

9

GEOMETRÍA PLANA



TEMA 9

GEOMETRÍA PLANA

9.1 INTRODUCCIÓN

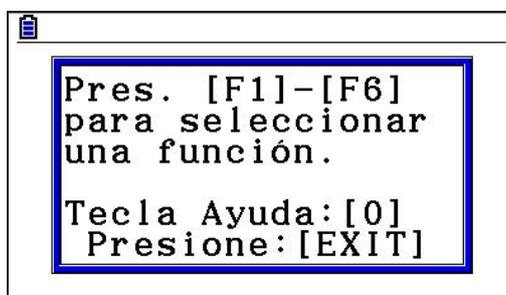
Habitualmente, los problemas de construcciones geométricas ocupan poco espacio en el currículo de la ESO; generalmente se prioriza el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, en detrimento de los problemas en los que hay que usar regla y compás para construir figuras geométricas. Esto se debe, en parte, a que no se dispone de herramientas adecuadas para trabajar, y también a que la construcción con regla y compás es difícil y requiere mucho conocimiento de geometría. Sin embargo, el hecho de que una calculadora pueda hacer construcciones geométricas es muy saludable, pues acerca a los estudiantes la resolución de problemas que si se tuvieran que hacer con regla y compás serían demasiado largos y difíciles. La calculadora favorece una disminución de las dificultades al poner en primer plano qué construcciones hay que hacer y no cómo hacerlas, ya que para cada construcción hay disponible una herramienta o un comando que permite realizarla. Esto no quita, desde luego, que el estudiante tenga que razonar geoméricamente, ya que los algoritmos siempre deben ser razonados.

Para dibujar figuras geométricas, estudiar sus transformaciones y realizar animaciones, se utiliza el menú **Geometría**. Desde el menú principal se pulsa la tecla que corresponde a la letra I (\square):



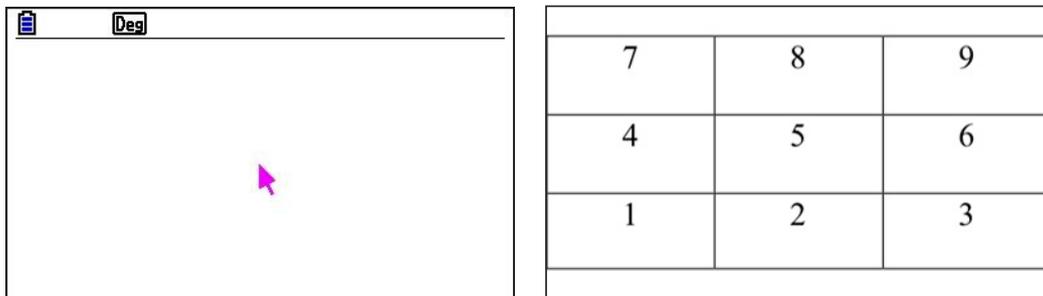
Al entrar en este menú, aparece un mensaje que indica cuales son las teclas para trabajar con las diferentes funciones:

\square [EXIT]

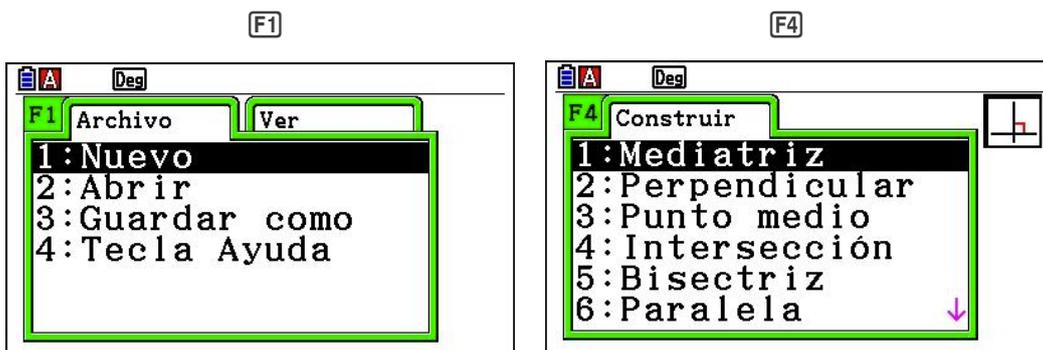


GEOMETRÍA PLANA

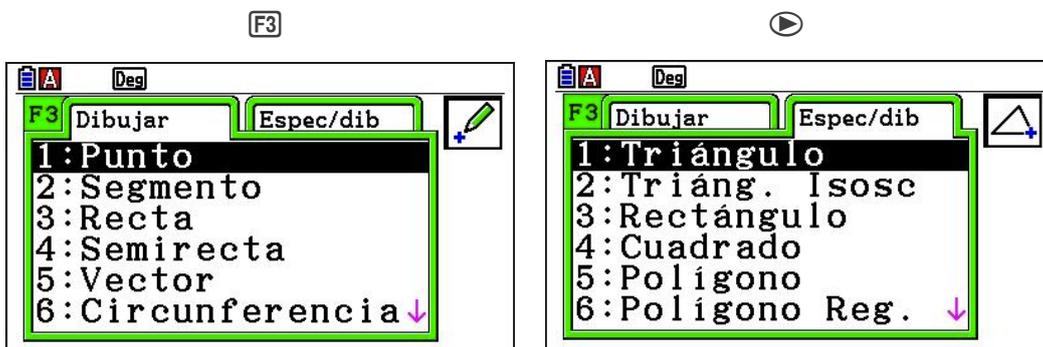
Se muestra una pantalla en blanco con un puntero de color rosa. Para moverlo se utiliza el cursor (◀ ▶ ▲ ▼), y para posicionarlo más rápidamente en el área deseada se utilizan las teclas numéricas de la calculadora. La pantalla queda dividida en 9 partes dependiendo de donde se quiera situar el puntero:



Para acceder a las opciones del menú **Geometría** hay que pulsar las teclas de **F1** a **F6**:



Dentro de cada menú hay que desplazarse a izquierda y derecha con las flechas (◀ ▶) para ver todas las opciones disponibles:



9.2 PARA TRABAJAR EN EL MENÚ GEOMETRÍA

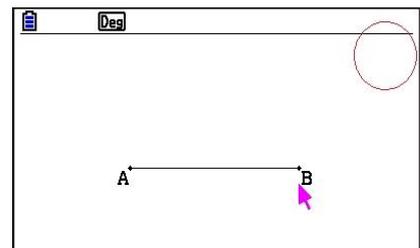
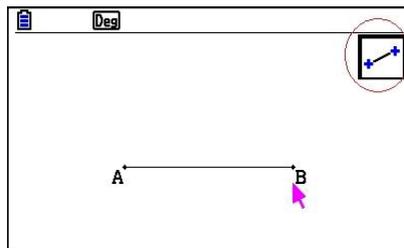
9.2.1 SELECCIONAR Y DESELECCIONAR UN OBJETO

En este apartado se dibuja un segmento como ejemplo para activar y quitar su selección:

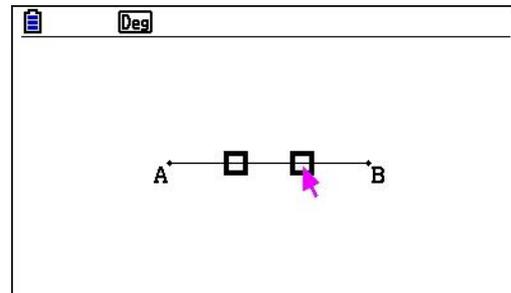
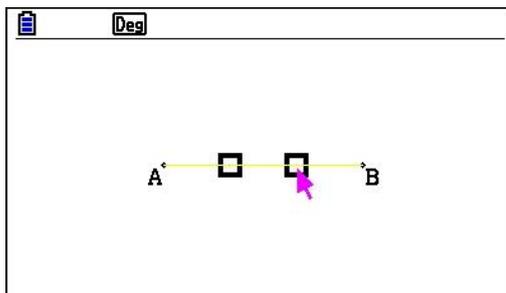
F3 **2**

Marcar dos puntos en la pantalla

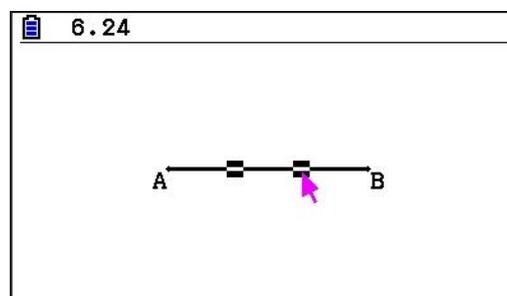
EXIT



Antes de seleccionar un objeto hay que fijarse en que ninguna opción del menú **Gráfico** está activada en la esquina superior derecha. Se desplaza el puntero hasta el objeto, aparecen dos cuadrados con el borde negro y el objeto empieza a parpadear en amarillo/negro:



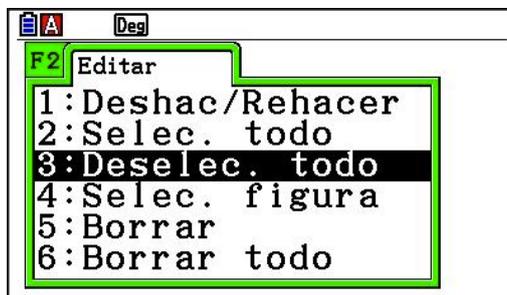
Para seleccionarlo se pulsa **EXE** y los dos cuadrados quedan coloreados de negro:



Para quitar la selección del segmento (o cualquier otro elemento) hay que acercar el puntero y cuando parpadea pulsar **EXE**.

Para quitar la selección de varios elementos a la vez hay dos opciones:

- Pulsar **F2** y “Deselec.todo” (**3**):



- Pulsar **AC/ON**

9.2.2 TECLADO

Las teclas de la calculadora tienen una función diferente cuando se utiliza el menú **Geometría**:

+ / **=** Zoom para ampliar / Zoom para reducir.

DEL Elimina el objeto seleccionado.

