# EXAMEN DE SELECTIVIDAD JUNIO 2025. MATEMÁTICAS II

## PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

**1.1** **(0.25 puntos)** Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

**Sucesos:**

M = clientes que piden pizza margarita con una P(M) = 0.40

V= clientes que piden pizza vegetariana con una P(V) = 0.25

P = clientes que piden pizza Margarita con una P(P) = 0.35

P(P) = 0.35

**1.2** **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

AA = dos clientes al azar hayan pedido distintos tipos de pizza

**1 forma**

$$P(AA) = P(M \cap V) + P(V \cap M) + P(M \cap P) + P(P \cap M) + P(V \cap P) + P(P \cap V) =$$
$$= 2 \cdot 0.40 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.40 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.35 = 0.655$$

**2 forma**

$$P(\overline{AA}) = P(MM) + P(VV) + P(PP) = 0.40 \cdot 0.40 + 0.20 \cdot 0.20 + 0.35 \cdot 0.35 = 0.345$$

$$P(AA) = 1 - P(\overline{AA}) = 1 - 0.345 = 0.655$$

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

**1.3** **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

X = número de clientes que piden una pizza margarita

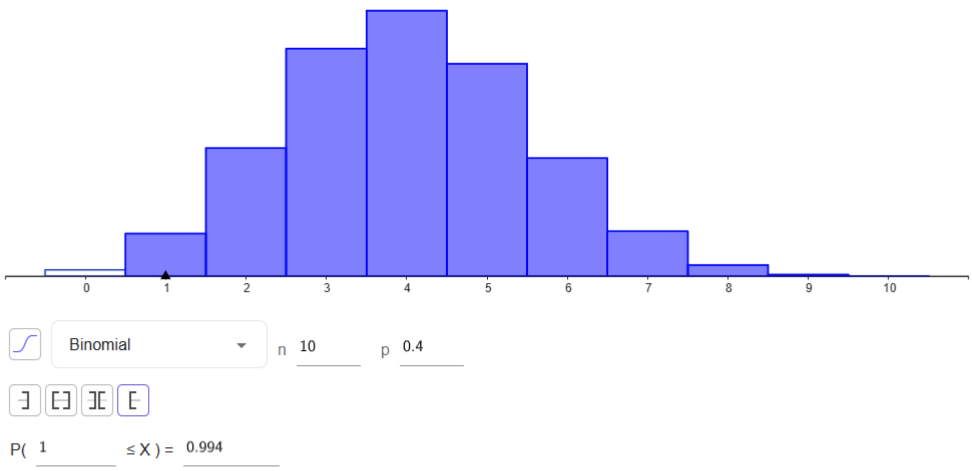
p = 4/10 = 0.40

$X =$ B(n=10,p=0.40)

$P(X = k) \ = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ \rightarrow P(X = 4) \ = \binom{10}{4} 0.4^4 \cdot (1-0.4)^{10-4} = 0.2508$ =0.2508

**1.4** **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

$$P(X \geq 1) \ = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot (1-0.4)^{10-0} = 1 - 00605$$
$$= 0.99395$$




https://www.geogebra.org/m/cjhsydmb

**PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real $\alpha$ y es:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores $\alpha$ que permitan funcionar a este proceso.

$$A^2=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{0}\cdot(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}}\end{pmatrix}$$

$$Si\ A^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{0}+\mathbf{0}\cdot(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}) & \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\rightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}=\mathbf{0}\rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

$$(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\rightarrow\mathbf{1}-\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}\rightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\rightarrow\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{1}\end{matrix}$$

$$\alpha^2 = \alpha \rightarrow \alpha^2-\alpha = 0 \rightarrow \begin{matrix}\alpha=0\\ \alpha=1\end{matrix}$$

Y puesto que para que $A^2 = A$ los valores de $\alpha$ deben de ser iguales en la totalidad de las ecuaciones.

