PAU 2025 (MCSS)

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo?

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo?

x = número de días que ha de funcionar la planta A

y = número de días que ha de funcionar la planta B

	P1	P2	P3	Coste
A	1	2	1	60000€/día
B	1	1	5	75000€/día
	≥6	≥8	≥10	

$B(x, y) = 60000x + 75000y$

$s.a \quad x + y \geq 6 \ (1)$

$2x + y \geq 8 \ (2)$

$x + 5y \geq 10 \ (3)$

$x, y \geq 0$

<u>Representamos las restricciones:</u>

$x + y \geq 6 \ (1)$

$x + y = 6$

x	y
0	6
6	0

(0,0)→ $0 + 0 \geq 6 \rightarrow 0 \geq 6 \ (NO)$

Representamos las restricciones:

$2x + y \geq 8$ (2)

$2x + y = 8$

x	y
0	8
4	0

$(0,0) \rightarrow 2 * 0 + 0 \geq 8 \rightarrow 0 \geq 8\ (NO)$

Representamos las restricciones:

$x + 5y \geq 10$ (3)

$x + 5y = 10$

x	y
0	2
10	0

$(0,0) \rightarrow 0 + 5 * 0 \geq 10 \rightarrow 0 \geq 10\ (NO)$

Representamos las restricciones. Y nos queda la siguiente región NO acotada

Hallamos los vértices de la región NO ACOTADA, y son:

H = (0,8)

C = (2,4)

F = (5,1)

I = (10,0)

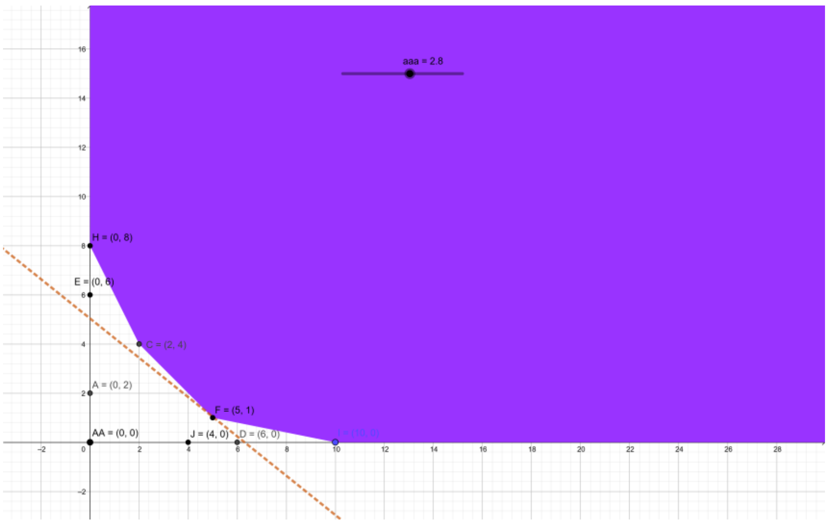
Ahora nos queda hallar la cantidad de cada tipo de caja para que los beneficios sean máximos

H= (0,8)	$B(x,y) = 60000 \cdot 0 + 75000 \cdot 8 = 600\,0000$
C = (2,4)	$B(x,y) = 60000 \cdot 2 + 75000 \cdot 4 = 420\,0000$
F = (5,1)	$\mathbf{B(x,y) = 60000 \cdot 5 + 75000 \cdot 1 = 375\,0000}$
I = (10,0)	$B(x,y) = 60000 \cdot 10 + 75000 \cdot 0 = 600\,0000$

El mínimo se alcanza en F=(5,1)

Así pues, la planta A debe funcionar 5 días y la planta B 1 día para que la producción sea mínima.

El coste de producción será de 375 000 €



https://www.geogebra.org/classic/qsdash8g

Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula **cuántos espectadores** han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

$x = \textit{número de espectadores que han pagado } 9 \textit{ euros}$

$y = \textit{número de espectadores que han } 20\% \textit{ de } 9 \textit{ euros, es decir } 1{,}80€$

$z = \textit{número de espectadores que han } 50\% \textit{ de } 9 \textit{ euros, es decir } 4{,}50\ €$