AC/ON Si se pulsa una vez, elimina la selección de los objetos. ¡Atención!, si se pulsa dos veces elimina todos los elementos de la pantalla.

X deshace/ Rehace una operación.

x² Selecciona un polígono entero. Hay que acercarse a uno de los lados del polígono con el puntero y cuando aparecen los dos cuadros negros pulsar la tecla **x²**.

9.3 ELEMENTOS Y FIGURAS GEOMÉTRICAS

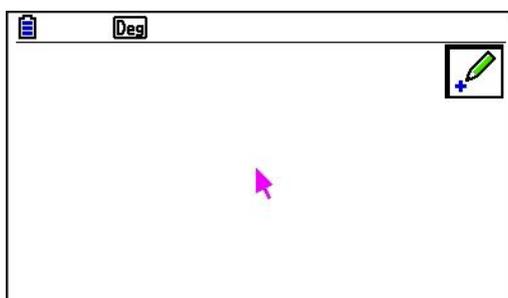
En este menú se pueden dibujar puntos, segmentos, vectores, polígonos... Estas opciones están clasificadas en dos pestañas diferentes a las que se accede pulsando ◀ ▶ .

9.3.1 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

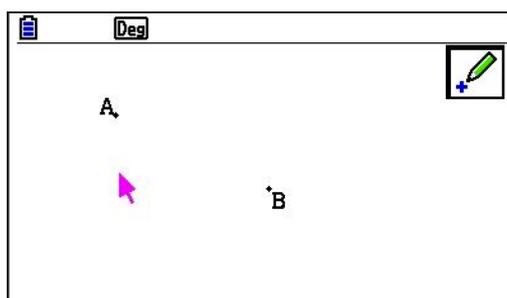
Para dibujar un punto se pulsa $\boxed{1}$ o $\boxed{\text{EXE}}$ cuando la opción "1: Punto" está sombreada:



En la esquina superior derecha de la pantalla, aparece el icono correspondiente a dibujar un punto. Es importante fijarse en este icono para saber la opción en la que se está trabajando:



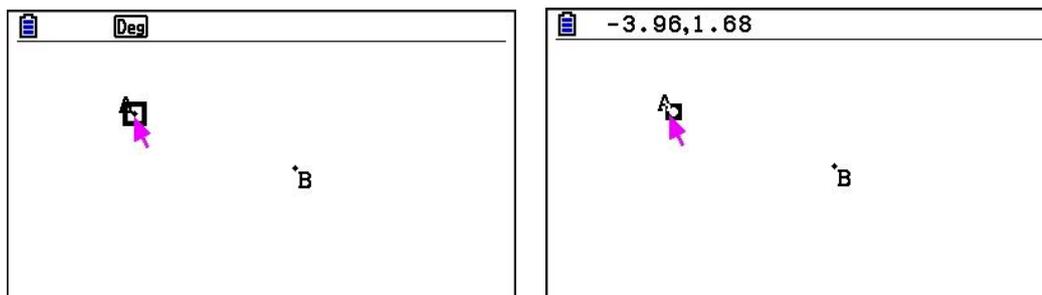
Se desplaza el puntero hasta donde se quiere dibujar el punto y se pulsa $\boxed{\text{EXE}}$. La calculadora asignará A al primer punto, B al segundo...



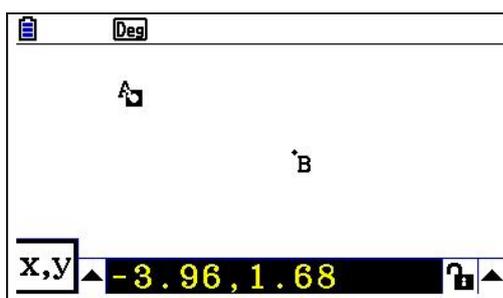


NOTA

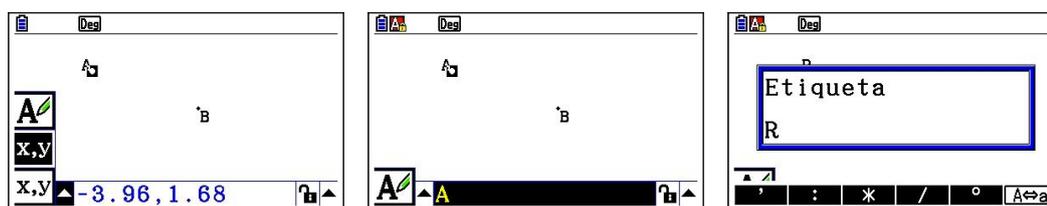
Para renombrar el punto A y asignarle la letra R , se selecciona el punto colocando el puntero encima (aparece un cuadrado) y pulsando \square (queda coloreado en blanco con fondo negro):



Se pulsa \square y en la parte inferior de la pantalla aparece la información relativa al punto A :



Se desplaza el cursor (\leftarrow \rightarrow) hasta \blacktriangle y cuando está sombreado, se pulsa \square . En el menú que se despliega a la izquierda de la pantalla, se selecciona A pulsando \square y se escribe la letra que se desea en la parte inferior:



Para salir de esta opción se pulsa \square \square

El resto de elementos geométricos que se pueden dibujar en esta pestaña: recta, semirrecta, vector, círculo, arco y semicírculo, son muy intuitivos y se trabajan en los ejemplos que aparecen más adelante durante el tema.

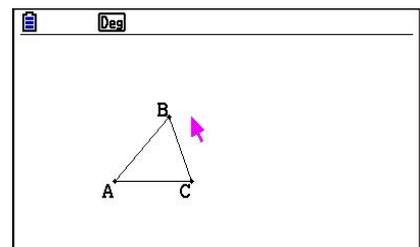
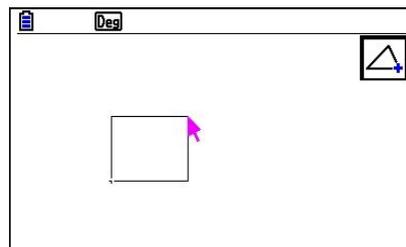
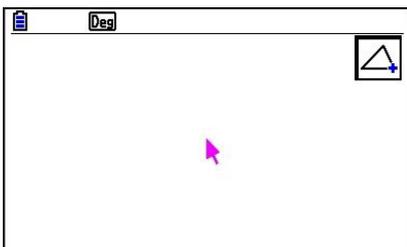
9.3.2 FIGURAS GEOMÉTRICAS

En la opción **F3**, “Espec/dib” (▶), la calculadora permite dibujar diferentes figuras geométricas:



a) Triángulo

Para dibujar un triángulo se pulsa **EXE** cuando esta opción está seleccionada, o la tecla **1**. Se coloca el cursor donde se desea dibujar uno de los vértices del triángulo y se pulsa **EXE**. Si se mueve el puntero (◀ ▶ ▲ ▼) aparece un marco en cuyo interior se dibuja el triángulo al pulsar **EXE** de nuevo.

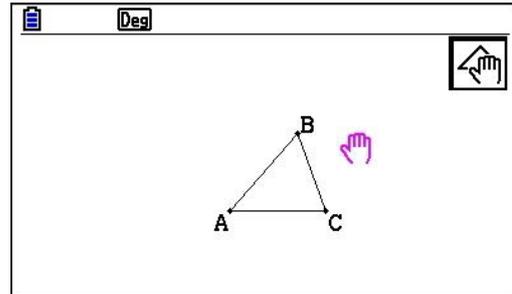
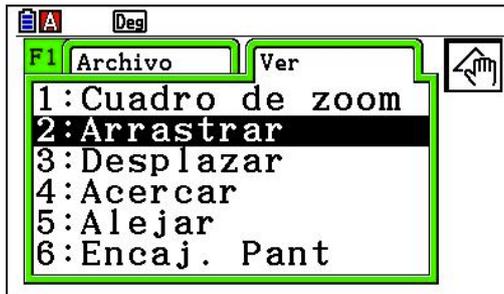




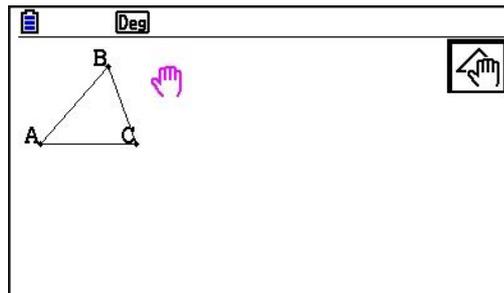
NOTA

Si se desea mover la figura:

[F1], "Ver" (▶), "Arrastrar", [EXE], [EXE]



Utilizando el cursor (◀ ▶ ▲ ▼) se desplaza la imagen. Para volver al puntero original se pulsa [EXE]:

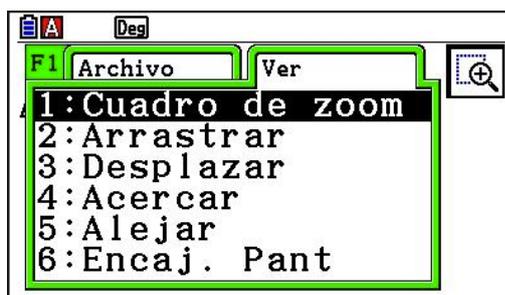




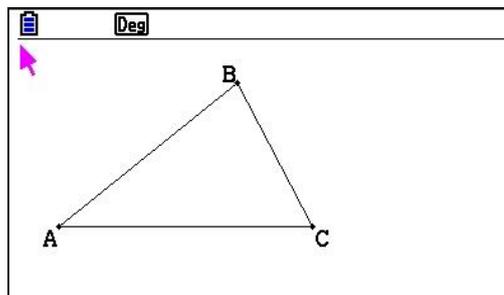
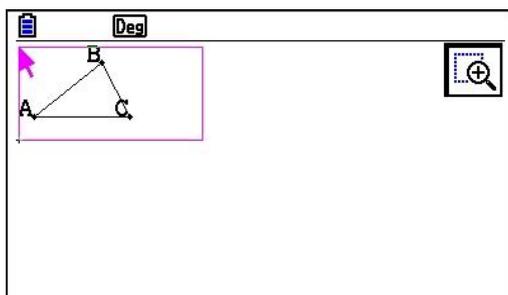
NOTA