Solución: para que A sea idempotente $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

**Nota:** En GeoGebra se puede introducir una matriz con parámetro, pero se debe de utilizar x como parámetro.

Dos formas distintas

| | |
|---|---|
| A={{1,x,0},{0,x,0},{0,0,1-x}} | Mediante la hoja de cálculo.<br>1) Los elementos se introducen en las celdas.<br>2) se seleccionan los elementos y se pulsa botón derecho de ratón → Crear matriz |

https://www.geogebra.org/m/fcehuurm

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de $A$. Obtener los valores de $\alpha$ para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de $\alpha$.

$$\exists\ A^{-1}\ si\ |A| \neq 0$$

Vamos a calcular el determinante de la matriz A en función de $\alpha$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} = (\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{0}\cdot\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} + \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{0}) - (\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{0} + \mathbf{0}\cdot\mathbf{0}\cdot\mathbf{1} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\alpha}) =$$

$$= \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} \end{matrix}$$

$$\exists\ A^{-1}\ cuando\ \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{1}$$

Ahora vamos a calcular la inversa de A en función de $\alpha$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A)^t)$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & \mathbf{0} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 0 \\ \boldsymbol{\alpha} & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & \boldsymbol{\alpha} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\alpha} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\alpha} & -\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\alpha} & 0 \\ 0 & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A)^t) = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}}\cdot\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\alpha}^2+\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\alpha} & 0 \\ 0 & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1-\alpha) \end{pmatrix}$$

Una forma de comprobar con la calculadora o con GeoGebra que $Adj(A)^t$ es despejar de la igualdad.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A)^t) \rightarrow A^{-1}\cdot|A| = Adj(A)^t$$

**https://www.geogebra.org/m/fcehuurm**

**Nota:** GeoGebra dispone de un manual donde se pueden consultar los comandos disponibles por áreas. https://geogebra.github.io/docs/manual/es/

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$

donde a es un parámetro real. Se pide:

**2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a.**

Para discutir el sistema debemos de emplear el T. Rouché-Frobenius, para ello debemos de estudiar el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A *= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & \vdots\, 0 \\ 2 & a & -5 & \vdots -3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rg(A) debemos calcular el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9a + 27 = 0 \to a = -3$$

**<u>Caso 1:</u> (a≠ -3)**

Si a≠ -3 → rg(A) = 3 = rg(A*) = número de incógnitas → SCD.

**Nota:** el rg(A*) = 3 puesto que A’ es una matriz 3x4 y su rango es 3 cómo máximo, y puesto que una de las matrices de la ampliada es A entonces su rango coincide con esta.

**<u>Caso 2:</u> (m= -3)**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; A *= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & \vdots\, 0 \\ 2 & -3 & -5 & \vdots -3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \end{pmatrix}$$

Puesto que $|A| = 0 \to rg(A) = 2$ (puesto que existe una matrix 2x2 con determinante distinto de 0)

$|3| = 3 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq 0$

Ahora estudiamos el determinante de A*

$$A* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & \vdots 0 \\ 2 & -3 & -5 & \vdots -3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si existe una matriz 3x3 cuyo determinante es diferente de cero.

$$|A1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad |A2| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ |A3| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Y, por tanto: rg(A) = 2 rg(A') = 2 < número de incógnitas → SCI

**<u>Conclusión:</u>**

Si a≠-3 → rg(A) = 3 = rg(A') = número de incógnitas → SCD.

Si a=-3 rg(A) = 2 rg(A') = 2 < número de incógnitas → SCI

**2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.**

Sustituimos a por -3, y resolvemos por Gauss o por Cramer:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & \vdots 0 \\ 2 & -3 & -5 & \vdots -3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots 3 \end{pmatrix} F1 \overset{\rightarrow}{\leftrightarrow} F3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 2 & -3 & -5 & \vdots -3 \\ 3 & -2 & -3 & \vdots 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F2 - 2F1 \\ F3 - 3F1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \end{pmatrix} F3 - F2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos como $z = \lambda$, y sustituimos en el sistema:

$$-5y - 9z = -9 \rightarrow -5y - 9 \cdot \lambda = -9 \rightarrow y = \frac{9 - 9\lambda}{5}$$

$$x + y + 2z = 3 \rightarrow x + \frac{9 - 9\lambda}{5} + 2\lambda = 3 \rightarrow x = \frac{6 - \lambda}{5}$$

