PROBABLIDAD

José Aurelio Pina Romero
Ja.pinaromero@edu.gva.es
Departamento de Matemáticas
IES Sant Blas

2. Propiedades y teoremas básicos de probabilidad. Modelos de probabilidad

Tipo	Relación
Dados A, B sucesos cualesquiera, Ω suceso seguro, Φ suceso imposible **AXIOMAS DE KOLMOGOROV**	• $0 \leq p(A) \leq 1$ • $p(\Omega) = 1$ • $p(A \cup B) = p(A)+p(B)$ si $A \cap B = \Phi$
Dados A, B sucesos cualesquiera, Ω suceso seguro, Φ suceso imposible, $\overline{A}$ = suceso complementario de A **PROPIEDADES BASICAS**	• $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ • $p(\Phi) = 0$ • $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ • $p(\overline{A \cup B}) = p(\overline{A} \cap \overline{B})$ $p(\overline{A \cap B}) = p(\overline{A} \cup \overline{B})$

Dados A, B sucesos cualesquiera **PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA**	- $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ $\quad p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ - $p(A/B)=p(A) \quad \Rightarrow$ A y B son independientes - $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B) \quad \Leftrightarrow$ A y B son independientes
PARTICIÓN	- Familia de sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ tal que: $A_i\cap A_j=\Phi \quad \forall i,j$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$
Dada una partición $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, y X otro suceso cualquiera **TEOREMAS BÁSICOS**	- Teorema de la probabilidad total: $p(X)=\sum_{i=1}^{n} p(X/A_i)\,p(A_i)$ - Teorema de Bayes: $p(A_i/X)=\frac{p(X/A_i)\,p(A_i)}{p(X)}$

- ¿Cuál es la probabilidad de que nos toque un Euro millones?

- ¿Cuál es la probabilidad de no encontrarme un atasco en la Autovía cuando voy a clase?

- Todos los días nos hacemos preguntas sobre probabilidad.

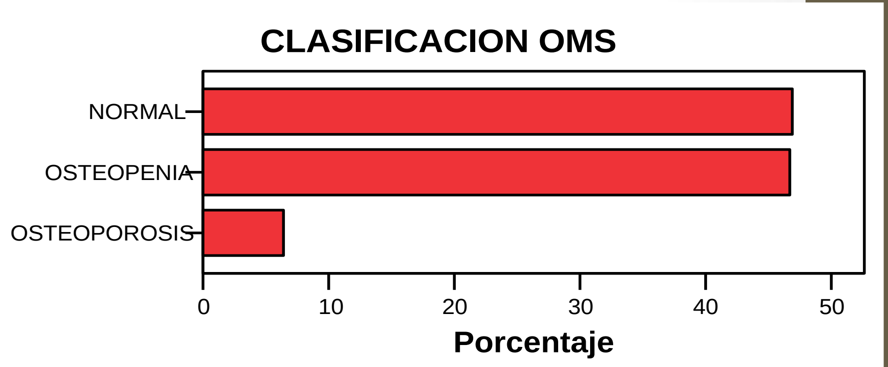
- En este tema vamos a:
  - Recordar qué entendemos por probabilidad.
  - Recordar algunas reglas de cálculo.
  - Ver cómo aparecen las probabilidades en CC. Salud.
  - Aplicarlo a algunos conceptos nuevos de interés en CC. Salud.
    - Pruebas diagnósticas.

Nociones de probabilidad

- Frecuentista (objetiva): Probabilidad de un suceso es la frecuencia relativa (%) de veces que ocurriría el suceso al realizar un experimento repetidas veces. **R. Laplace =CF/CP**

CLASIFICACION OMS

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	NORMAL	469	46,9%
	OSTEOPENIA	467	46,7%
	OSTEOPOROSIS	64	6,4%
	Total	1000	100,0



- La Osteopenia, es un escalón previo a la osteoporosis, el deterioro grave de los

- Subjetiva (bayesiana): Grado de certeza que se posee sobre un suceso. Es personal.

- En ambos tipos de definiciones aparece el concepto de suceso. Vamos a recordar algunas operaciones que se pueden realizar con sucesos.