Si se desea hacer un zoom de la figura:

F1, “Ver” (▶), “Cuadro de zoom”, **EXE**

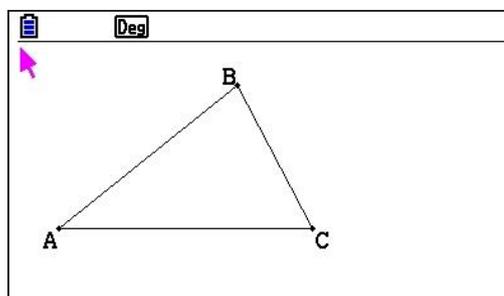
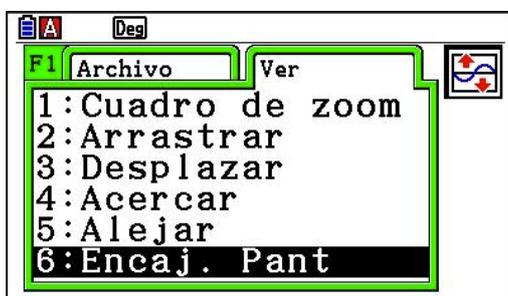


Se pulsa **EXE** donde se desea que esté el vértice del cuadro de zoom y utilizando el cursor (◀▶▲▼) aparece un marco rosa. Una vez enmarcada la figura, se pulsa **EXE** para agrandarla:



En el caso de querer que la figura ocupe toda la pantalla:

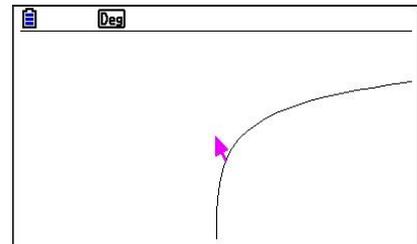
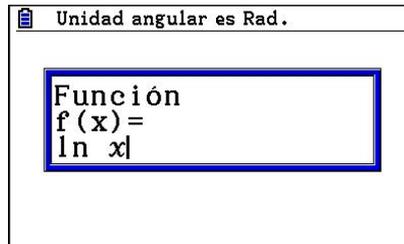
F1, “Ver” (▶), “Encaj.Pant”, **EXE**



De la misma forma se pueden dibujar rectángulos, cuadrados, polígonos regulares e irregulares.

b) Función $f(x)$

La última opción en **F3**, “Espec/dib” (▶), permite dibujar una función:





NOTA

Si se desea añadir los ejes cartesianos se puede hacer desde la configuración, **SET UP** (**SHIFT** **MENU**):

Axes: On (**F1**)

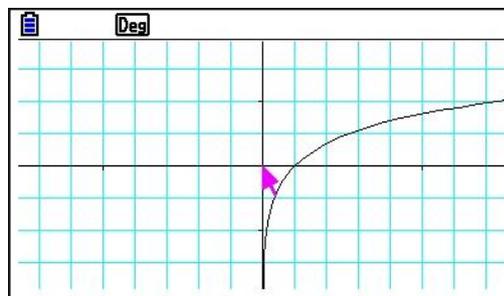
Grid: Line (**F3**), **EXE**

Angle	: Deg
Angle Unit	: On
Length Unit	: Off
Grid	: Off
Grid Space	: 1
Axes	: On

On Off Scale

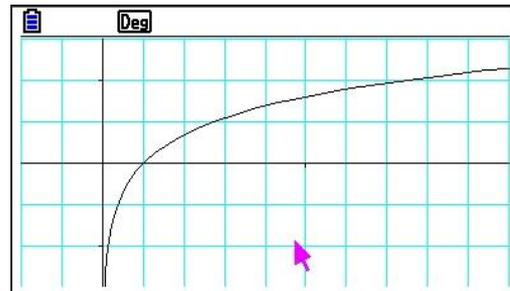
Angle	: Deg
Angle Unit	: On
Length Unit	: Off
Grid	: Line
Grid Space	: 1
Axes	: On

On Off Line



Se puede especificar la visualización del eje x en **V-Window** (**SHIFT** **F3**):

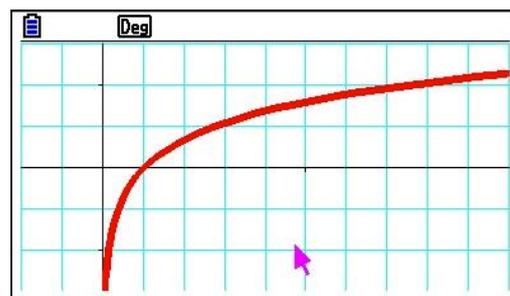
Vent. visualización	
Xmin	: -2
max	: 10
Ymid	: 0.02



Para definir el color y el tipo de línea de la función se pulsa **FORMAT** (**SHIFT** **5**):

1:Est línea	: [—]
2:Color línea	: [Red]

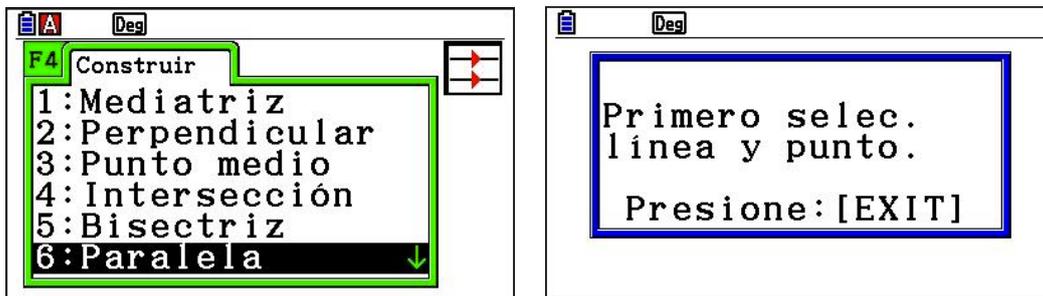
OK :[EXIT] Cancelar :[AC]



9.4 CONSTRUCCIÓN DE ELEMENTOS GEOMÉTRICO

Este menú permite dibujar mediatrices, rectas perpendiculares, el punto medio de un segmento, el punto de intersección entre dos rectas, la bisectriz de un ángulo, rectas paralelas y rectas tangentes a una circunferencia, a un arco de circunferencia y a una función.

En cualquiera de las opciones anteriores la calculadora muestra un mensaje indicando los elementos que son necesarios seleccionar para dibujar el elemento deseado:



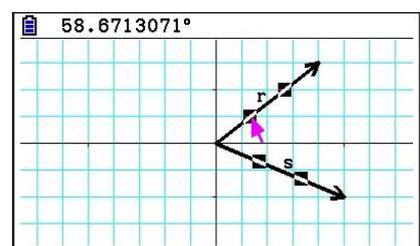
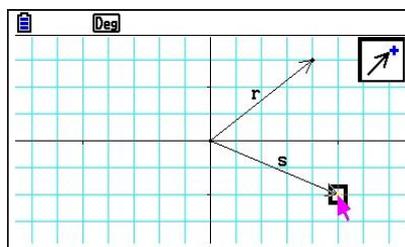
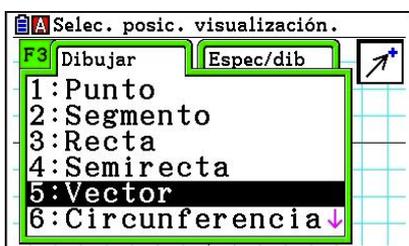
EJEMPLO

¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{r}(4, 3)$ y $\vec{s}(5, -2)$?

Se dibujan los vectores y se seleccionan:

F3 5 EXE

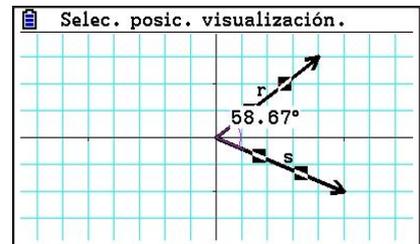
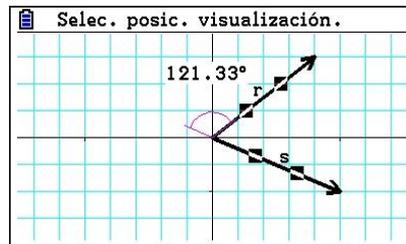
EXIT



GEOMETRÍA PLANA

El ángulo que forman \vec{r} y \vec{s} es $58,67^\circ$:

F4 8 EXE

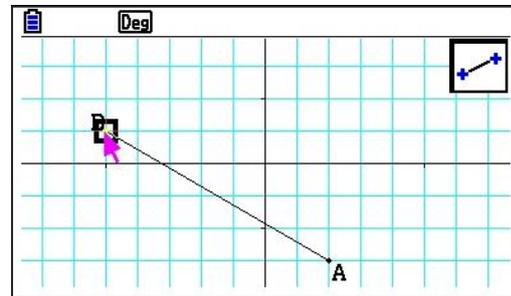


EJEMPLO

Dados los puntos $A(2, -3)$ y $B(-5, 1)$, dibuja la perpendicular al segmento \overline{AB} que pasa por el punto $C(2, 1)$

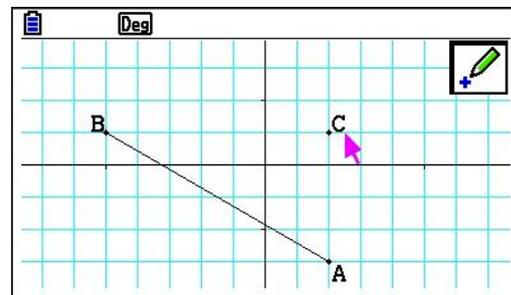
Se dibuja el segmento y el punto $C(2, 1)$:

F3 2 EXE



EXIT

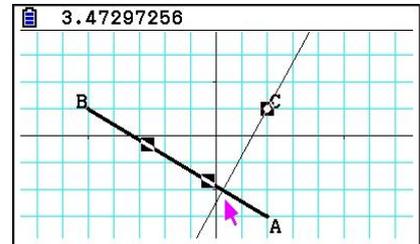
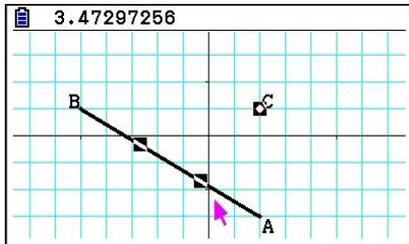
F3 1 EXE



EXIT

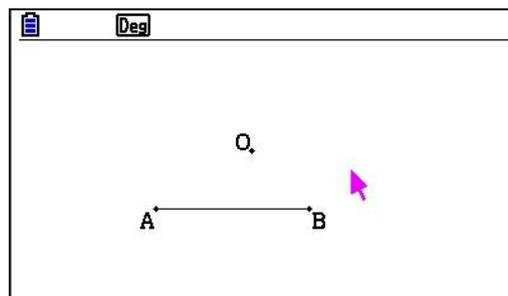
Antes de dibujar la perpendicular hay que seleccionar el segmento \overline{AB} y el punto C :

F4 2 EXE



EJEMPLO

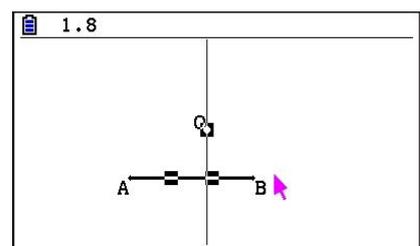
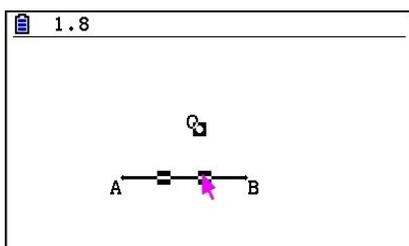
Construye un triángulo dado su lado AB y el ortocentro O . Dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo.



Como el ortocentro es el punto por donde pasan las alturas del triángulo, se dibuja la altura del lado AB . Para dibujar una recta perpendicular se selecciona, antes de elegir la opción “Perpendicular” en la calculadora, el punto por donde tiene que pasar la recta y el segmento al que tiene que ser perpendicular:

Se seleccionan el punto O
y el segmento \overline{AB}

F4 2 EXE



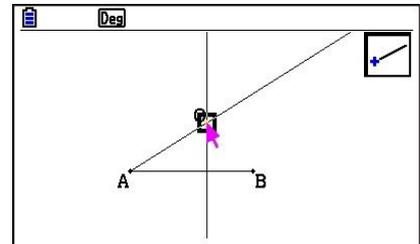
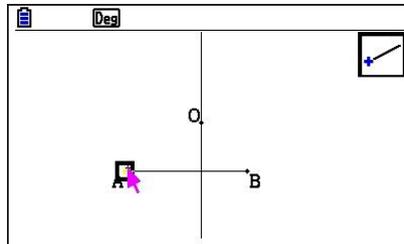
GEOMETRÍA PLANA

Se traza la altura del lado a , que pasa por los puntos A y O :

F3 **4** **EXE**

Se marca el punto A

Se marca el punto O

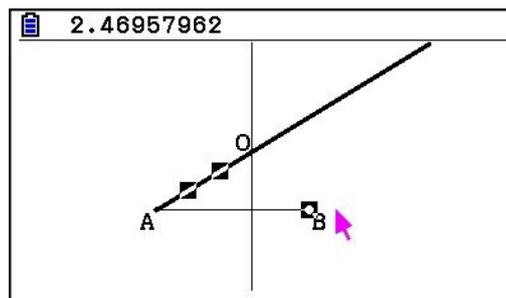


NOTA

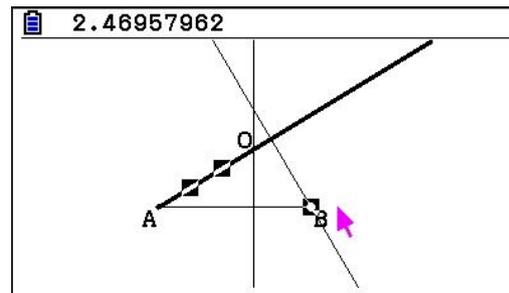
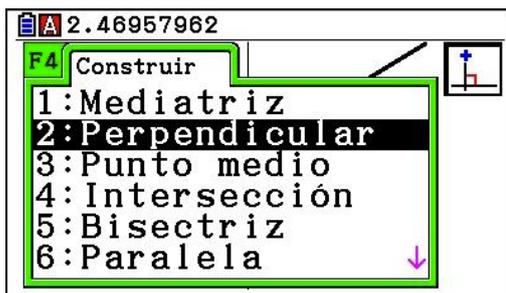
- Es importante pulsar **EXIT** al terminar el dibujo seleccionado para salir de esa opción. Se indica porque no aparece ningún icono en la esquina superior derecha.
- Para desactivar todos los elementos seleccionados en pantalla se pulsa **AC/ON**.
- Si se desea borrar uno de los elementos dibujados, se selecciona y se pulsa **DEL**.

Se dibuja el lado a , que es perpendicular a su altura y pasa por el punto B :

Seleccionar la altura del lado a y el vértice B

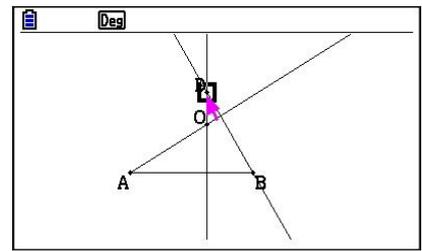
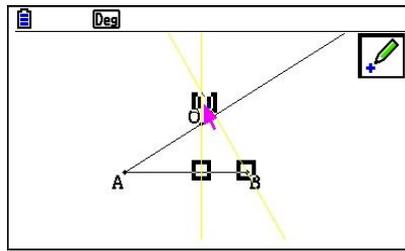


F4 **2** **EXE**

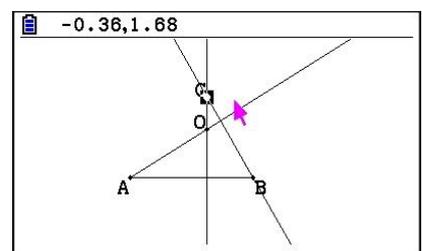
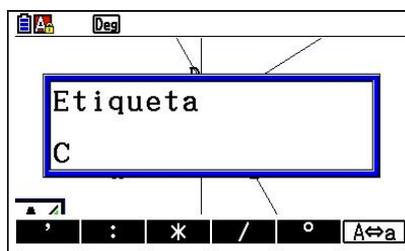
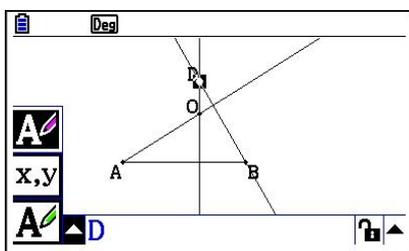


GEOMETRÍA PLANA

Se dibuja el punto C :



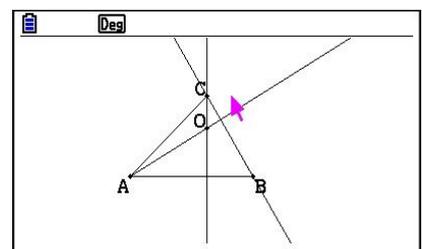
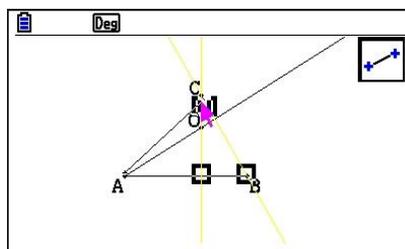
Como la calculadora ha asignado a este vértice la letra D , se puede renombrar:



Se dibuja el lado b que pasa por los puntos A y C :

F3 **2** **EXE**

Se marca el punto A y el punto C



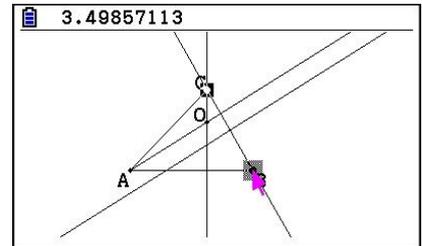
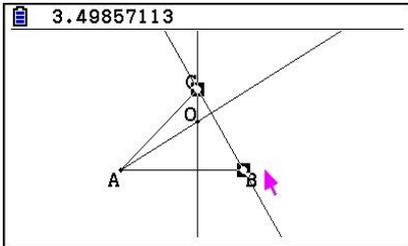
Para hallar el centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo se dibujan las mediatrices de dos lados, en este caso de los lados a y b . Primero hay que seleccionar los vértices del segmento del que se desea trazar la mediatriz y después hay que elegir esta opción en la calculadora:

GEOMETRÍA PLANA

- Mediatriz del lado a :

Seleccionar los vértices B y C

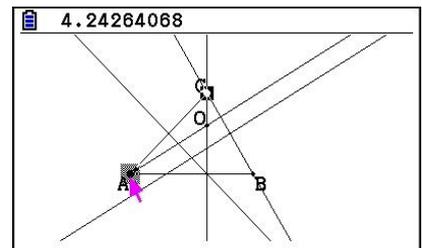
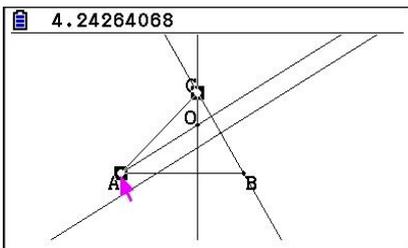
F4 1 EXE



- Mediatriz del lado b :