**Solución**: $(x, y, z) = \left(\frac{6-\lambda}{5}, \frac{9-9\lambda}{5}, \lambda\right) \ \lambda \in R$

**2.2.3 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema para *a* = 0.**

Sustituimos a por -3, y resolvemos por Gauss o por Cramer:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x \quad\; - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & \vdots\, 0 \\ 2 & 0 & -5 & \vdots -3 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \end{pmatrix} \underset{F1 \leftrightarrow F3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \\ 2 & 0 & -5 & \vdots -3 \\ 3 & -2 & -3 & \vdots\, 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F2 - 2F1 \\ F3 - 3F1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \\ 0 & -2 & -9 & \vdots -9 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \\ 0 & -2 & -9 & \vdots -9 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \end{pmatrix}_{2F3 \,-\, 5F2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots\, 3 \\ 0 & -5 & -9 & \vdots -9 \\ 0 & 0 & 27 & \vdots 27 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2y - 9z = -9 \\ 27z = 27 \end{cases}$$

$$z = 1 \rightarrow -2y - 9 = -9 \rightarrow -2y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x + y + 2z = 3 \rightarrow x + 0 + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

**Solución**: $(x, y, z) = (1,0,1)$

**https://www.geogebra.org/m/jtyxxy4x**

P3.1 Dada la recta $r:\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$ y la recta $s:\begin{cases} x = -1 \\ x+2y+z = 0 \end{cases}$

Calcular:

3.1.1 **(1 punto)** Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

1) Primero vamos a pasar la recta s a forma paramétrica

$$s:\begin{cases} x = -1 \\ x+2y+z = 0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{1-\alpha}{2} \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in R \rightarrow \begin{array}{c} P_s = (-1,1/2,0) \\ \overrightarrow{d_s} = (0,-1/2,1) \approx (0,-1,2) \end{array}$$

$$r:\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}, \lambda \in R \rightarrow\rightarrow \begin{array}{c} P_r = (1,0,2) \\ \overrightarrow{d_r} = (2,1,-1) \end{array}$$

2 ) Ahora vamos a estudiar la posición relativa de las rectas.

Primero vamos a crear un vector determinado por los puntos de las rectas s y r.

$$\overrightarrow{P_sP_r} = P_r - P_s = (1,0,2) - (-1,1/2,0) = (2,-1/2,2)$$

Ahora construimos las matrices M y M*:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, M^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y estudiamos sus rangos:

$|2| = 2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0+2 = 2 \neq 0$

Por tanto, el rg(M) = 2

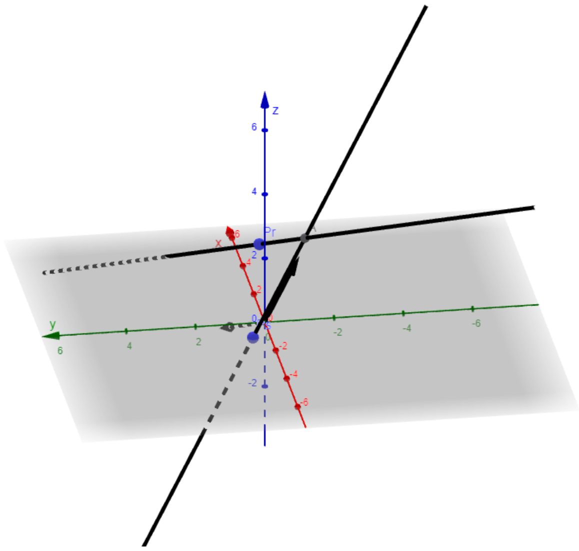
Ahora estudiamos el rango de M*

$|M*| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Como $rg(M) = 2\, rg(M*) = 2 \rightarrow r\ y\ s\ se\ cortan.$

3) Ahora hallamos el punto de corte de las rectas igualando

$$-1 = 1+2\lambda \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow PC = (x,y,z) = (-1,-1,3)$$



3.1.2 **(1 punto)** La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

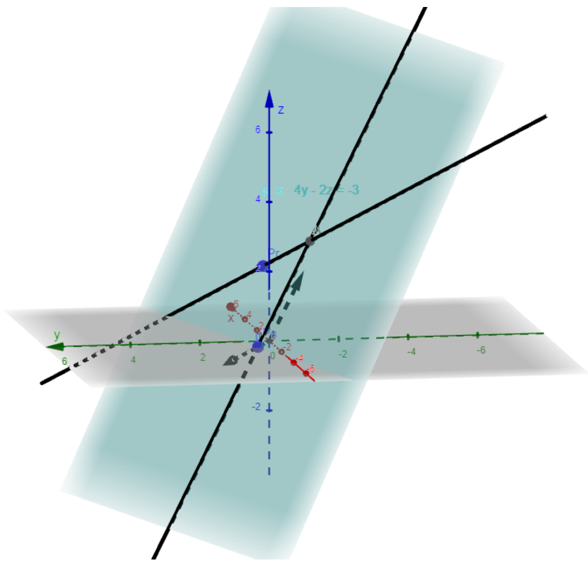
Para construir un plano necesitamos tres puntos o 1 punto y dos vectores directores:

$\overrightarrow{d_s} = (0,-1/2,1) \approx (0,-1,2)$

$\overrightarrow{d_r} = (2,1,-1)$

$P_r = (1,0,2)$

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = -\alpha + \beta \quad \alpha,\beta \in R \\ z = 2 + 2\alpha - \beta \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y & -1 & 1 \\ z-2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$$



3.1.3 **(0.5 puntos)** La distancia del punto P = (1,0,2) a dicho plano.

$$d(P,\pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2}} = 0 \rightarrow P \in \pi$$

https://www.geogebra.org/m/aqxmasy9

3.2 Se considera el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1,0,1)$. Se pide:

3.2.1 **(1 punto)** La ecuación del plano perpendicular a p que pasa por $P\ y\ \ Q\ =\ (2,1,2)$.

Para construir un plano necesito dos vectores directores y punto, o tres puntos:

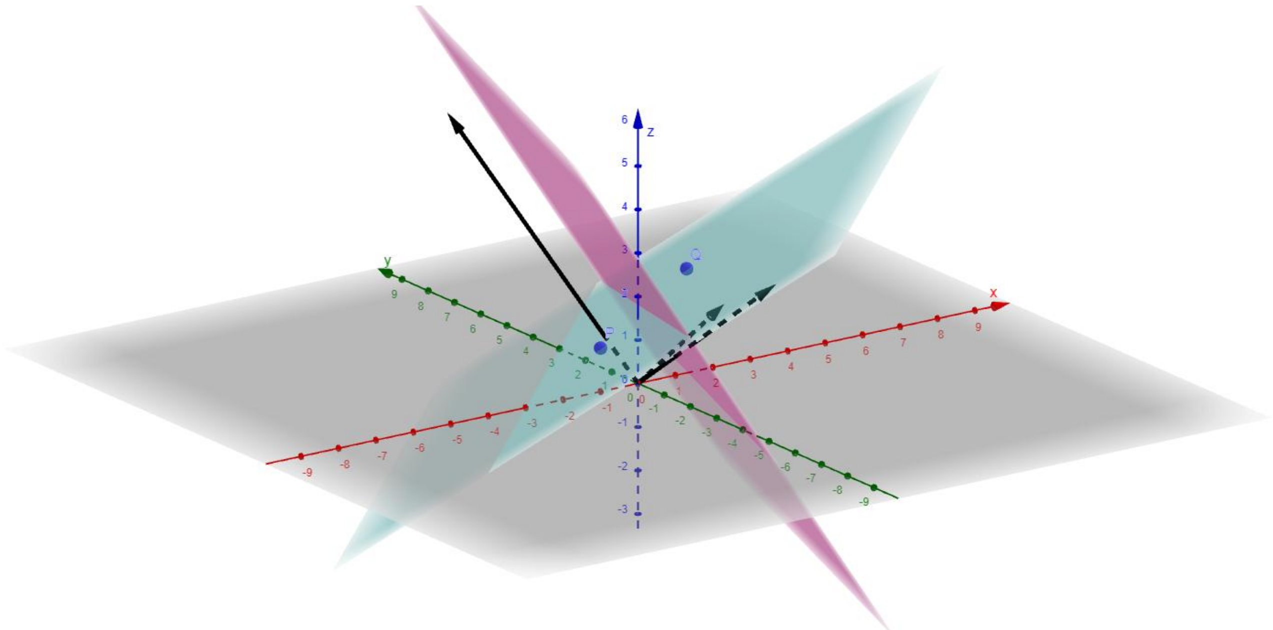
$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_{\sigma 2}} = (3,-1,2)$

$\overrightarrow{d_{\sigma 1}} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,2) - (-1,0,1) = (3,1,1)$

$P = (-1,0,1)$

La ecuación del plano viene dada por:

$$\sigma: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha + 3\beta \\ y = -\alpha + \beta \\ z = 1 + 2\alpha + \beta \end{cases} \alpha, \beta \in R \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 3 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \sigma: -3x + 3y + 6z - 9 = 0$$




3.2.2 **(0.5 puntos)** La distancia del punto Q al plano $\pi$.

$$d(P,\pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14} u$$

3.2.3 **(1 punto)** El punto simétrico de P respecto del plano $\pi$.