Nociones de probabilidad

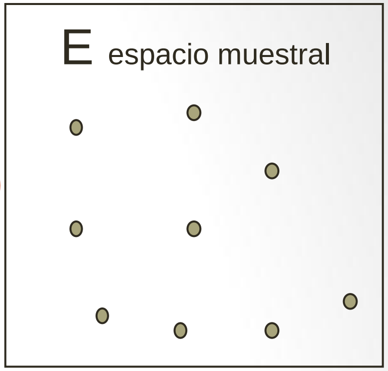
- Variable aleatoria: es el resultado de un proceso aleatorio.
- Ejemplo: Los resultados de lanzar un dado o una moneda.

- Variable determinista: el azar no está involucrado en el proceso.
- Ejemplo: ¿Cuánta energía tiene una masa de 70 kg?

$$E=mc^2=70x(300000000^2)=6,3x10^{20}J$$

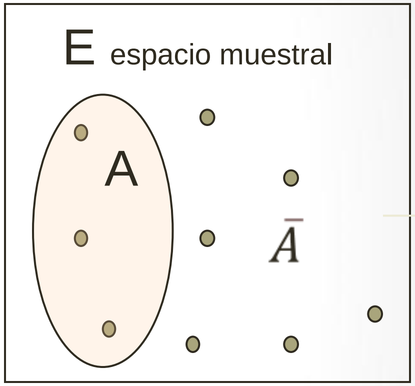
Sucesos

- Cuando se realiza un experimento aleatorio diversos resultados son posibles. El conjunto de todos los resultados posibles se llama espacio muestral (E).



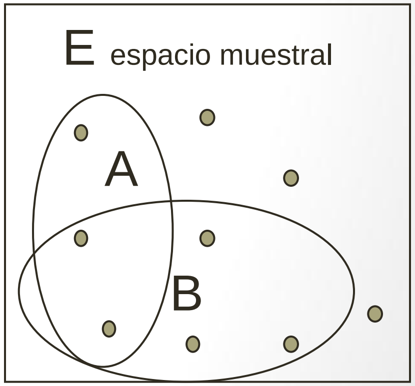
- Se llama suceso a un subconjunto de dichos resultados.

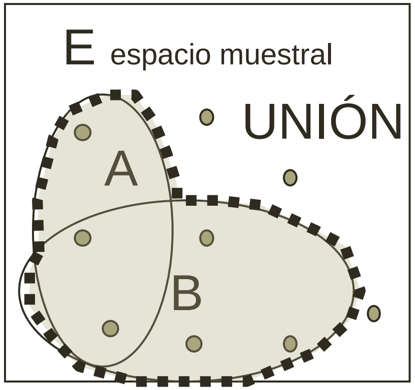
- Se llama suceso contrario (complementario) de un suceso A, $\bar{A}$, al formado por los elementos que no están en A

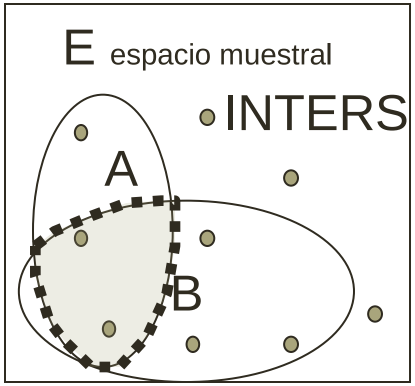


- Se llama suceso unión de A y B, AUB, al formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos.

- Se llama suceso intersección de A y B, A∩B o simplemente AB, al formado por los elementos que están en A y B



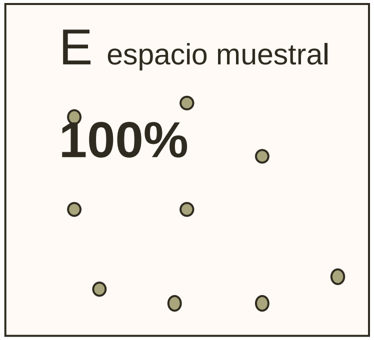




Definición de probabilidad

- Se llama probabilidad a cualquier función, P, que asigna a cada suceso A un valor numérico P(A), verificando las siguientes reglas (axiomas de Kolmogorov)