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2115 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2115 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 90 & 18 & 45 & 21150 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 90 & 18 & 45 & 21150 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F2 - 90F1 \\ F3 + 2F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -72 & -45 & -23850 \\ 0 & 3 & 2 & 1000 \end{pmatrix}$$

$$24F3 + F2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -72 & -45 & -23850 \\ 0 & 0 & 3 & 150 \end{pmatrix}$$

Y nos queda

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ -72y - 45z = -23850 \rightarrow \mathbf{z = \frac{-150}{-3} = 50} \\ 3z = 150 \end{cases}$$

$$-72y - 45 \cdot 50 = -23850$$

$$-72y - 2250 = -23850$$

$$-72y = -23850 + 2250 \ \rightarrow \mathbf{y = 300}$$

$$\mathbf{x = 500 - y - z = 500 - 300 - 50 = 150}$$

Solución:

x = 150

y = 300

z = 50

https://www.geogebra.org/classic/hm4apyzs

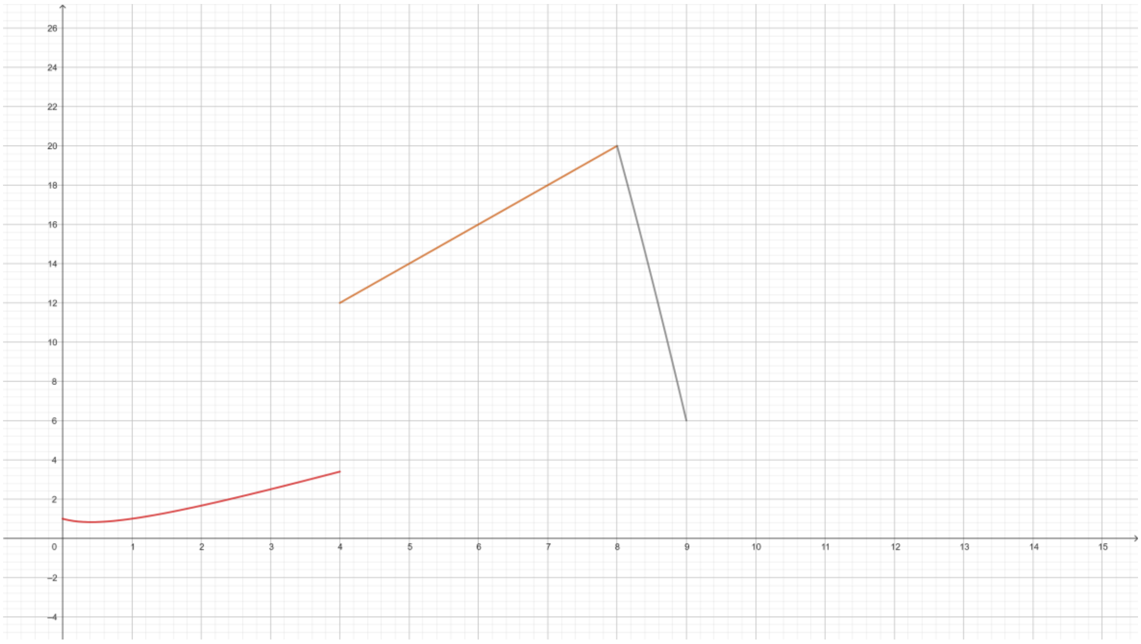
Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{1+x}, & si\ 0\le x<4\\ 2x+4, & si\ 4\le x<8\\ 3x+60-x^2, & si\ 8\le x\le 9\end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo [0,9].

Lo primero que debemos hacer es representar esta función definida a trozos.



Se observa que es continua en $[0,9]$ excepto en x=4. Ahora lo vamos a comprobar de manera analítica.

$[0,4)$

1) Estudiamos el problema de continuidad del denominador

$$1+x=0\to x=-1\to\ Como\ -1\notin[0,4)\ \to f(x)\ continua\ [0,4)$$

2) Ahora estudiamos la continuidad en los puntos de cambio de forma, en x=4 y en x=8.

x=4

1) $\exists f(4)?\to f(4)=2\cdot 4+4=12$
2) $\exists \lim_{x\to 4} f(x)\to\begin{cases}\lim_{x\to 4^+} 2x+4=12\\ \lim_{x\to 4^-}\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{1+16}{1+4}=\frac{17}{5}\end{cases}\to\nexists \lim_{x\to 4} f(x)$
3) Por lo tanto, en x=4 $f(x)$ no es continua y existe una discontinuidad de salto finito.

x=8

1) $\exists f(8)? \rightarrow f(4) = 2 \cdot 8 + 4 = 20$
2) $\exists \lim_{x\to 8} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 8^+} 3x + 60 - x^2 = 20 \\ \lim_{x\to 8^-} \mathbf{2x+4} = 20 \end{cases} \rightarrow \exists \lim_{x\to 8} f(x) = 20$
3) Por lo tanto, en x=8 $f(x)$ es continua

Solución: f(x) es continua en [0,9) – {4} y en x=4 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo [0,9].

Vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento por tramos.

(0,4)

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1+x^2}{1+x}}$$

$$\boldsymbol{Dom\ g(x) = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{2x(1+x) - (1+x^2)1}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2} = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1+\sqrt{2} \\ x_2 = -1-\sqrt{2} \notin (0,4) \end{matrix}}$$

	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-1+\sqrt{2}}$ 4
g'(x)	-	+
g(x)	↘	↗

$$\boldsymbol{(0, -1+\sqrt{2})\ f(x)\ decrece}$$

$$\boldsymbol{(-1+\sqrt{2}, +4)\ f(x)\ crece}$$

(4,8)

$\boldsymbol{h(x) = 2x + 4\ crece\ en\ todo\ el\ intervalor\ por\ ser\ una\ función\ polinómica}$

(8,9)

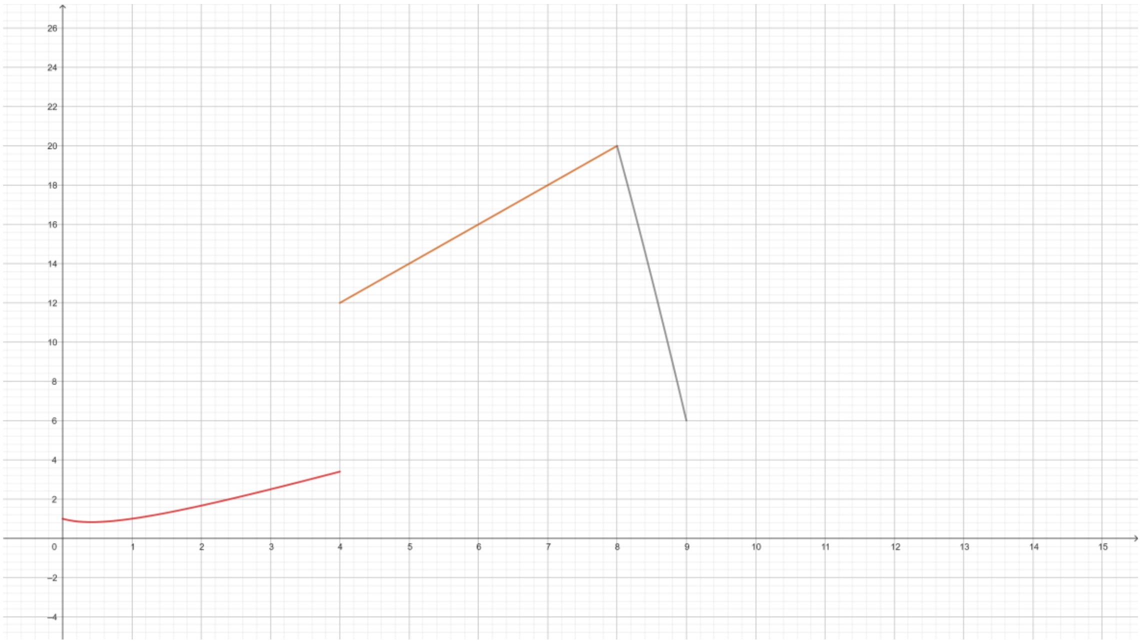
$$\boldsymbol{i(x) = 3x + 60 - x^2}$$

$$\boldsymbol{i'(x) = 3 - 2x = 0 \rightarrow x = 3/2 = 1.5 \notin (8,9)}$$

$$\boldsymbol{i'(x) = 3 - 2x < 0\ en\ el\ intervalo\ (8,9), luego\ f(x)\ decrece}$$

Solución: $\boldsymbol{f(x)\ crece\ (-1+\sqrt{2}+4)}\ \cup\ \boldsymbol{(4,8)\ y\ decrece\ (0,-1+\sqrt{2})}\ \cup \boldsymbol{(8,9)}$

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos.