1) Primero construimos la recta r, perpendicular a $\pi$ que pasa por P

$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{d_r} = (3,-1,2)$

$P = (-1,0,1)$

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = -\alpha \quad \alpha \in R \\ z = 1 + 2\alpha \end{cases}$$

2) Hallamos el punto de corte de r en el plano $\pi$, para ello sustituimos las coordenadas de la recta en el plano.

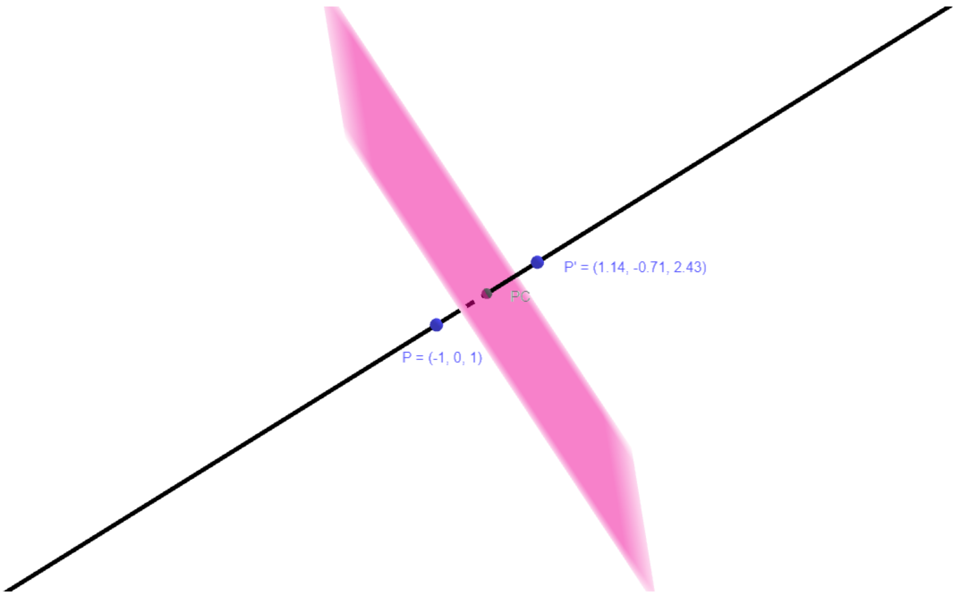
$$\pi: 3x - y + 2z = 4 \rightarrow 3 \cdot (-1 + 3\alpha) - (-\alpha) + 2 \cdot (1 + 2\alpha) = 4 \rightarrow \alpha = 5/14$$

$$\begin{cases} x = -1 + 3 \cdot 5/14 = 1/14 \\ y = -5/14 = -5/14 \\ z = 1 + 2 \cdot 5/14 = 24/14 \end{cases} \rightarrow PC = (1/14, -5/14, 24/14)$$

3) Y sabemos por definición que PC es el punto medio de PP', donde P' es punto simétrico de P respecto del plano $\pi$

$$PM_{\mathrm{PP'}} = PC \rightarrow \frac{(-1,0,1) + (x_0, y_0, z_0)}{2} = (1/14, -5/14, 24/14)$$

$$P' = (x_0, y_0, z_0) = (16/14, -5/14, 34/14) = (8/7, -5/7, 17/7)$$




https://www.geogebra.org/m/ngaqhtv6

**4.1** Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 $cm^3$ de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por $cm^2$. La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

