos de hallar los vértices de la región factible NO acotada.

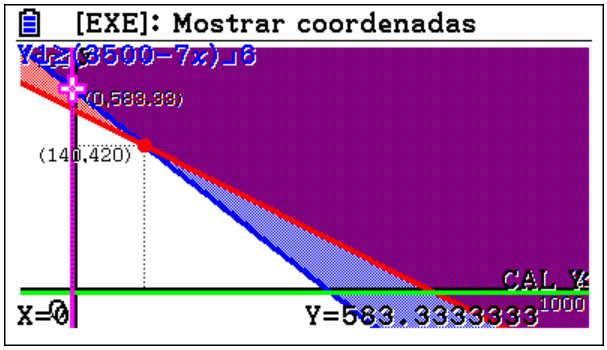
Pulsamos en F5 (G-Solv) + F5(INTSECT)





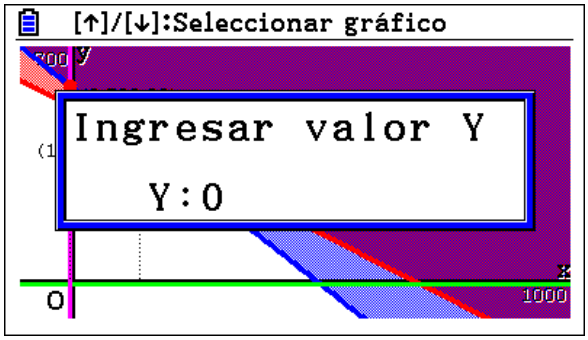
Para hallar los vértices en los ejes de coordenadas. Pulsamos en F5 (G-Solv) + F6 + F1 (Y-CAL) e introducimos 0.

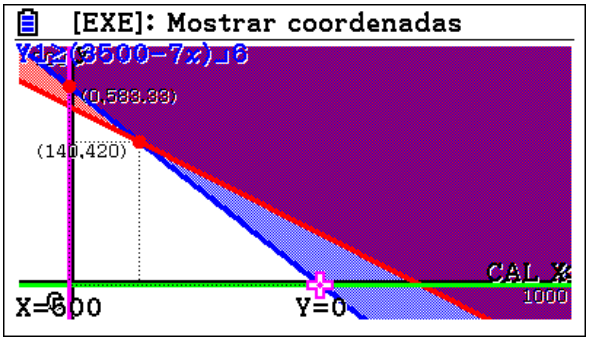




Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

Pulsamos en F5 (G-Solv) + F6 + F2 (X-CAL) e introducimos 0.





Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

PROBLEMA 2

En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

(Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Incógnitas

x= número de trabajadores de categoría A con un salario de 800 euros
y= número de trabajadores de categoría B con un salario de 1000 euros
z= número de trabajadores de categoría C con un salario de 2000 euros

Ecuaciones

x + y + z = 57
800x +1000y + 2000z = 62000
1,04 · 800x + 1000y + 0,90 · 2000z = 0,98 ·62000

x + y + z = 57
800x +1000y + 2000z = 62000
832x + 1000y + 1800z = 60760

En el caso que un trabajador le aumenten el salario un 4% de la categoría B pasará a ganar 104% de 800 = 1,04 · 800 = 832

En el caso que un trabajador le bajen el salario un 10% de la categoría C pasará a ganar 90% de 2000 = 0,9 · 2000 = 1800

Resolvemos con el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 800 & 1000 & 2000 & 62000 \\ 832 & 1000 & 1800 & 60760 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathbf{F2 - 800\,F1} \\ \mathbf{F3 - 832\,F1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 200 & 1200 & 16400 \\ 0 & 168 & 968 & 13336 \end{pmatrix} \mathbf{200F3 - 168F2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 200 & 1200 & 16400 \\ 0 & 0 & -8000 & -88000 \end{pmatrix} \mathbf{-8000z = -88000 \rightarrow z = 11}$$

Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

$$200y + 1200z = 16400 \rightarrow 200y + 1200 \cdot 11 = 16400 \rightarrow 200y + 13200 = 16400$$

$$200y = 16400 - 13200 \rightarrow 200y = 3200 \rightarrow y = 16$$

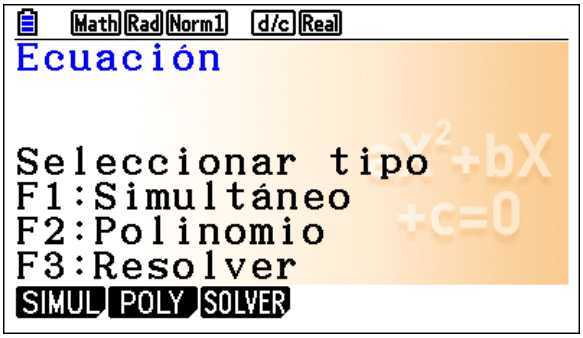
$$x + y + z = 57 \rightarrow x + 16 + 11 = 57 \rightarrow x = 57 - 16 - 11 = 30$$

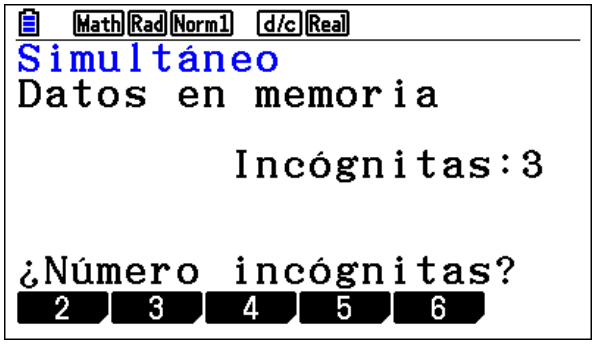
Solución:

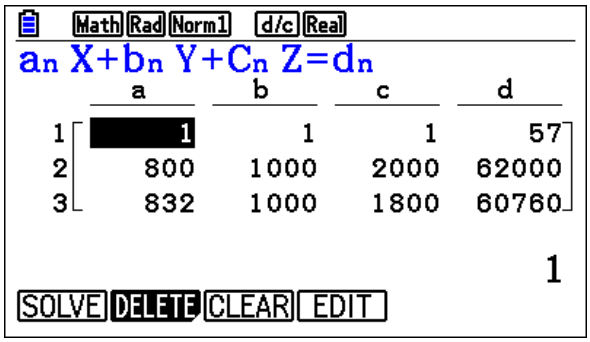
Se necesitan 30 trabajadoras de la categoría A, 16 de la categoría B, y 11 de la C.