Seleccionar los vértices A y C

F4 1 EXE

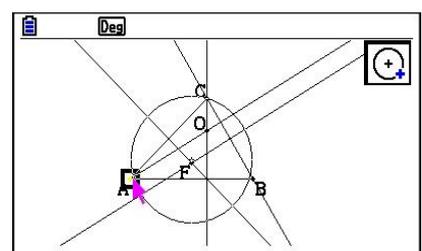
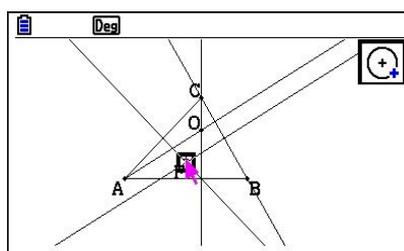
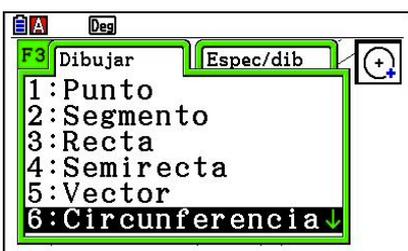


Para finalizar, se dibuja la circunferencia seleccionando previamente su centro, que es el punto donde se cortan las mediatrices:

F3 6 EXE

EXE

EXE

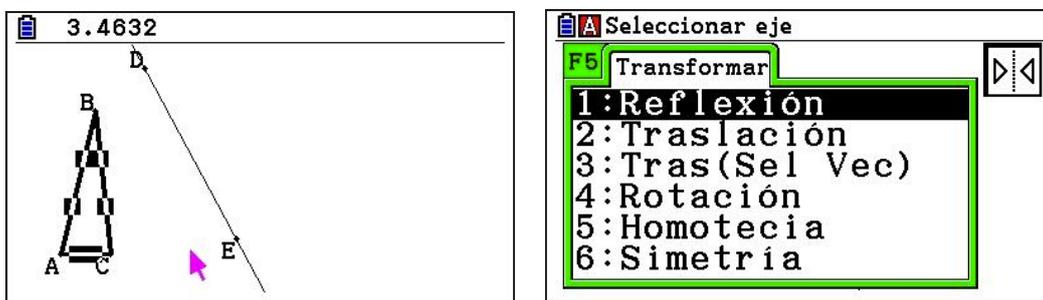


9.5 TRANSFORMACIONES (F5)

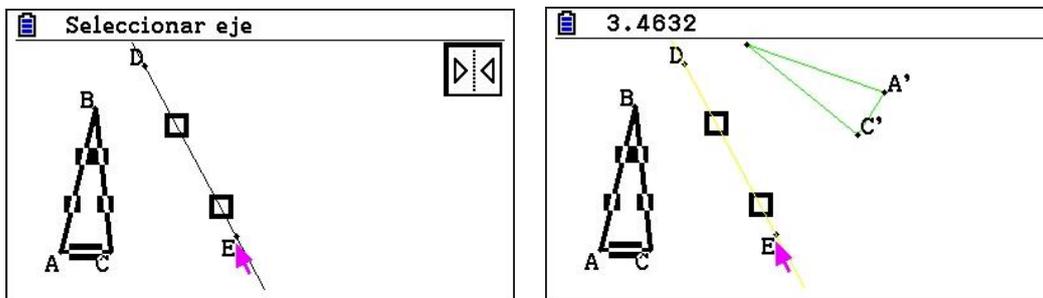
Para realizar transformaciones geométricas en la calculadora hay que dibujar la figura antes de elegir la transformación. En los siguientes ejemplos se ha dibujado un triángulo.

9.5.1 REFLEXIÓN

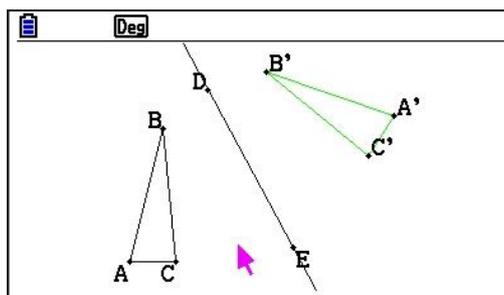
Se dibuja la recta respecto a la que se desea hacer la reflexión y se selecciona el triángulo ABC .



En la parte superior de la pantalla, se indica que hay que elegir el eje. Se selecciona la recta DE y automáticamente se dibuja la reflexión del triángulo:



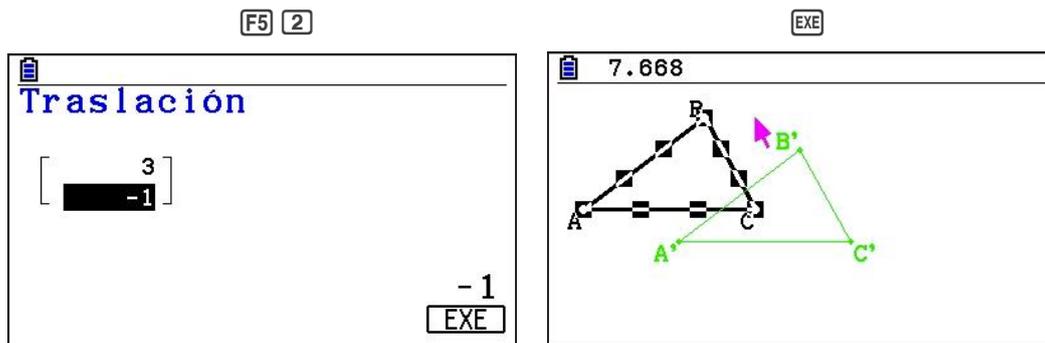
El triángulo $A'B'C'$, es simétrico al triángulo ABC respecto a la recta DE :



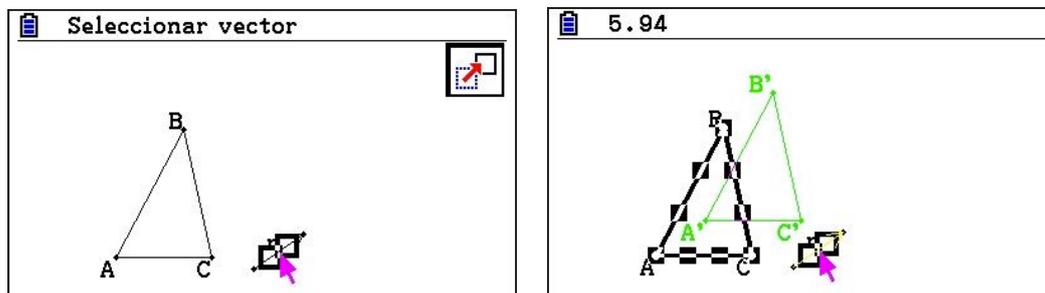
9.5.2 TRASLACIÓN

Para hacer la traslación puede indicarse el valor del vector respecto al cual quiere hacerse la transformación (**F5** **2**) o elegir un vector que esté dibujado (**F5** **3**).

a) Si se escriben las coordenadas del vector:

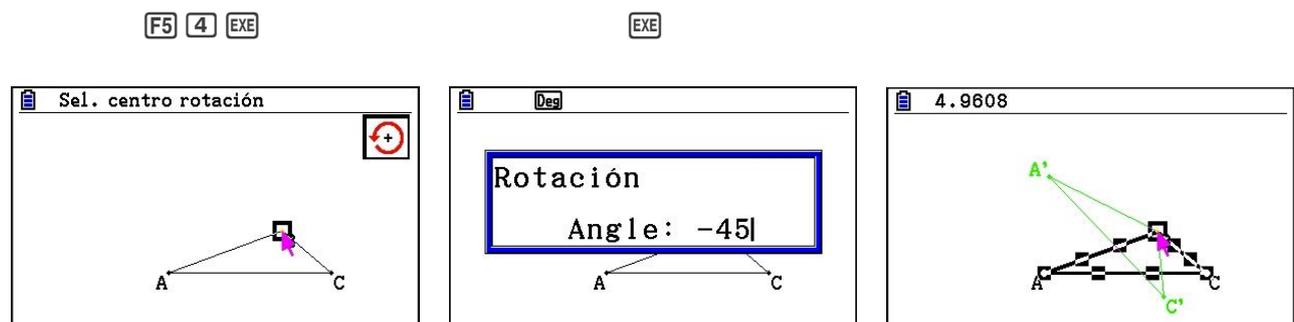


b) Si se elige un vector dibujado previamente, se selecciona cuando la calculadora lo indica en la parte superior de la pantalla:



9.5.3 ROTACIÓN

En esta transformación la calculadora muestra en la parte superior de la pantalla cuando hay que seleccionar el centro de rotación. En este caso se elige el vértice B y se escoge un ángulo de rotación de -45° :

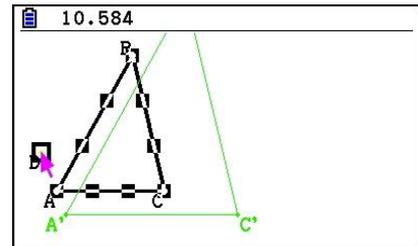
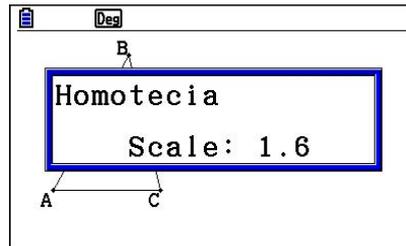
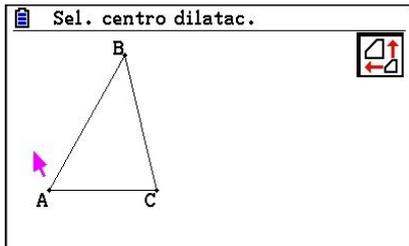


9.5.4 HOMOTECIA

Para dibujar una figura semejante al triángulo, se marca el centro de la homotecia donde se desee pulsando **[EXE]** y se indica la razón de semejanza:

[F5] **[5]**

[EXE]