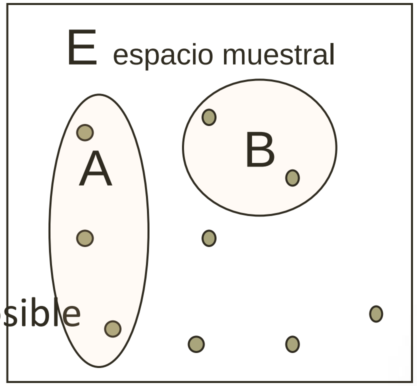
- $P(E)=1$



$P: A \rightarrow [0,1]$

- $0 \leq P(A) \leq 1$

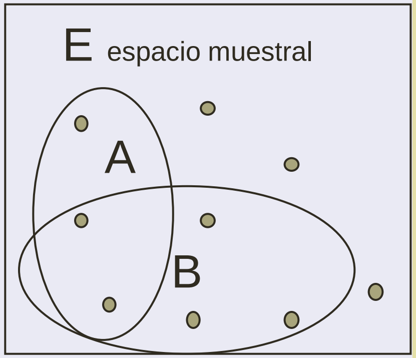
- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ si $A \cap B=\emptyset$
  - $\emptyset$ es el conjunto vacío. Suceso imposible



$A \cap B=\emptyset \rightarrow$ Sucesos incompatibles

Axioma es una propuesta que no deriva de ningún otro enunciado. A partir de su aceptación, si se considera razonable, se deriva propiedades, teoremas u otros resultados.

EJEMPLOS



P(A)=?

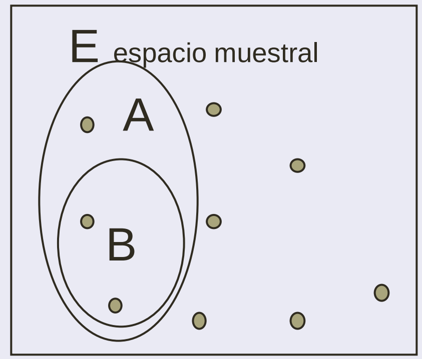
P(B)=?

P(AUB)=?

$P(A \cap B)$=?

$P(\bar{A})$=?

$P(\bar{B})$=?



P(A)=?

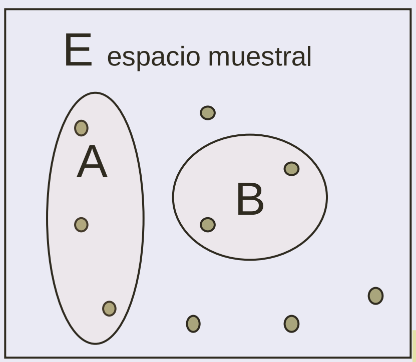
P(B)=?

P(AUB)=?

$P(A \cap B)$=?

$P(\bar{A})$=?

$P(\bar{B})$=?



P(A)=?

P(B)=?

P(AUB)=?

P(A∩B)=?

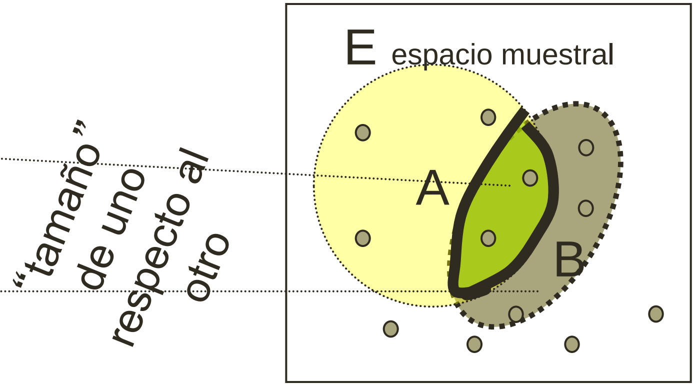
$P(\bar{A})$=?

$P(\bar{B})$=?

Probabilidad condicionada

- Se llama probabilidad de A condicionada a B, o probabilidad de A sabiendo que pasa B:

$$P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



- Error frecuentíiiiiiisimo:
  - No confundáis probabilidad condicionada con intersección.
  - En ambos medimos efectivamente la intersección, pero…
    - En P(A∩B) con respecto a P(E)=1
    - En P(A|B) con respecto a P(B)

Algunas reglas de cálculo prácticas

- Cualquier problema de probabilidad puede resolverse en teoría mediante aplicación de los axiomas. Sin embargo, es más cómodo conocer algunas reglas de cálculo:

  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Cuando AB no son incompatibles
  - $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$

    $= P(B)\, P(A|B)$

    - Prob. de que pasen A y B es la prob. de A y que también pase B sabiendo que pasó A.