Solución con fx-CG50

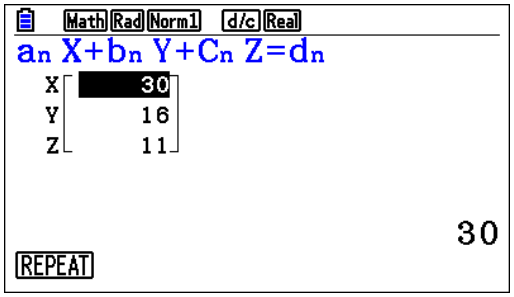
Menú A (Ecuación) + F1 (Simultáneo) + Número de incógnitas F2





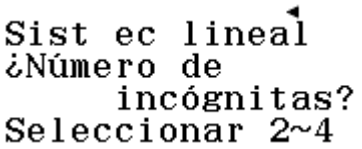


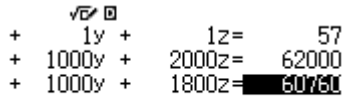
Introducimos los coeficientes del sistema de ecuaciones, y pulsamos en F1 (SOLVE)



Solución con Classwiz fx-570SP_991SP

MENU + A + 1 + introducimos 3





60760 30 16

11

Nota: Hay que pulsar en = para obtener las soluciones de las tres incógnitas.

https://www.geogebra.org/m/cjck79zq

PROBLEMA 3

Consideremos la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{x}^2-\mathbf{4}}$ Obtened:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos).*

Por definición $Dom\, f(x) = \{x \in X | \exists y Y : f(x) = y\}$. Es decir, dada una función f: X →Y se define como el conjunto X de todos los elementos de x para los cuales la función f asocia algún y perteneciente al conjunto Y

Así pues

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

<u>Puntos de cortes con los ejes</u>

EJE X (f(x)=0)

$$\mathbf{0} = \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{x}^2-\mathbf{4}} \rightarrow 0 = \mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2 \rightarrow \boldsymbol{x}^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Hay dos puntos de corte con el eje X (1,0) (-1, 0)

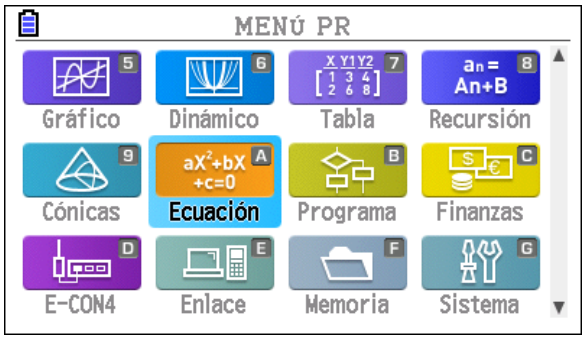
EJE Y (x=0)

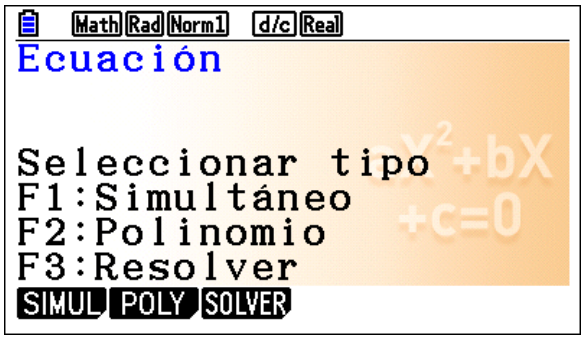
$$\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{0}^2}{\mathbf{0}^2 - \mathbf{4}} = -\frac{1}{4}$$

Hay un punto de corte con eje Y en (-1/4, 0)

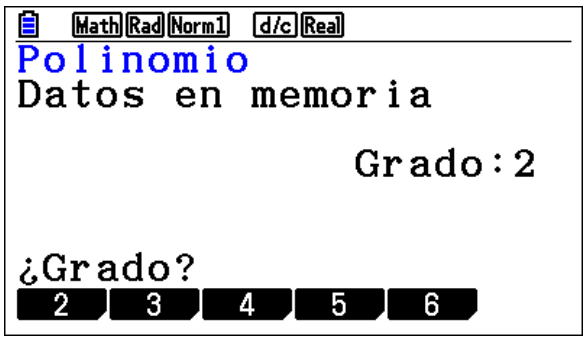
<u>Solución con fx-CG50</u>

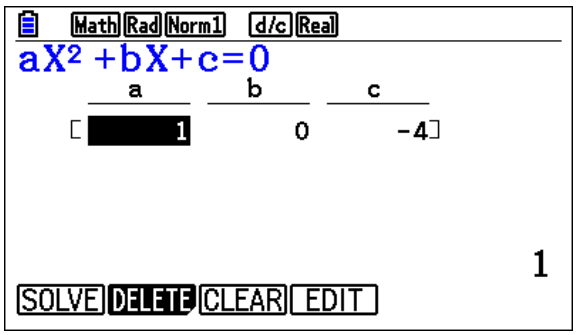
Menú A (Ecuación) + F1 (Simultáneo) + Número de incógnitas F2 + F1 (2)