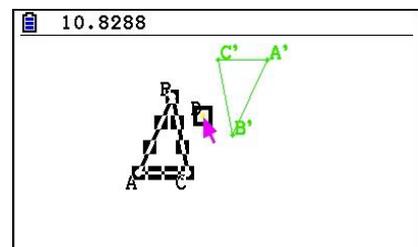
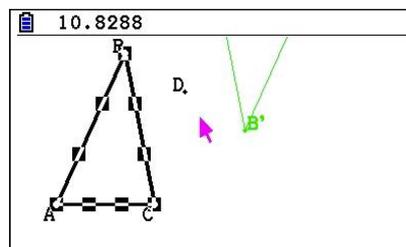
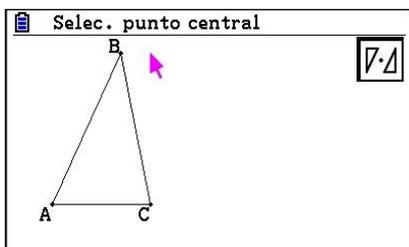


9.5.5 SIMETRÍA

La calculadora realiza una simetría central de la figura dada respecto al punto que se desee:

[F5] **[6]**

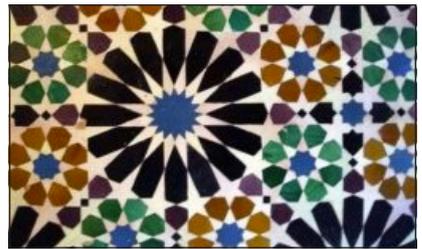
[EXE]



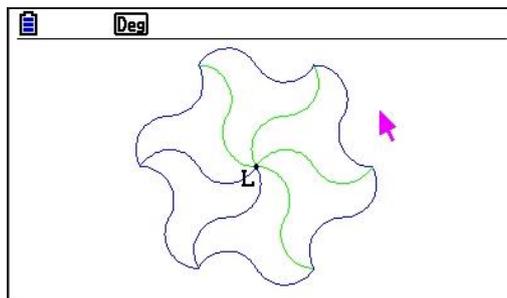


EJEMPLO

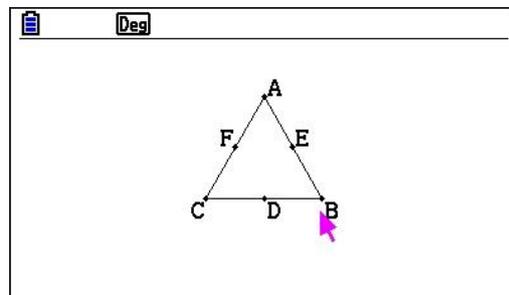
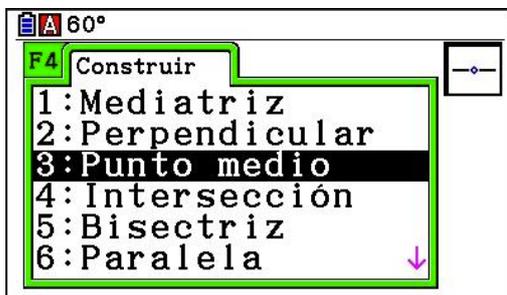
La existencia de patrones en objetos de cerámica, tapices, revestimientos de las paredes o en las aceras, puede servir para estudiar las regularidades y transformaciones geométricas. En la Alhambra de Granada se pueden encontrar muchas teselas como las de las siguientes imágenes:



Con ayuda de la calculadora gráfica, dibuja el siguiente mosaico con la pajarita nazarí:

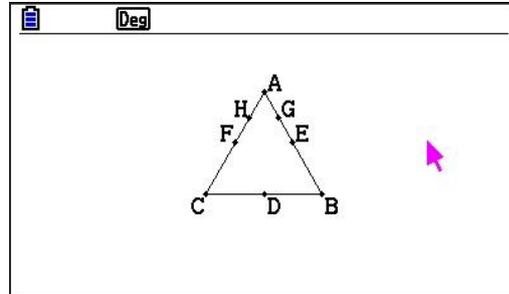
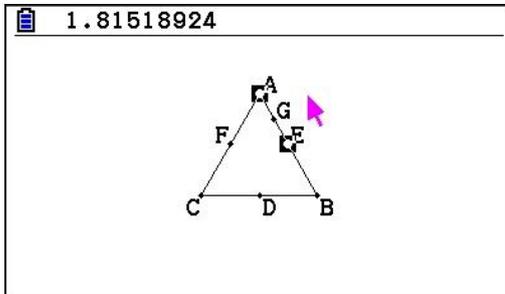


Se dibuja un triángulo equilátero y los puntos medios de cada lado:

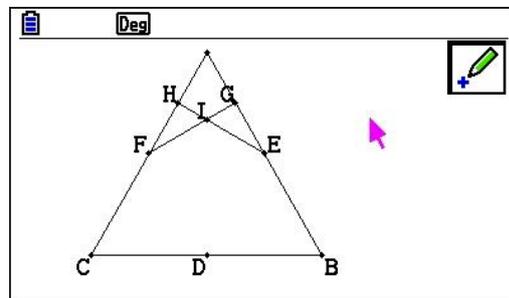
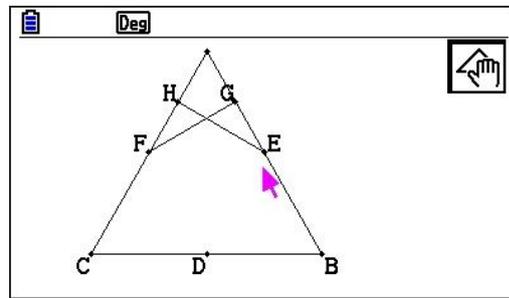


GEOMETRÍA PLANA

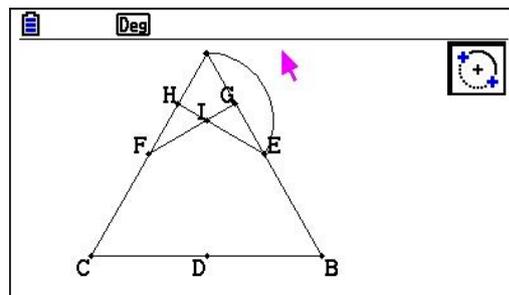
Se marcan los puntos medios de los segmentos \overline{AE} y \overline{AF} , seleccionando sus extremos previamente:



Se dibujan los segmentos \overline{HE} y \overline{GF} y el punto I donde se intersecan:

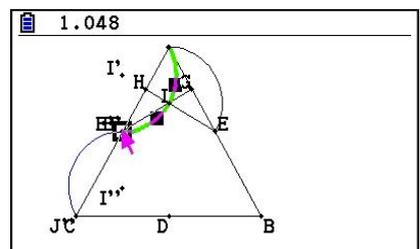
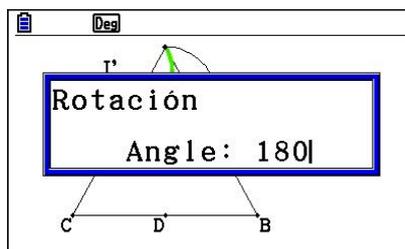
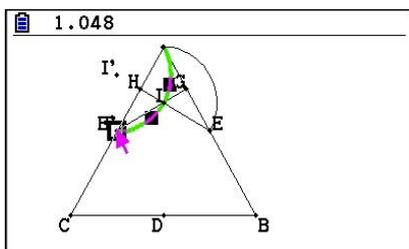
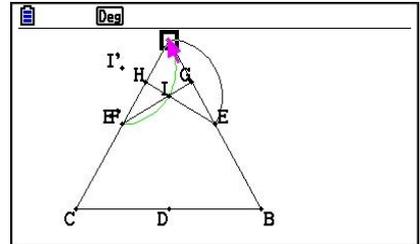
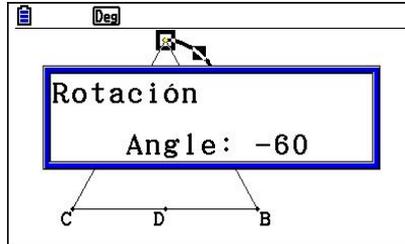
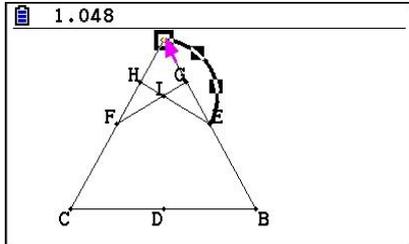


Para dibujar el primer arco de la pajarita ($F3$ 7) se marca el centro de la circunferencia I y los extremos del arco, E y A :

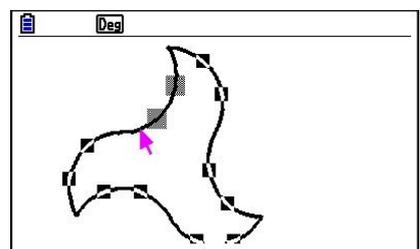
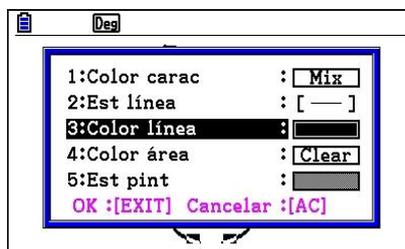
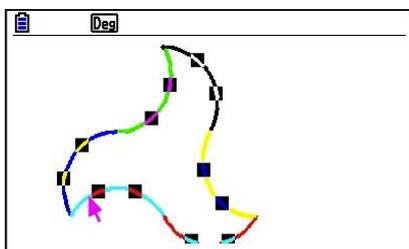
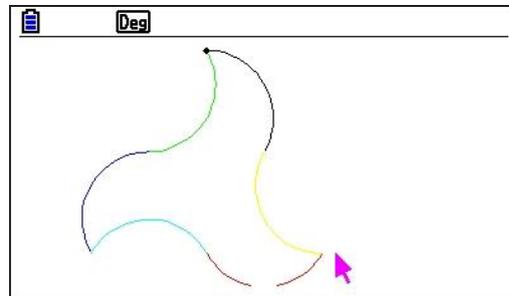


GEOMETRÍA PLANA

Se hacen rotaciones sucesivas de este arco y de los que se van dibujando hasta obtener el dibujo deseado:

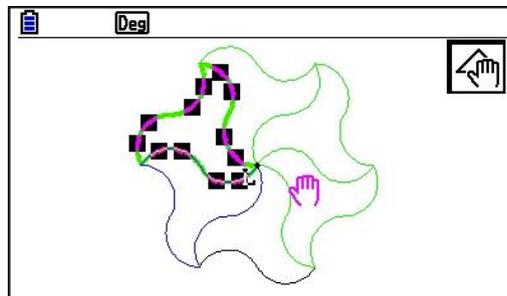
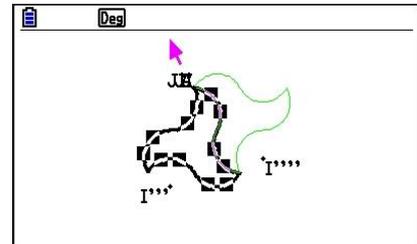
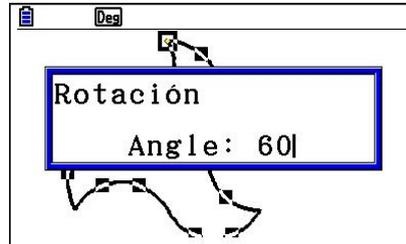


Ocultando todos los objetos (**OPTN** **6**) y cambiando los colores (**SHIFT**, **FORMAT** (**5**)):



GEOMETRÍA PLANA

Para finalizar se hacen rotaciones de la figura seleccionada:



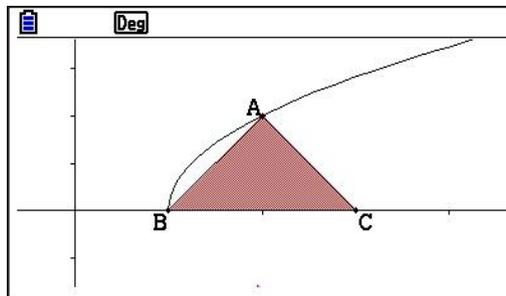
9.6 ANIMACIÓN DE FIGURAS

En este menú se pueden animar las figuras y visualizar lugares geométricos con la opción trazo (F6 3).

EJEMPLO



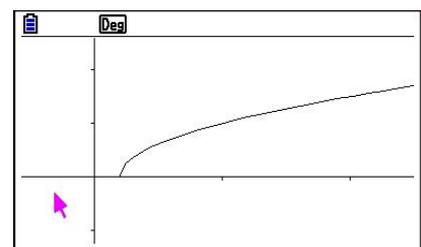
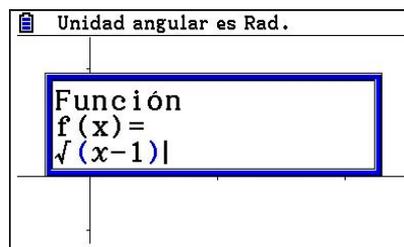
Como se muestra en la imagen, la función $f(x) = \sqrt{x-1}$ corta al eje de abscisas en el punto B . El punto $A \in f(x)$ y C es un punto del eje tal que $\overline{AC} = \overline{AB}$



Si la abscisa del punto A es x , determinar el valor de x para que el área del triángulo ABC sea $27u^2$.

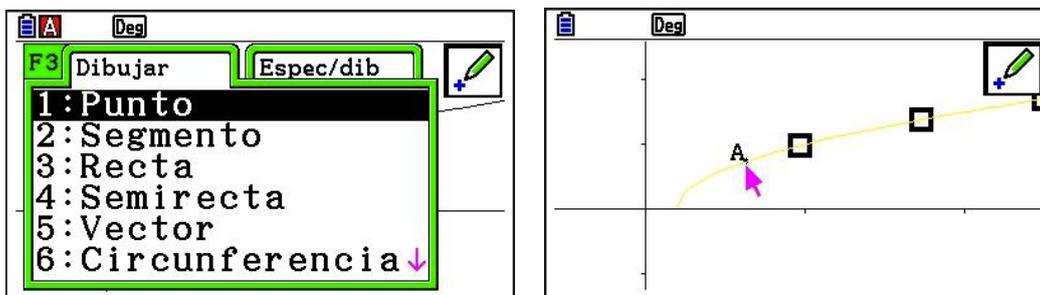
Se dibuja la función $f(x) = \sqrt{x-1}$:

F3 7

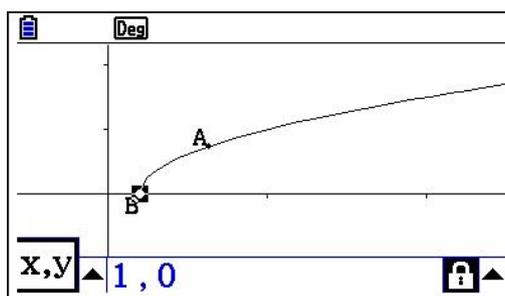


Se dibuja el punto A en $f(x)$:

F3 1

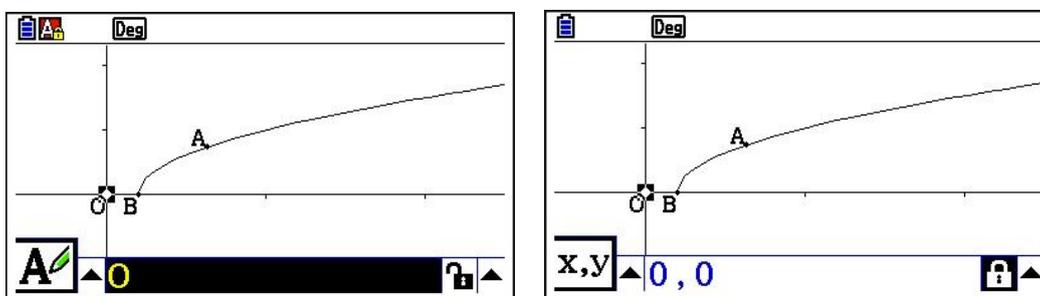


Se dibuja el punto B y se selecciona. Se pulsa **VAR** para escribir sus coordenadas y se coloca el cursor encima del candado pulsando **EXE** para cerrarlo:



Para salir de **VAR** hay que pulsar **EXIT** **EXIT**.

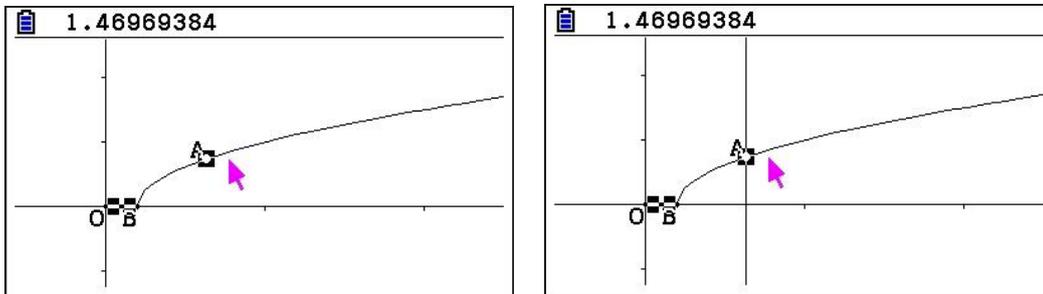
Se dibuja el origen de coordenadas, renombrándolo y asignando las coordenadas $(0,0)$ en **VAR**:



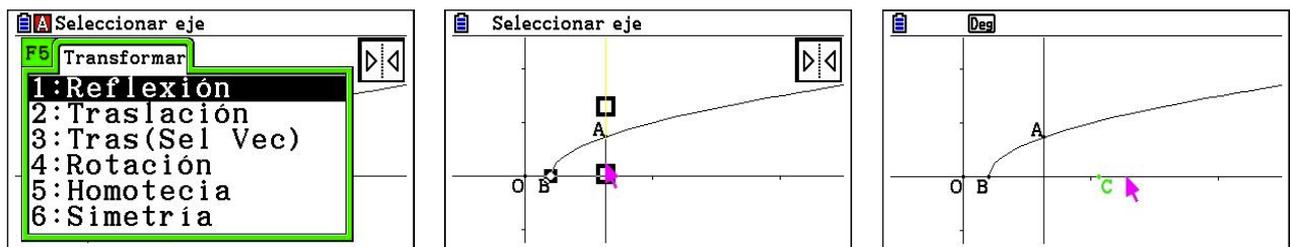
GEOMETRÍA PLANA

Se dibuja el segmento \overline{OB} y se traza una perpendicular a \overline{OB} que pase por A :

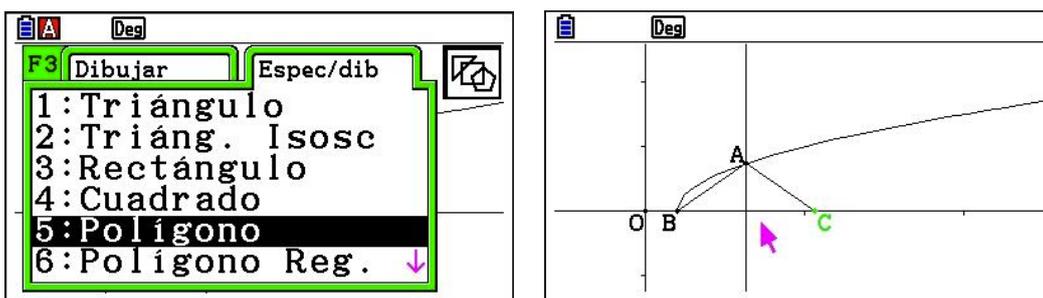
F4 2



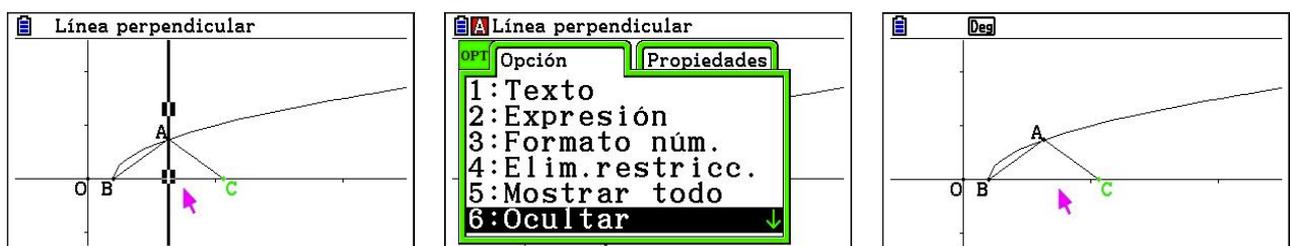
Para dibujar el punto C (simétrico al punto B respecto a la perpendicular trazada) se selecciona el punto B , se escoge la opción **Reflexión** (F5 1) y se señala la recta perpendicular:



Se dibuja el triángulo ABC y se oculta la recta perpendicular:

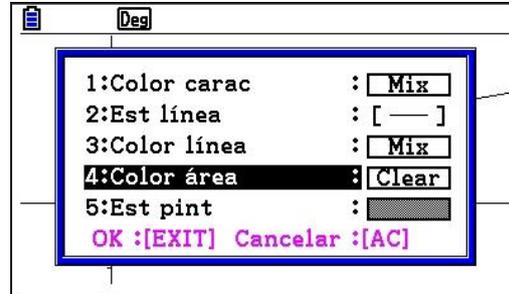
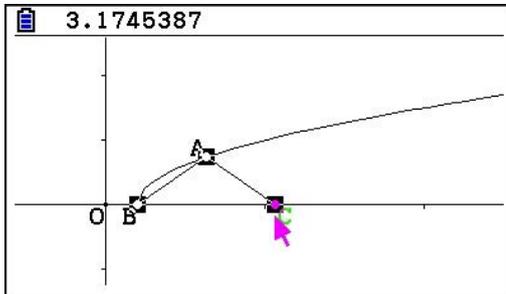


OPTN 6

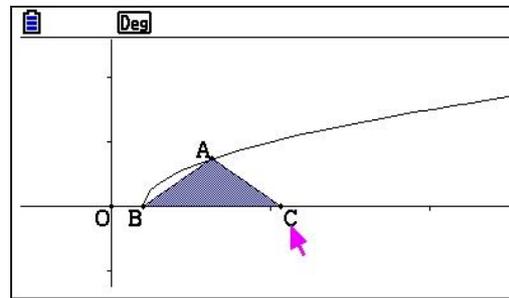


GEOMETRÍA PLANA

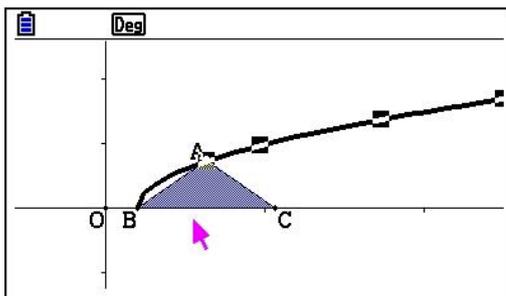
Si se desea colorear el triángulo hay que seleccionar sus vértices, pulsar **FORMAT** (**SHIFT** **5**), y escoger “Color área” (**EXE**):



2 **EXIT**



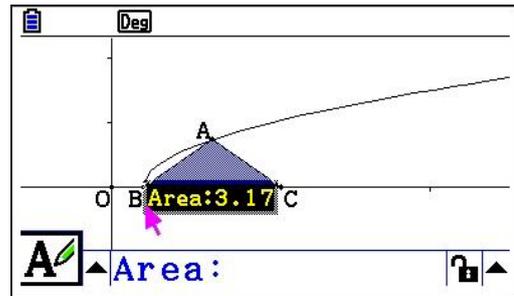
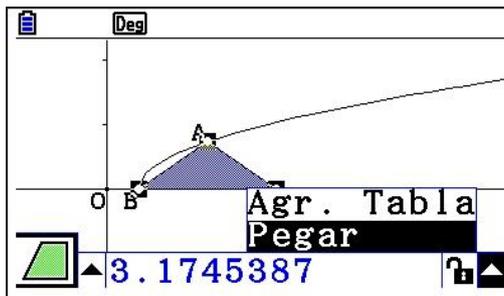
Para añadir una animación se selecciona, antes de pulsar “Agreg.animac” (**F6** **1**), el punto A y la curva $f(x)$:



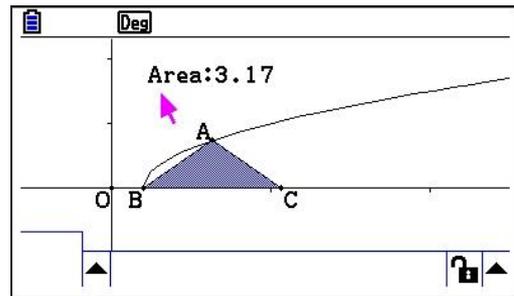
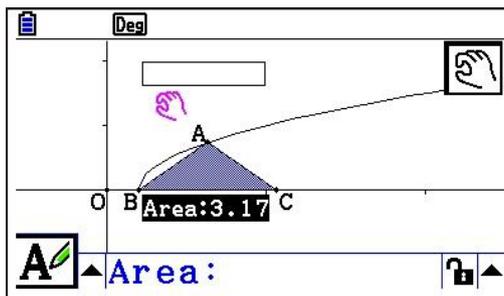


NOTA

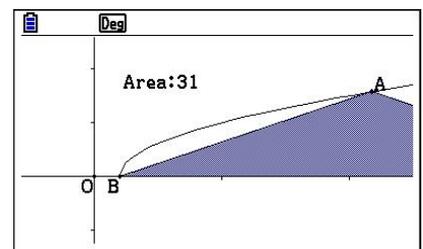
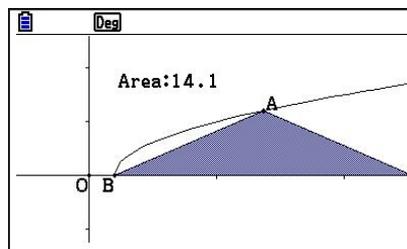
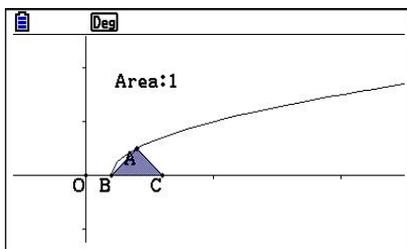
Se puede añadir una etiqueta con el valor del área del triángulo cuando el punto A se desplaza por $f(x)$. Se seleccionan los vértices, se pulsa **[VAR]** y se desplaza el cursor hasta **▲**. Se pulsa **[EXE]** cuando la opción sombreada es “Pegar”:



La etiqueta se puede mover seleccionándola y pulsando **[X,θ,T]**:



Para ejecutar la animación una vez “Ejec. (una vez)” (**[F6]** **[5]**):





NOTA

Edición de la animación (F6 [4])

F6 Animación

- 1: Agreg. animac.
- 2: Sust. animac.
- 3: Trazo
- 4: Editar animac.
- 5: Ejec. (una vez)
- 6: Ejec. (repet.)

Editar animaciones

Veces : 2

Pasos : 20

Animaciones

A

t0	: 0
t1	: 15

Times

Veces:2 - Número de veces que se repite la animación cuando se escoge la opción **"Ejec.(repet)"**.

Pasos:20 - Número de pasos mientras el punto A se desplaza por la curva $f(x)$.

T0:0 - Punto de inicio, en este caso el punto A parte del punto B .

T1:15 - Punto final del movimiento del punto A .

La tabla con los valores de las diferentes áreas se puede visualizar seleccionando los vértices del triángulo y pulsando **"Añadir tabla"** (F6 [7]):

3.1745387

F6 Animación

- 3: Trazo
- 4: Editar animac.
- 5: Ejec. (una vez)
- 6: Ejec. (repet.)
- 7: Añadir Tabla
- 8: Visual. tabla

Area

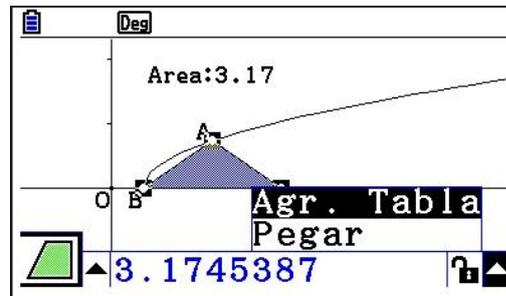
0
0.4405
1.6007
3.1698
5.06
7.2236

DELETE DEL-ALL

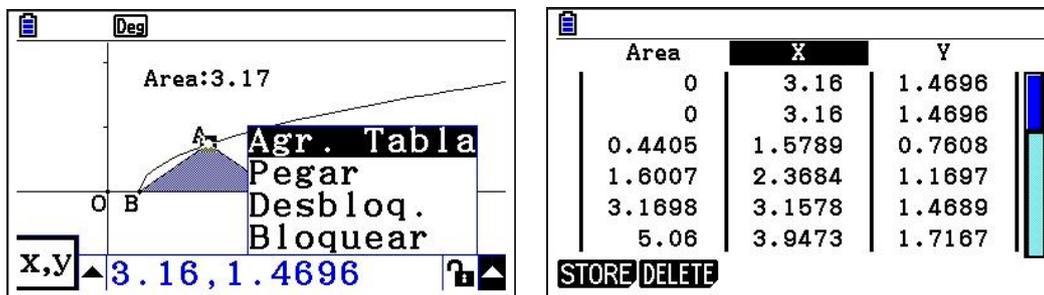


NOTA

La tabla también se puede añadir desde “Agr. Tabla” en $\boxed{\text{VARS}}$:



Para añadir a la tabla las coordenadas del punto A , se selecciona y se elige una de las dos opciones anteriores:



Se observa que el área del triángulo es $27u^2$ cuando $x \in (9, 5, 10, 3)$

Area	X	Y
24.666	9.4736	2.9109
28.192	10.263	3.0435
31.872	11.052	3.1705
35.7	11.842	3.2927
39.669	12.631	3.4105
43.776	13.421	3.5243