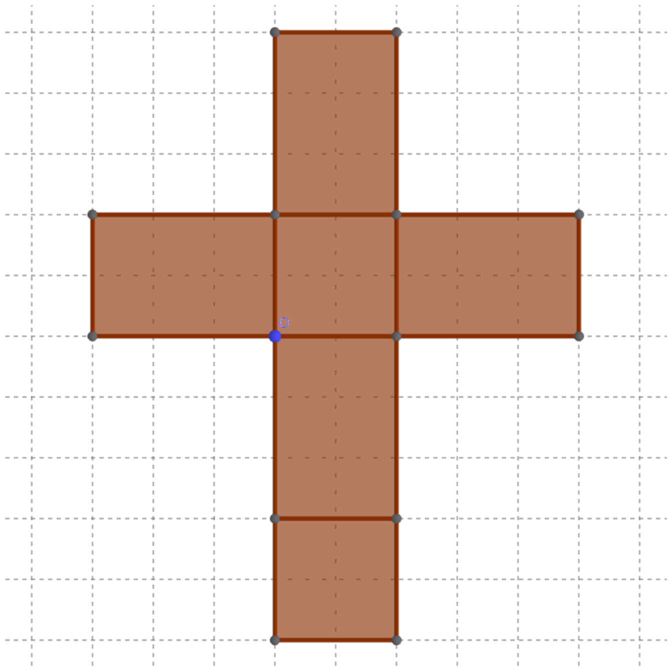
4.1.1 **(0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base $x$.

Sabemos que $V_{caja} = 80 \rightarrow A_{base} \cdot altura = 80 \rightarrow x^2 \cdot y = 80 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

$x = medida\ del\ lado\ de\ las\ bases$

$y = medida\ de\ la\ altura\ de\ la\ caja$

Puesto que el posible desarrollo de la caja es el siguiente, hallamos $P(x)$



$$P(x) = 1{,}25 \cdot 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y = 2{,}5x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{80}{x^2} = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x}$$

4.1.2 **(1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función *P(x)* tenga el menor valor posible.

Se trata de minimizar $\mathrm{P(x)}$

$$P(x) = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x}$$

$$P'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \rightarrow 5x^3 - 320 = 0 \rightarrow x^3 = 320/5 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

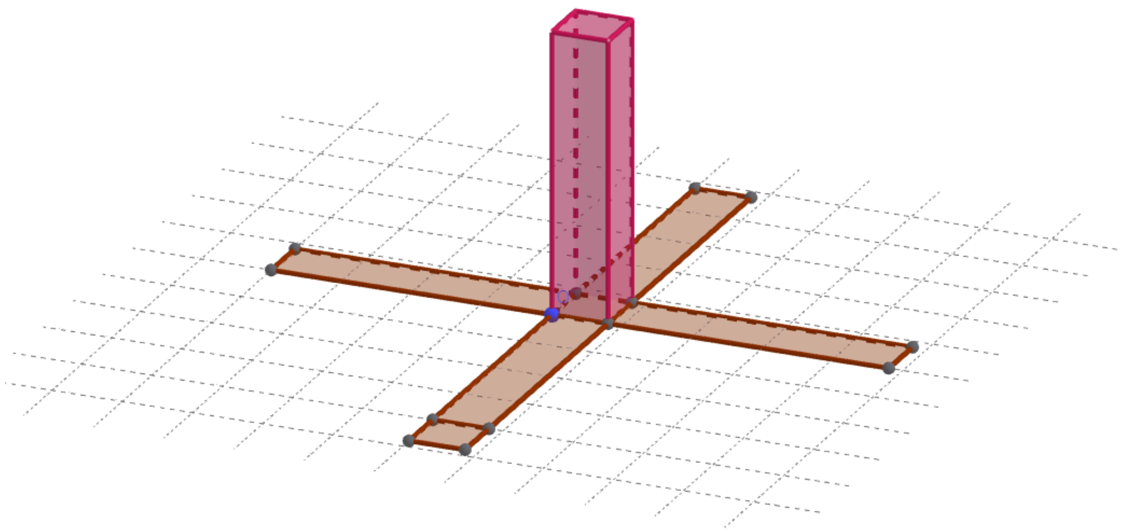
| | **0** | 4 | ∞ |
|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | - | + | |
| $P\ (x)$ | ↘ | ↗ | |
| | | mínimo | |

$(\mathbf{0,4})\ P'(1) = \ \mathbf{-315 < 0 \rightarrow \mathit{P(x)}\ \mathit{decrece}}$

$(\mathbf{4}, +\infty)\ P'(5) = 61/5\ > 0 \rightarrow \mathbf{\mathit{P(x)}\ \mathit{crece}}$

En x=4 hay un mínimo, y por tano las dimensiones de la caja son:

$x = 4, y = 320/4^2 = 20$



4.1.3 **(0.75 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

$$P(x) = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x} = 2{,}5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 120\ ct\ € \ = 1{,}20\ €$$

https://www.geogebra.org/m/rrexhqne

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x-2|$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas x = – 1 y x = 5.