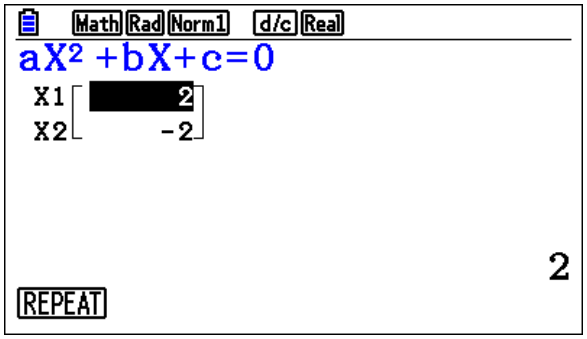




Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es



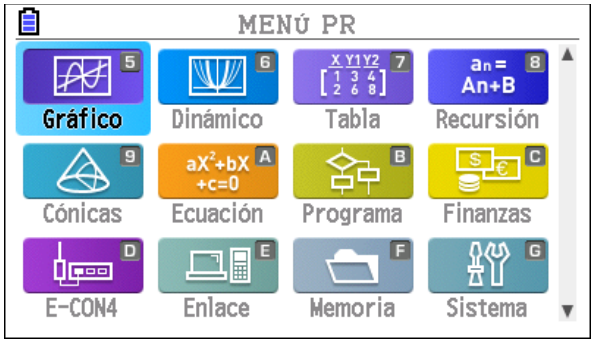


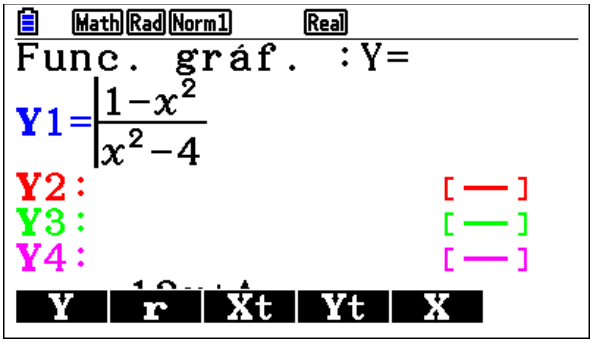


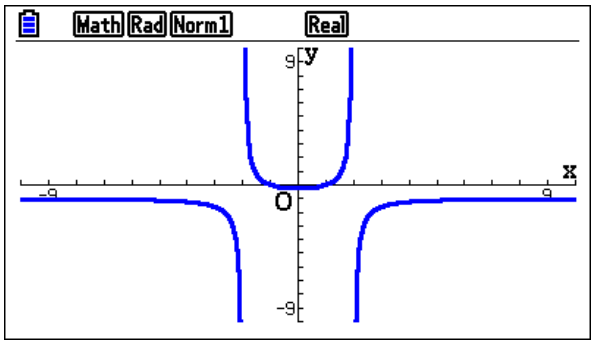
Introducir los coeficientes, y pulsar en EXE.

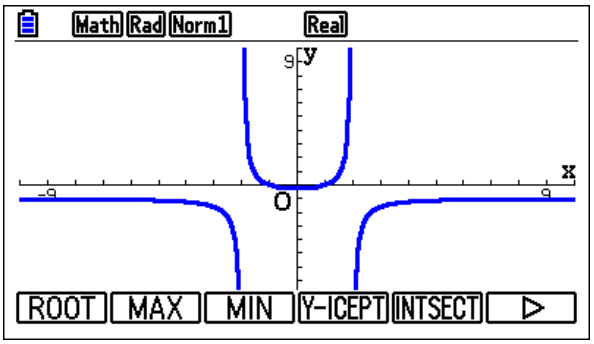
Menú 5 (Gráfico) + Introducir la función a representar + EXE + F6 (DRAW) + F5 (G-SOLV) + F4 (Y-ICEPT)

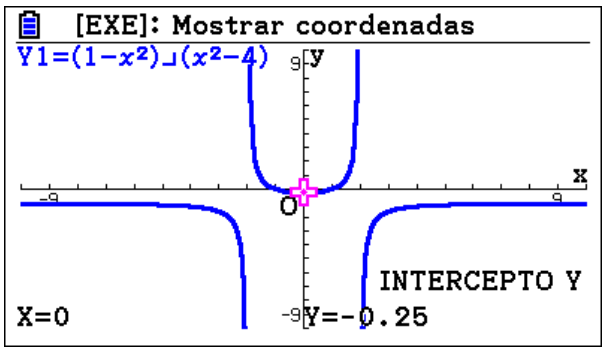
En caso que la función Y1 este seleccionada, pulsa sobre el joystick e introduce la función que desees representar.



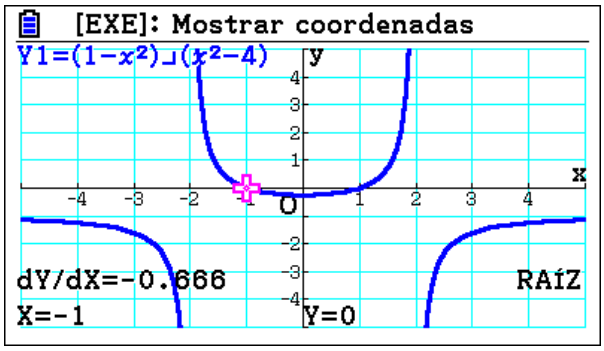


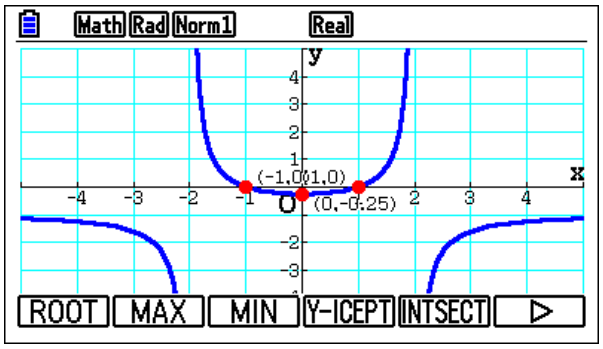






Ahora pulsamos de nuevo F 5(G-SOLVE) + F1 (ROOT) + JOYSTICK

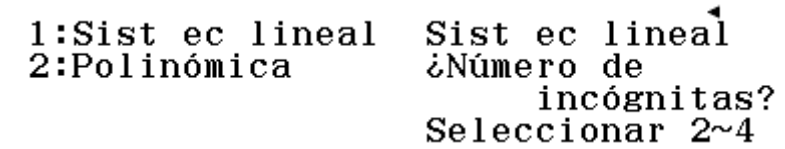


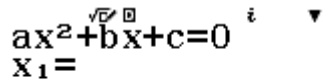


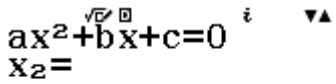
Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

Solución con Classwiz fx-570SP_991SP

MENU + A + 2 + introducimos 2







-4 2 -2

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. *(2 puntos)*

Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 2}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{1-4}{4-4}=\frac{-3}{0}=\{tiende\ a\ infinito\}\rightarrow \begin{array}{l}\lim_{x\to 2^+}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{1-4^+}{4^+-4}=-\infty\\ \lim_{x\to 2^-}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{1-4^-}{4^--4}=+\infty\end{array}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{1-4}{4-4}=\frac{-3}{0}=\{tiende\ a\ infinito\}\rightarrow \begin{array}{l}\lim_{x\to -2^+}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{1-4^-}{4^--4}=+\infty\\ \lim_{x\to -2^-}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{1-4^+}{4^+-4}=-\infty\end{array}$$

Hay dos asíntotas verticales en x = 2 y en x = - 2 . Y con el estudio de los limites laterales sabemos hacía donde tiene la función.