Independencia de sucesos

- Dos sucesos son independientes si el que ocurra uno, no añade información sobre el otro.

  - A es independiente de B

    $\Leftrightarrow$ P(A|B) = P(A)   P(B|A)=P(B)

    $\Leftrightarrow$ P(A∩B) = P(A)*P(B)

Ejemplo (I)

Recuento

		MENOPAUSIA		
		NO	SI	Total
CLASIFICACION OMS	NORMAL	189	280	469
	OSTEOPENIA	108	359	467
	OSTEOPOROSIS	6	58	64
Total		303	697	1000

- Se ha repetido en 1000 ocasiones el experimento de elegir a una mujer de una población muy grande. El resultado está en la tabla.
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer tenga osteoporosis?
    - P(Osteoporosis)=64/1000=0,064
      - Noción frecuentista de probabilidad

Ejemplo (II)

Recuento

		MENOPAUSIA		Total
		NO	SI	
CLASIFICACION OMS	NORMAL	189	280	469
	OSTEOPENIA	108	359	467
	OSTEOPOROSIS	6	58	64
Total		303	697	1000

- ¿Probabilidad de tener osteopenia u osteoporosis?
  - P(Osteopenia∪Osteoporosis)=467/1000+64/1000=0,531
    - Son sucesos disjuntos
    - Osteopenia ∩ Osteoporosis=Ø
- ¿Probabilidad de tener osteoporosis o menopausia?
  - P(Osteoporosis∪Menopausia)=64/1000+697/1000-58/1000=0,703
    - No son sucesos disjuntos
- ¿Probabilidad de una mujer normal? (entiéndase…)
  - P(Normal)=469/1000=0,469
  - P(Normal)=1-P($\overline{\text{Normal}}$)=1-P(Osteopenia∪Osteoporosis) =1-0,531=0,469

Ejemplo (III)

Recuento

		MENOPAUSIA		
		NO	SI	Total
CLASIFICACION OMS	NORMAL	189	280	469
	OSTEOPENIA	108	359	467
	OSTEOPOROSIS	6	58	64
Total		303	697	1000

- Si es menopáusica... ¿probabilidad de osteoporosis?
  - P(Osteoporosis|Menopausia)=58/697=0,098

- ¿Probabilidad de menopausia y osteoporosis?
  - P(Menop ∩ Osteoporosis) = 58/1000=0,058

    - Otra forma:

$$P(Menop \cap Osteoporosis) = P(Menop) \times P(Osteoporosis \mid Menop) =$$

$$= \frac{\cancel{697}}{1000} \times \frac{58}{\cancel{697}} = 58/1000 = 0{,}058$$

Ejemplo (IV)

Recuento

		MENOPAUSIA		
		NO	SI	Total
CLASIFICACION OMS	NORMAL	189	280	469
	OSTEOPENIA	108	359	467
	OSTEOPOROSIS	6	58	64
Total		303	697	1000

- ¿Son independientes menopausia y osteoporosis?
  - Una forma de hacerlo
    - P(Osteoporosis)=64/1000=0,064
    - P(Osteoporosis|Menopausia)=58/697=0,098
      - La probabilidad de tener osteoporosis es mayor si ha pasado la menopausia. Añade información extra. **¡No son independientes!**

  - ¿Otra forma?
    - P(Menop ∩ Osteoporosis) = 58/1000 = 0,058
    - P(Menop) P(Osteoporosis)= (697/1000) x (64/1000) = 0,045
      - La probabilidad de la intersección no es el producto de probabilidades. **No son independientes.**

Ejemplo (IV)

Recuento

		MENOPAUSIA		
		NO	SI	Total
CLASIFICACION OMS	NORMAL	189	280	469
	OSTEOPENIA	108	359	467
	OSTEOPOROSIS	6	58	64
Total		303	697	1000

- ¿Son independientes osteopenia y osteoporosis?
  - Una forma de hacerlo
    - P(Osteopenia)=108/1000=
    - P(Osteoporosis|Osteopenia)=64/1000