1) Vamos a transformar la función con valor absoluto en una función definida a trozos:

Sabemos que: $f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x), & si\ g(x) > 0 \\ -g(x), & si\ g(x) \leq 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (x-2), & si\ x > 2 \\ x \cdot (-x+2), & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & si\ x > 2 \\ -x^2 + 2x, & si\ x \leq 2 \end{cases}$$

2) Ahora representamos la función resultante

$(-1,2) \rightarrow h(x) = -x^2 + 2x$

a) Hallamos el vértice

$$V_{x,y} = \left(\frac{-b}{2a}, g(-b/2a)\right) = (1,1)$$

b) Tabla de valores

| x | $-x^2 + 2x$ |
|---|---|
| -1 | -3 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

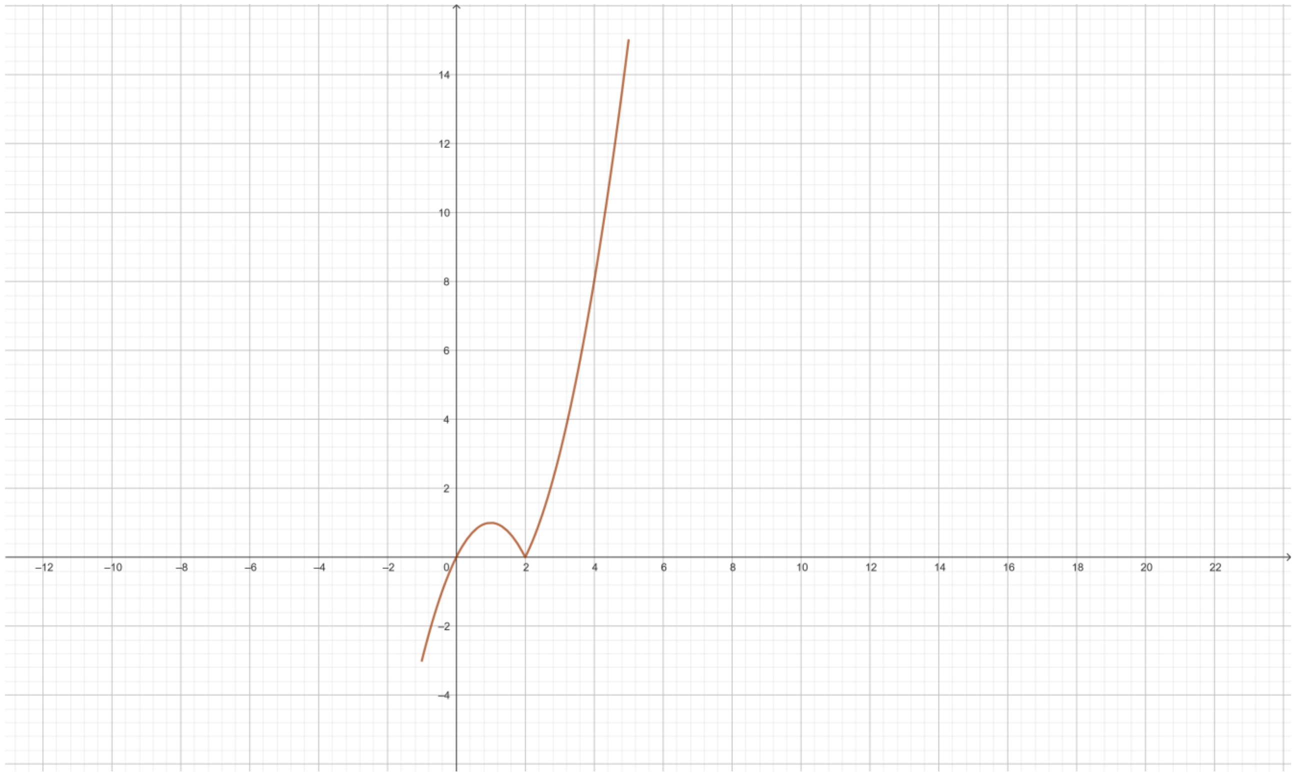
$(2,5) \rightarrow h(x) = x^2 - 2x$

a) Hallamos el vértice

$$V_{x,y} = \left(\frac{-b}{2a}, h(-b/2a)\right) = (1, -11)$$

b) Tabla de valores

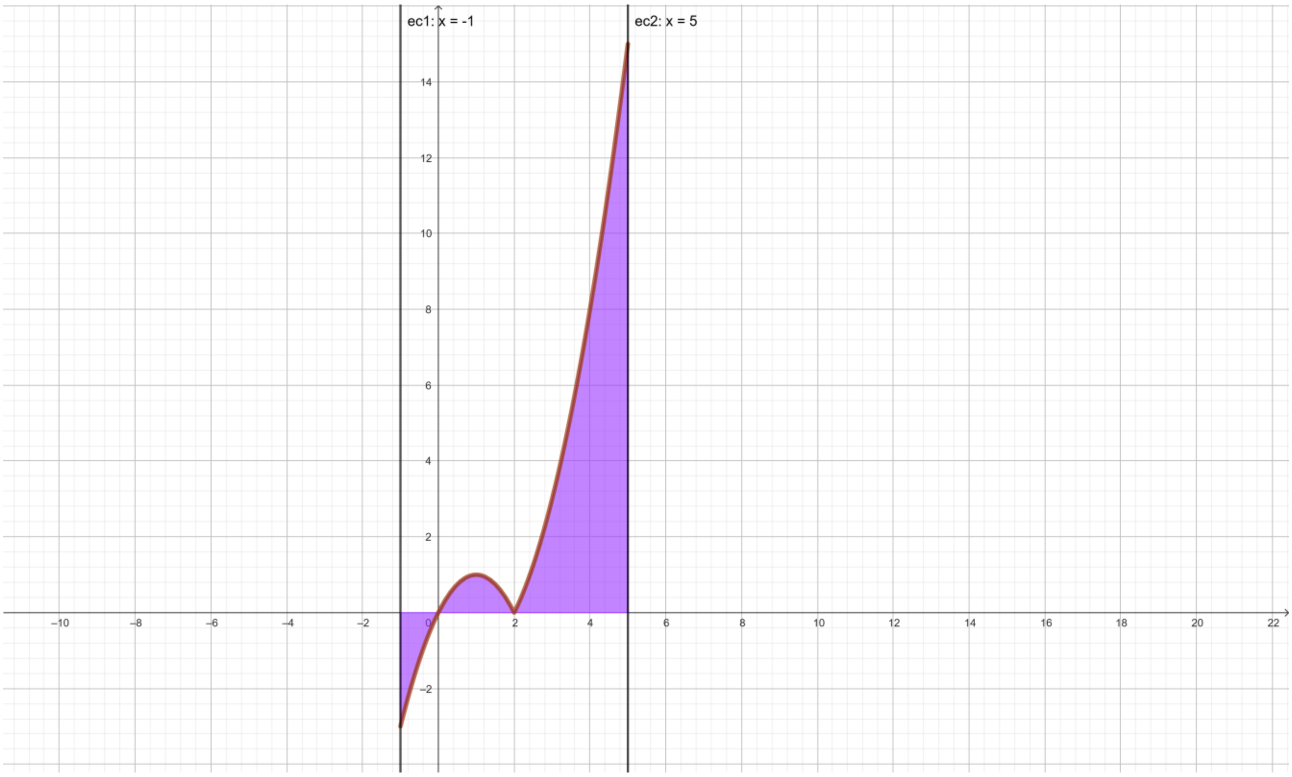
| x | $x^2 - 2x$ |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 3 |
| 4 | 8 |
| 5 | 15 |



4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

Se trata de una integral definida:

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \left|\int_{-1}^{0} -x^2 + 2x\, dx\right| + \int_{0}^{2} -x^2 + 2x\, dx + \int_{2}^{5} x^2 - 2x\, dx = 62/3\ u^2$$




https://www.geogebra.org/m/u2qqpzxr