Asíntotas horizontales

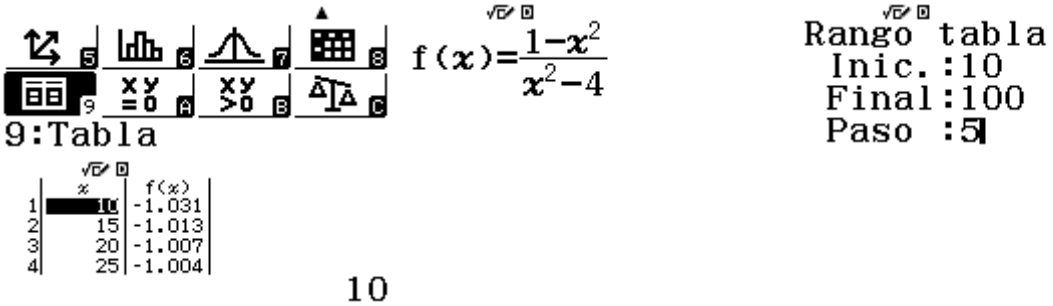
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=\frac{\infty}{\infty}=Indt$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{1-x^2}}{\mathbf{x^2-4}}=-1$$

Hay una asíntota horizontal en y = -1

Puesto que se trata de una función racional, y tenemos una asíntota horizontal en y=1 no hay asíntota oblicua.

Solución con Classwiz fx-570SP_991SP



Se pueden modificar los parámetros en el apartado de Rango tabla.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

Para estudiar la Monotonía de la función debemos de estudiar el signo de la primera derivada, y los puntos donde la función no existe.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}}$$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{-2x(\boldsymbol{x^2 - 4}) - (\boldsymbol{1 - x^2})(2x)}{(\boldsymbol{x^2 - 4})^2} = \frac{-2x^3 + 8x - 2x + 2x^3}{(\boldsymbol{x^2 - 4})^2} = \frac{6x}{(\boldsymbol{x^2 - 4})^2}$$

$$\frac{6x}{(\boldsymbol{x^2 - 4})^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

		-2		0		**2**	
f '(x)	<0		<0		>0	0	>0
f (x)	Decrece		Decrece	Mínimo	Crece		Crece

$$\boldsymbol{]-\infty, -2[- 3\ f'(-3) = \frac{-18}{25} < 0}$$
$$\boldsymbol{]-2, 0[- 1\ f'(-1) = \frac{-2}{3} < 0}$$
$$\boldsymbol{]0, 2[1\ f'(1) = \frac{2}{3} > 0}$$
$$\boldsymbol{]2, \infty[3\ f'(3) = \frac{18}{25} > 0}$$

Por tanto, la función crece en $\boldsymbol{]0, 2[\ \cup\ ]2, \infty[}$
y decrece en $\boldsymbol{]-\infty, -2[\ \cup\ ]-2, 0[}$

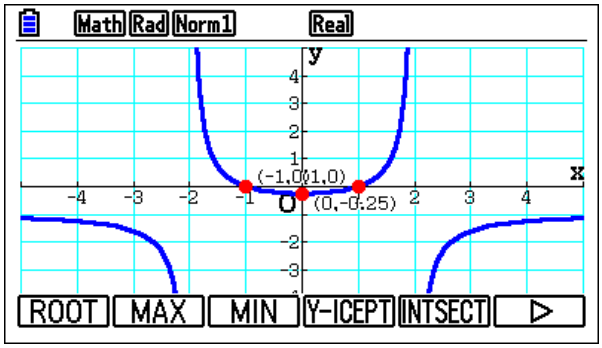
d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*

Y por tanto hay un mínimo en x = 0. Ahora es necesario calcular el valor de la abscisa.

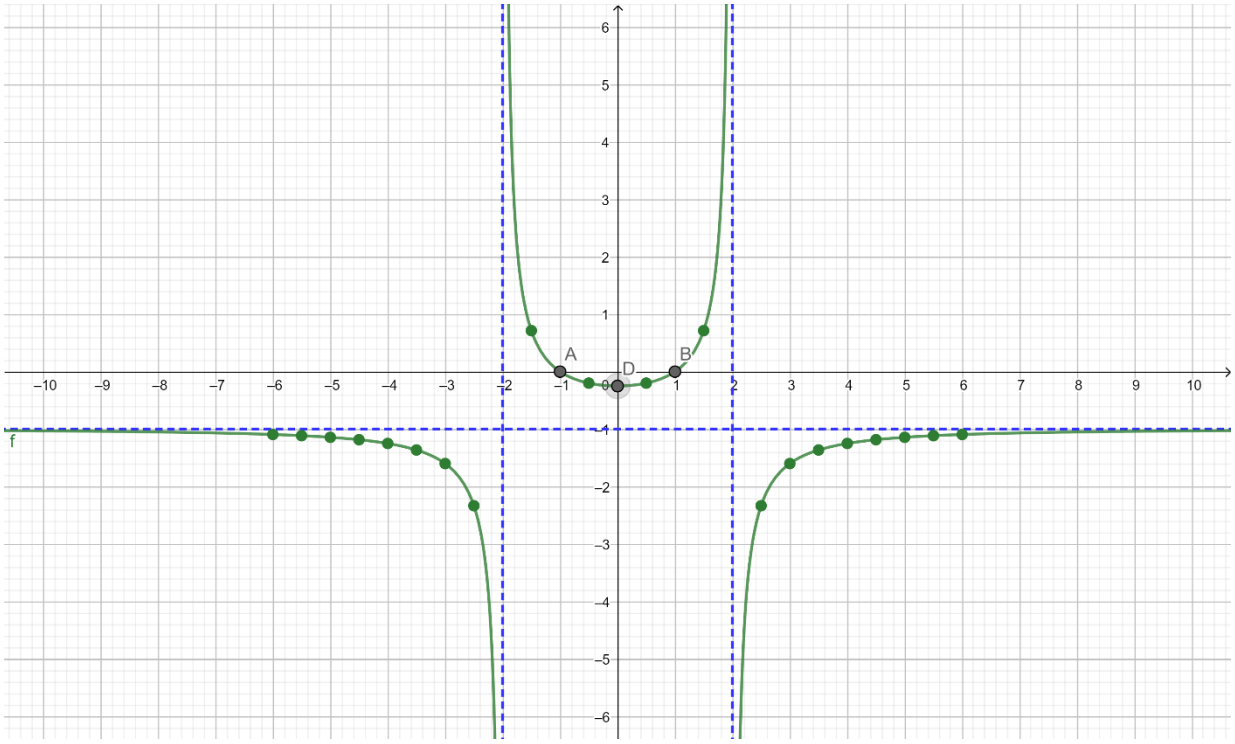
$$\boldsymbol{f(0) = \frac{1 - 0^2}{0^2 - 4}} = \frac{-1}{4}$$