      - Osteopenia no influye en la Osteoporosis
      - La probabilidad de tener osteopenia no influye es mayor si ha pasado la menopausia. Añade información extra. **¡Son independientes!**
  - ¿Otra forma?
    - P(Menop ∩ Osteoporosis) = 58/1000 = 0,058
    - P(Menop) P(Osteoporosis)= (697/1000) x (64/1000) = 0,045
      - La probabilidad de la intersección no es el producto de probabilidades. **No son independientes.**

Leyes de Morgan

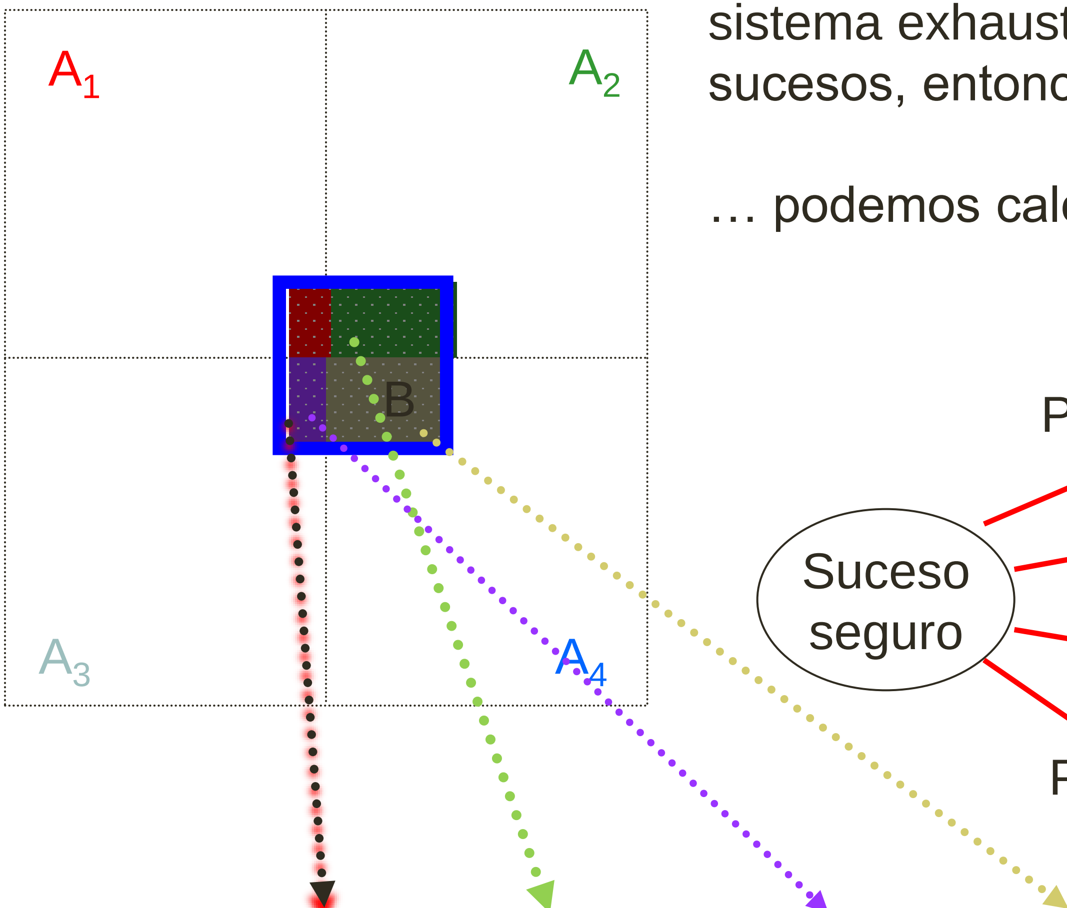
$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right)$$
$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$$