Mínimo está en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*



<u>Solución mediante GeoGebra</u>



https://www.geogebra.org/calculator/arjcew9j

PROBLEMA 4

Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

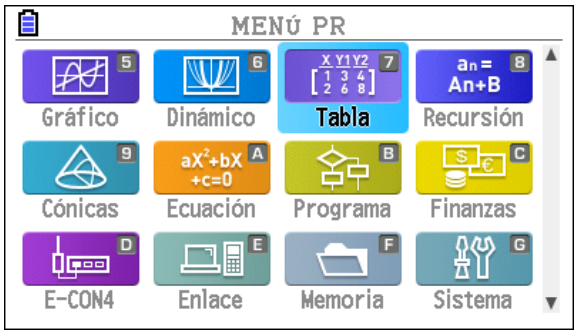
donde la variable *x* representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

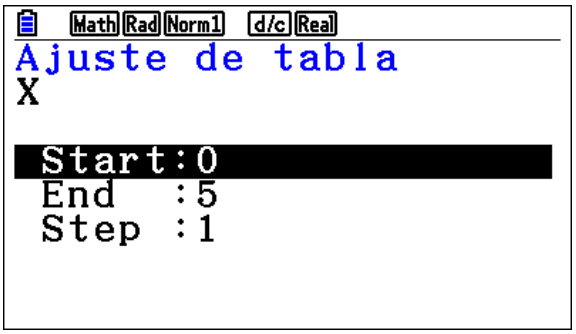
a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. *(2 puntos)*

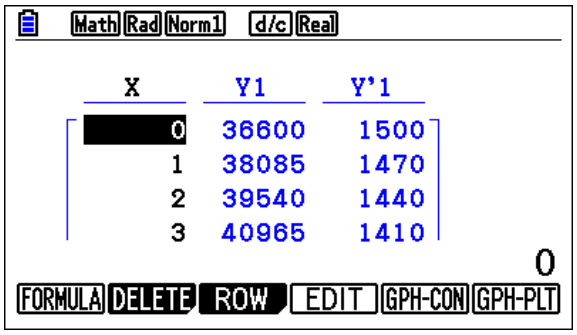
f(0) = 36600 + 1500·0 15 · 0² = ***36600 miles de m³***

Solución con fx-CG50

Menú 7 (Tabla) + Introducimos la ecuación + F5 (SET) + Start (0)

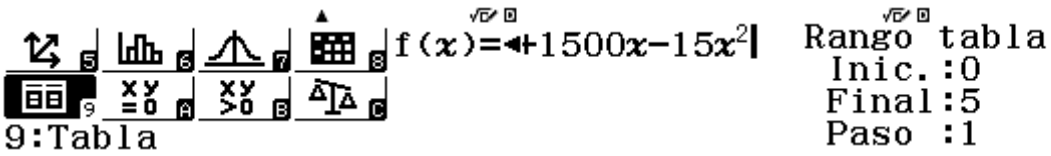


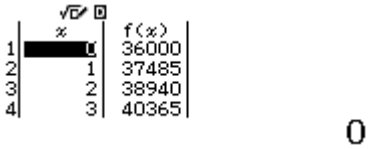




Solución con Classwiz fx-570SP_991SP

MENU + 9 + introducimos la ecuación + Rango tabla (Inic.:0)





Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). *(4 puntos)*

Estudiamos el signo de la primera derivada.

$$\boldsymbol{f'(x) = 1500 - 30x = 0 \rightarrow 1500 - 30x + 30x = 30x \rightarrow 1500 = 30x}$$

$$\boldsymbol{1500 = 30x \rightarrow \frac{1500}{30} = x \rightarrow 50 = x}$$

		50	
f '(x)	>0		0
f (x)	Crece	**Máximo**	Decrece

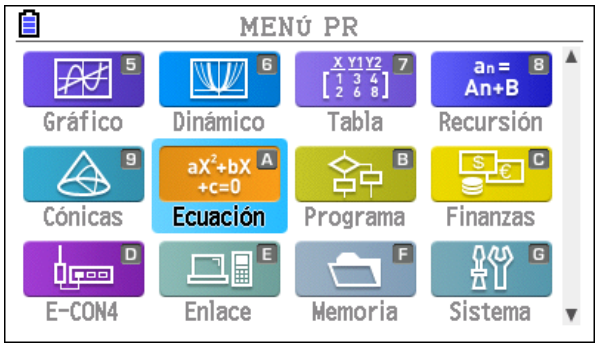
$$\boldsymbol{]-\infty, 50[0\ f'(0) = 1500 > 0}$$
$$\boldsymbol{]50, \infty[3\ f'(100) = 1500 - 30 \cdot 100 = -1500 < 0}$$

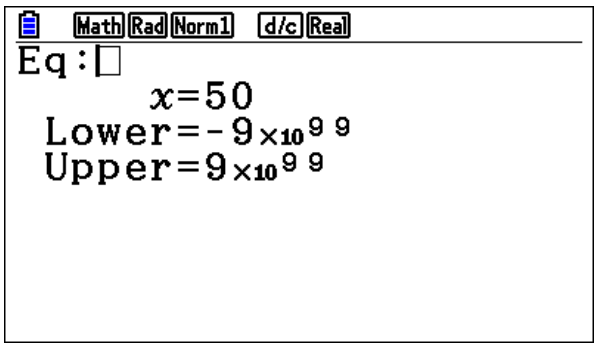
Han de pasar 50 años desde el inicio de 180 para que la capacidad alcance su valor máximo. Y su capacidad es de 74 100 miles de m³

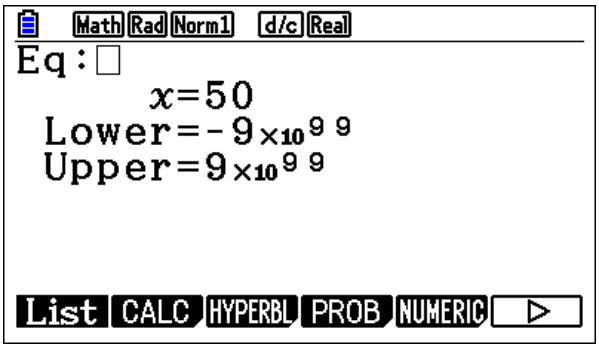
$\boldsymbol{f(50) = 36600 + 1500 \cdot 50 - 15 \cdot 50^2 =}$ **74100 miles de m³**

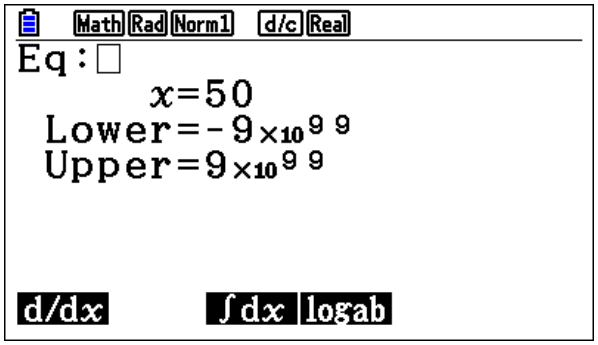
<u>Solución con fx-CG50</u>

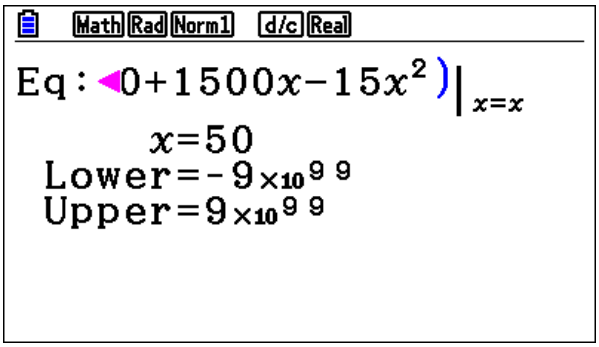
Menú A + F3 (Resolver) + Introducir la ecuación + OPTN + F2 (CALC) + F1 (d/dx)

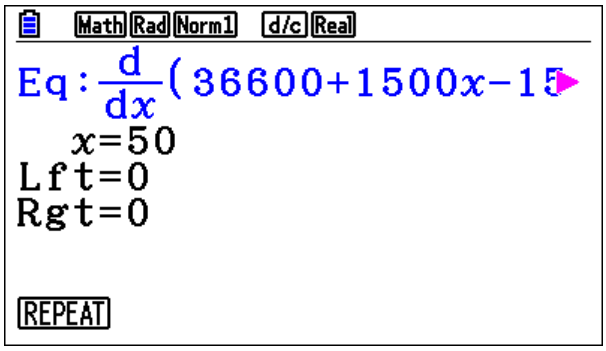




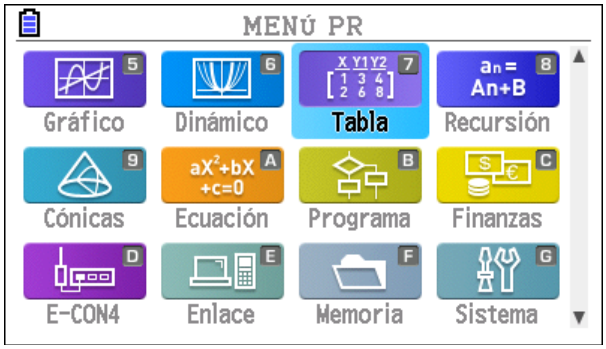


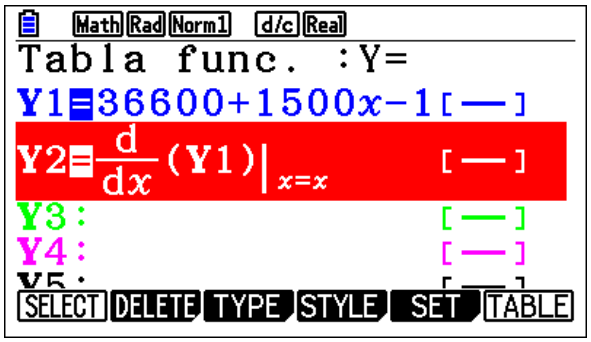




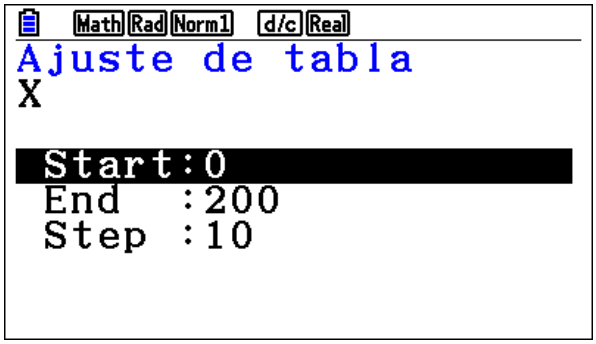


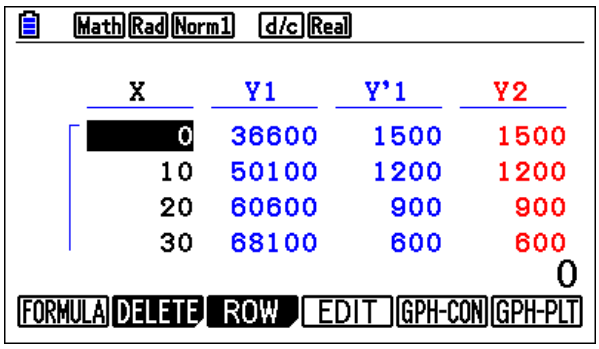
Evaluar en x = x. Y a continuación ir al Menu Tabla y hallar el valor de la primera derivada en x = 0, y en x = 100