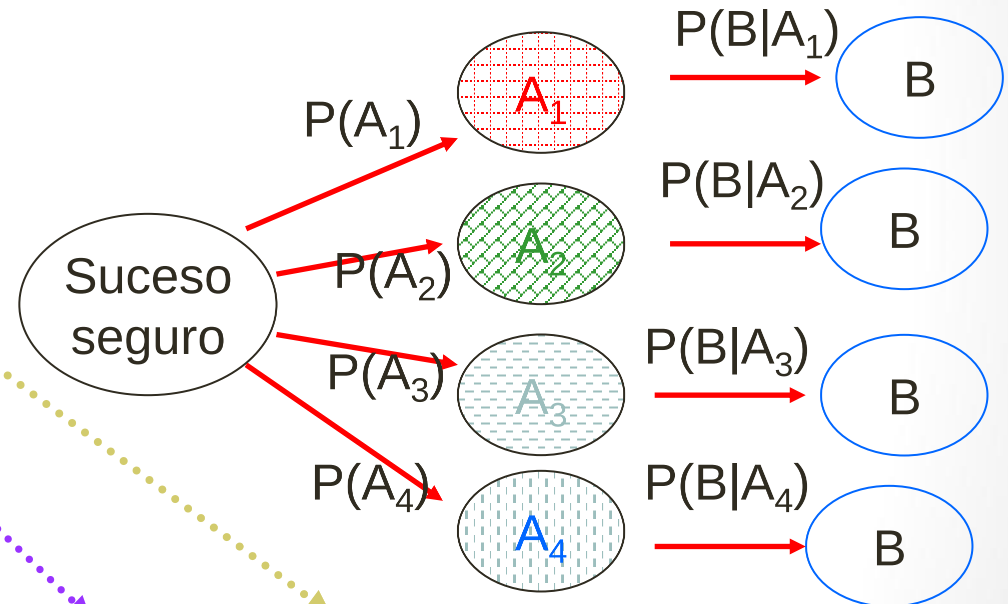
https://www.geogebra.org/m/t7s4dhhj

Teorema de la probabilidad total

Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.





$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(A_4 \cap B)$

$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \ldots = P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

Ejemplo (I): En esta aula el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los hombres, son fumadores el 20%. (Falta diagrama Venn)

- ¿Qué porcentaje de fumadores hay?
- ¿Calcula la probabilidad de ser Mujer fumadora?
- ¿calcula la probabilidad de ser Hombre y no fumador?
- ¿calcula la probabilidad de ser Hombre y fumador?

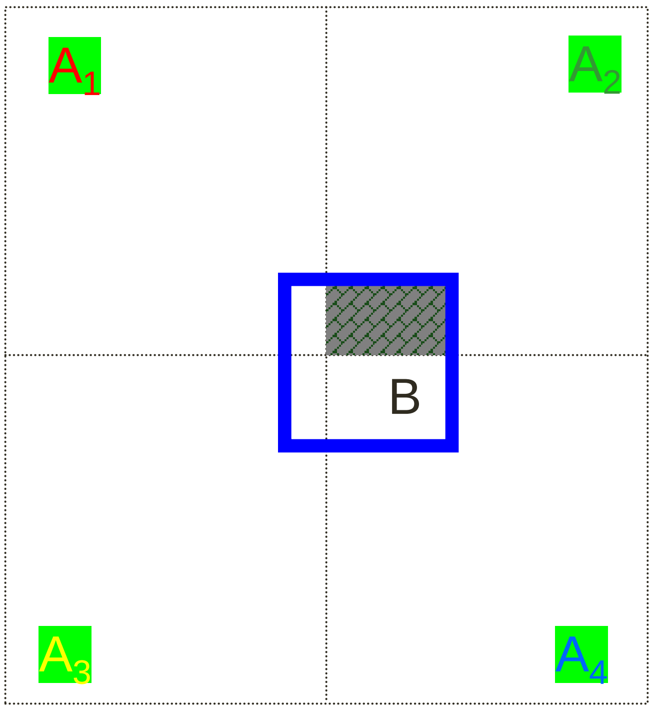
Ejemplo (II):

El 20% del tiempo que se está en una casa transcurre en la cocina, el 10% en el baño y el resto entre el salón y el dormitorio. Por otro lado, la probabilidad de tener un accidente doméstico estando en la cocina es de 0,30 de tenerlo estando en el baño es de 0,20 y de tenerlo fuera de ambos de 0,10. ¿Cuál es la probabilidad de tener un accidente doméstico?

Ejemplo (III):

En un centro hay dos quirófanos. El 1º se usa el 75% de veces para operar. En el 1º la frec. de infección es del 5% y en el 2º del 10%.

Teorema de Bayes



…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada A_i.

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

donde P(B) se puede calcular usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + P(A_3\cap B) + P(A_4\cap B)$$

$$=P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)+ \ldots=$$

Ejemplo (IV): En este aula el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los hombres, son fumadores el 20%.

Se elije a un individuo al azar y es… fumador ¿Probabilidad de que sea un hombre?

Ejemplo (V):

En un centro hay dos quirófanos. El 1º se usa el 75% de veces para operar. En el 1º la frec. de infección es del 5% y en el 2º del 10%.

- ¿Qué probabilidad de infección hay? P(I) = 0,0625
- Se ha producido una infección.

¿Qué probabilidad hay de que sea en el Q1?

Ejemplo (VI):

El 20% del tiempo que se está en una casa transcurre en la cocina, el 10% en el baño y el resto entre el salón y el dormitorio. Por otro lado la probabilidad de tener un Accidente doméstico estando en la cocina es de 0,30 de tenerlo estando en el baño es de 0,20 y de tenerlo fuera de ambos de 0,10. Se ha producido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la cocina?

$P(A) = 0,15$ (ya calculado)

Ejemplo (VII):

En cierto hospital se ha estimado que el 10% de los pacientes que ingresan adquieren cierto tipo de infección hospitalaria. De entre los pacientes que sufren ese tipo de infección hospitalaria se observa que el 8% habían sido intervenidos quirúrgicamente, mientras que de los que no sufren la infección, solo el 1% había sido intervenido.

Es ingresado un paciente, tras ser intervenido quirúrgicamente, ¿cual es la probabilidad de que contraiga la infección?

PAU 2023

Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. *(5 puntos)*

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. *(5 puntos)*

PAU 2023

Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. *(3 puntos)*

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. *(7 puntos)*

PAU 2023

Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? *(5 puntos)*

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? *(5 puntos)*

PAU 2023

Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. *(4 puntos)*

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. *(6 puntos)*

PAU 2024

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0,6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? *(3 puntos)*
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? *(3 puntos)*

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. *(4 puntos)*

PAU 2024

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10,25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? *(4 puntos)*

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? *(3 puntos)*

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? *(3 puntos)*

GALICIA - 2025

Algunas pruebas médicas resultan ser «positivas» o «negativas». Si la prueba fuese infalible, «positiva» indicaría que la persona examinada tiene la enfermedad en cuestión; «negativa» indicaría que no la tiene. Una guionista está escribiendo, para una conocida plataforma de *streaming*, una historia que tiene lugar en un país imaginario. Explica en su guion que, para detectar una rara enfermedad que afecta a 1 de cada 10000 personas, una empresa farmacéutica logra desarrollar una prueba que resulta ser muy fiable, pues solamente 1 de cada 100 personas libres de la enfermedad obtiene un resultado positivo, y solamente 2 de cada 100 personas que padecen la enfermedad obtienen resultados negativos. Dice también que los detalles que revelan el diseño de la prueba están protegidos por varios sistemas de seguridad, y que, el 9 de agosto de 2024, la clave que permite abrir el último de esos sistemas es el número 219, el cual se ha calculado, específicamente para ese día, de la siguiente manera:

$\text{clave}=\text{n.º de ríos cuya longitud en metros comienza con el dígito 9, de entre los 2000 más largos del país}=219.$

Poco antes de entregar su guion, le surgen dudas acerca de la verosimilitud de sus cifras, conque decide compartirlas con una amiga matemática. Esta le dice que le responderá una vez que calcule las siguientes probabilidades:

$P1$= la probabilidad de que una persona con una prueba positiva tenga la enfermedad.

$P2$= la probabilidad de que una persona con una prueba negativa tenga la enfermedad.

$P3=$ la probabilidad de que 219 ríos o más tengan una longitud en metros cuyo primer dígito sea el 9.

Con relación a este punto, la amiga matemática observa que, en muchos conjuntos de datos reales, los primeros dígitos no se distribuyen de manera uniforme, sino que siguen la llamada ley de Benford, la cual afirma que la probabilidad de que un número comience con el dígito d es $p=\log 10(1+1/d)$. Por ello, supondrá que la probabilidad de que un río tenga una longitud en m cuyo primer dígito sea el 9 es $p=0.0458$.

GALICIA - 2025

a) Calcule P_1 y P_2. Entienda que los únicos resultados posibles de la prueba son «positivo» o «negativo».

b) Calcule P_3.

c) En función de los valores de P_1, P_2 y P_3, dé al menos un motivo por el cual la guionista debería modificar alguna de sus cifras. No es necesario que diga cuáles deberían ser esas modificaciones ni cómo deberían ser efectuadas.