Autor: José Aurelio Pina Romero www.pinae.es

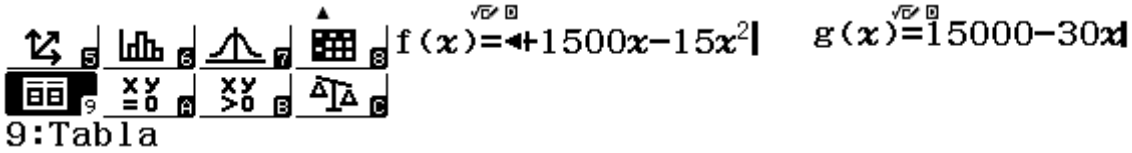


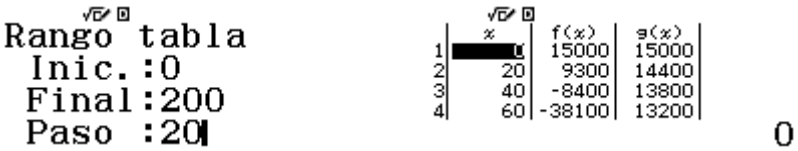


Y pulsando sobre el joystick puedes desplazarte por la tabla hacía abajo.

Solución con Classwiz fx-570SP_991SP

MENU + 9 + introducimos las ecuaciones + Rango tabla





c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 puntos)

Obviamente la explotación será rentable mientras la función tome valores positivos.

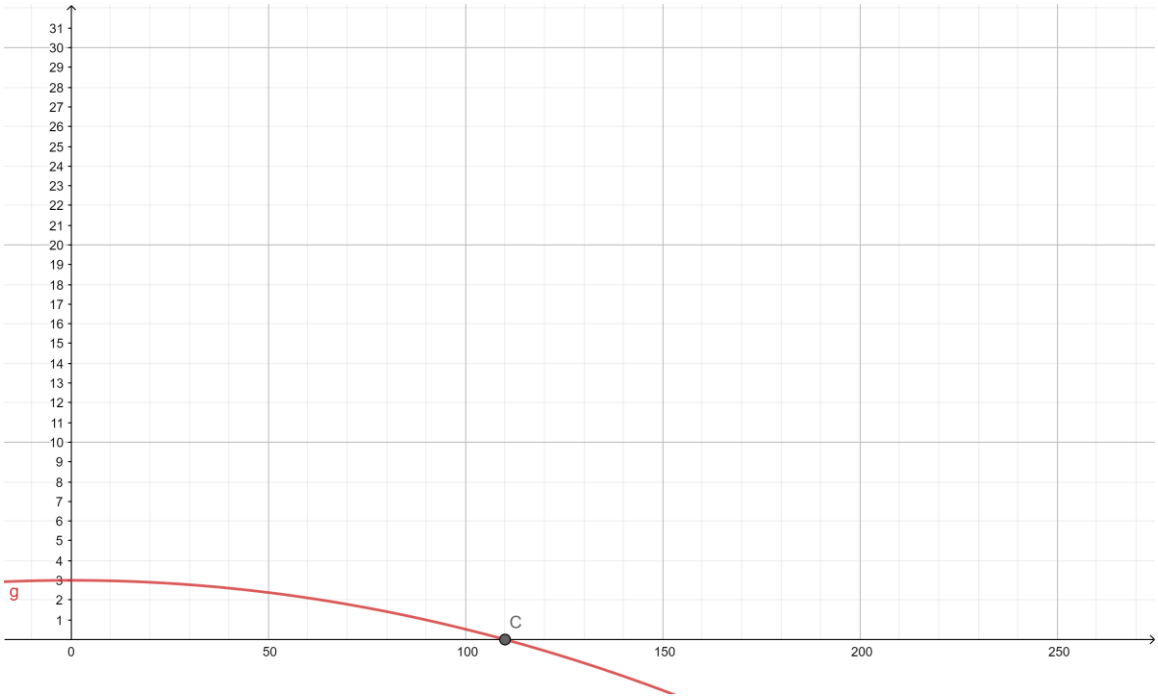
$$g(x) > 0 \rightarrow 3 - \frac{3x^2}{12100} > 0 \rightarrow 3 - \frac{3x^2}{12100} - 3 > -3 \rightarrow -\frac{3x^2}{12100} > -3$$

$$-\frac{3x^2}{12100} \cdot 12100 > -3 \cdot 12100 \rightarrow -3x^2 > -36300 \rightarrow \frac{-3x^2}{3} > \frac{-36300}{3}$$

$$-x^2 > -12100 \rightarrow x^2 < 12100 \rightarrow x^2 - 12100 < 0$$

$$x^2 = 12100 \rightarrow x = \pm 110$$

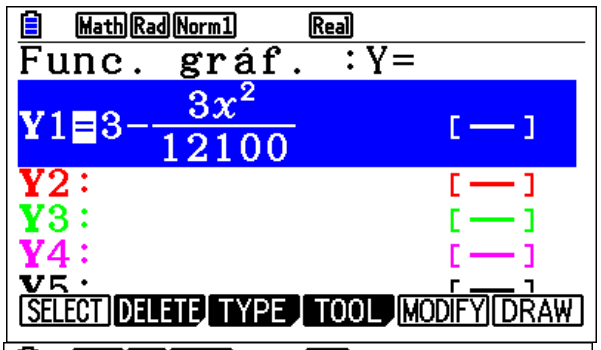
	0	Ganancias	110	Perdidas
f (x)		**>0**		**<0**

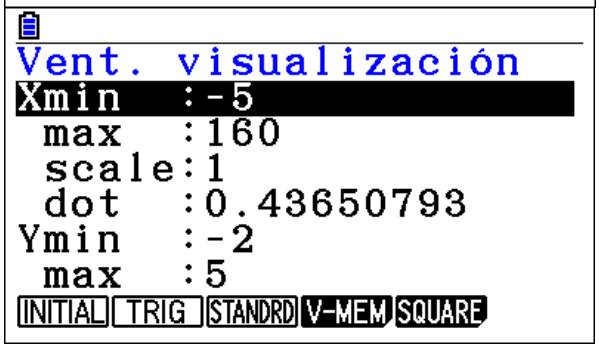


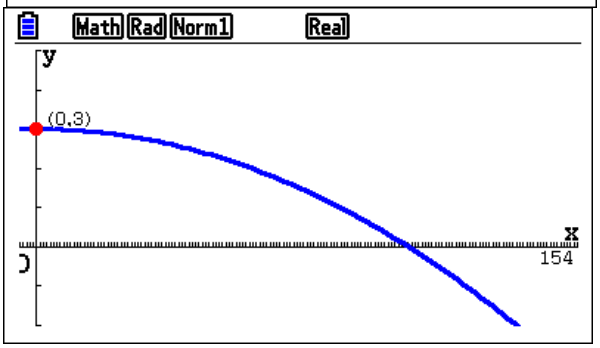
Solución: la explotación deja de ser rentable a los 110 años y su capacidad es de f(110) = 20100 miles de m^3.

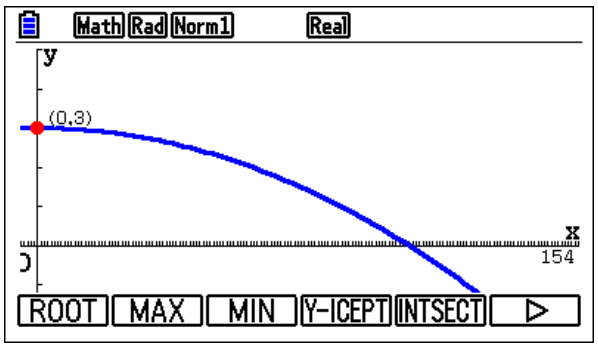
Solución con fx-CG50

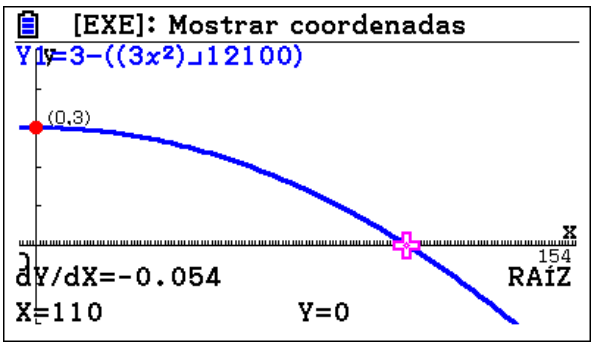
MENU 5 (GRAFICO) + Introducir la función + F3(V-Window) + F5 (G-Solv) + ROOT











En la ventad de visualización:

Xmin : -5
Max: 160
Scale: 1
Ymin: -2
Max: 5

https://www.geogebra.org/calculator/zpxd6htb

PROBLEMA 5

Si A y B son dos sucesos tales que $P(A)$=0,4, $P(B|A)$ = 0,25 y $P(B^c)$ = 0,75, se pide

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué? *(2,5 puntos)*

A y B son independientes si $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

A partir de $P(B|A)$ = 0,25, tenemos que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}25 \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}25 \cdot P(A)$

$$P(A \cap B) = 0{,}25 \cdot P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1$$

Por otra parte $\mathrm{P}(B^c) = 0{,}75 \rightarrow 1 - \mathrm{P(B)} = 0{,}75 \rightarrow \mathrm{P(B)} = 0{,}25$

Así pues:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$
$$0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$$
$$0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$$
$$0{,}1 = 0{,}1$$

Y por tanto los sucesos A y B son independientes

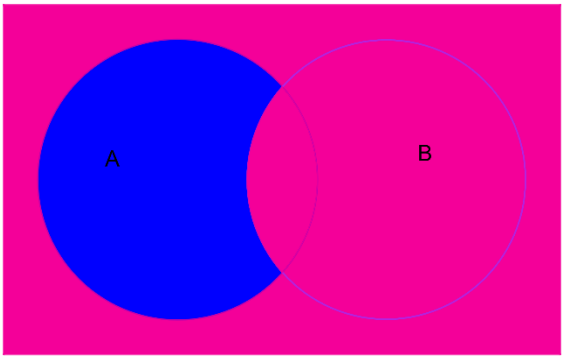
b) Calcula $P(A \cup B)$. *(2,5 puntos)*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}55$$

c) Calcula $P(A|\,B^c)$. *(2,5 puntos)*

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{0{,}75} = \frac{0{,}4 - 0{,}1}{0{,}75} = \frac{0{,}3}{0{,}75} = 0{,}4$$

A través de un diagrama de Venn podemos hallar el valor de $P(A \cap B^c)$



d) Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$. *(2,5 puntos)*

$$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Por las leyes de Morgan

$$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$$

Por las leyes de Morgan

(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de *A* y el suceso complementario de *B*).

https://www.geogebra.org/classic/vbweah2x

PROBLEMA 6

Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30% de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30% de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40% de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34% de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas. *(4 puntos)*

Definimos los sucesos

A = móvil con 4 pulgadas
B = móvil con pantalla 4,7 pulgadas
C = móvil con pantalla 5 pulgadas

S = utiliza protector de pantalla
N = no utilizar protector de pantalla

4 pulgadas ***30%***	*Sí protector de pantalla* ***30%***
	No protector de pantalla ***70%***
4,7 pulgadas ***x***	*Sí protector de pantalla* ***25%***
	No protector de pantalla ***75%***
5 pulgadas ***y***	*Sí protector de pantalla* ***40%***
	No protector de pantalla ***60%***

Sabemos que $0{,}3 + x + y = 1 \rightarrow x + y = 0{,}7 \rightarrow 10x + 10y = 7$ *, y por otra parte P(S) = 0,34 y por tanto*

$$P(S) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + x \cdot 0{,}25 + y \cdot 0{,}4 = 0{,}34 \rightarrow 0{,}25x + 0{,}4y = 0{,}25 \rightarrow 25x + 40y = 25$$

Y resolviendo el sistema $\begin{cases} 10x + 10y = 7 \\ 25x + 40y = 25 \end{cases}$ *tenemos que x=0,2; y=0,5*

P(B) = 0,2 y P(C)=0,5

$$P(A|S) =$$

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. *(3 puntos)*

$$P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}34} = \frac{0{,}2}{0{,}34} = 0{,}5882$$

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. *(3 puntos)*

$$P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 04} = \frac{0{,}2}{0{,}29} = 0{,}6896$$