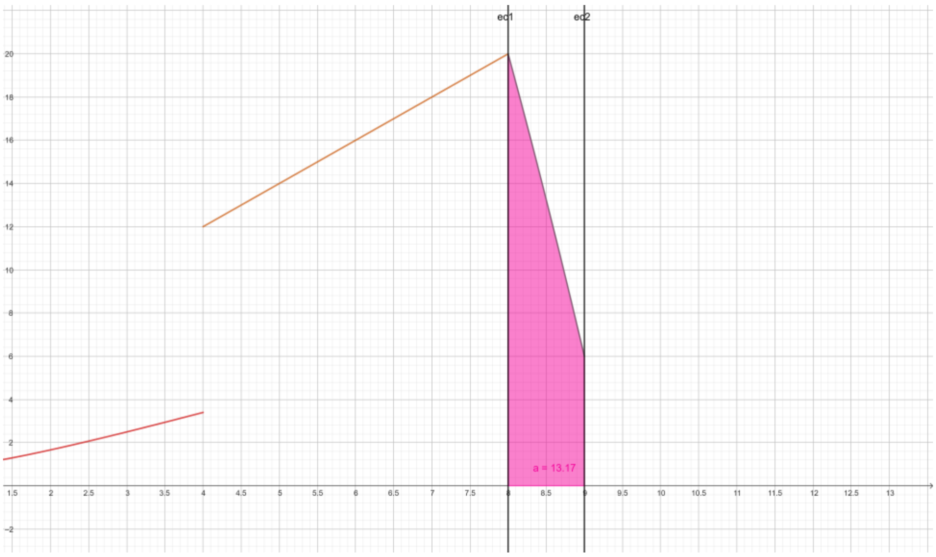
A partir de la gráfica se observa un máximo en (8,f(8)) = (8,20) y un mínimo en

$$\boldsymbol{(-1+\sqrt{2}, f(-1+\sqrt{2})) = (-1+\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})}$$

d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación x = 8 y la recta de ecuación x = 9.

Se trata de una integral definida.

$$\boldsymbol{\int_8^9 3x + 60 - x^2\, dx = \frac{3x^2}{2} + 60x\ - \frac{x^3}{3}\Big]_8^9 = 13.17\ u^2}$$



https://www.geogebra.org/classic/jrn9mubc

Problema 2.B. Dada la función $f(x) = \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

Solución:

El dominio de la función son todos los valores de la x que hacen que f(x) tome valores reales. Así pues, vamos a estudiar los valores que anulan el denominador, ya que son los que hace que no exista la función o que no tome valores reales.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ x = 4 \end{matrix}$$

$\boldsymbol{Dom\ f(x) = R - \{-2, 4\}}$

Puntos de corte con los ejes

$Eje\ X\ (f(x) = y = 0)$

$f(x) = \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = 0 \rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$

Has dos puntos de corte con en el eje X en (-3,0) y (3,0)

Eje Y (x=0)

$f(x) = \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} \rightarrow f(0) = \frac{-36}{-8} = 4.5$

Hay un punto de corte con el eje Y en (0,4.5)

Asíntota Vertical (x=-2)

$$\lim_{x \to -2} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \infty$$ → **Hay una asíntota vertical en x = -2**

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty$$

Asíntota Vertical (x=4)

$$\lim_{x \to 4} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \pm\infty$$ → **Hay una asíntota vertical en x =4**

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \ Indeterminación$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = 4$$ → **Hay una asíntota horizontal en y= 4**

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$f'(x) = 0$, puntos donde falla el dominio (x= -2,4)

$$f(x) = \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$$

$$f'(x) = \frac{(8x-36)\cdot(x^2-2x-8)^2-(4x^2-36)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-8)^4} =$$

$$= \frac{-8x^2+8x-72}{(x^2-2x-8)^4} = 0 \to -8x^2+8x-72 = 0$$

$$\to No\ hay\ valores\ reales\ que\ anulen\ la\ primera\ derivada\ ,$$

$$implica\ que\ la\ función\ no\ tenga\ ni\ máximos\ ni\ mínimos.$$

Problema 5. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). **Entre las personas** que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad.
b) b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes?
c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes".

Sucesos:

MP = personas que viven en municipios pequeños con una P(MP) = 0.35

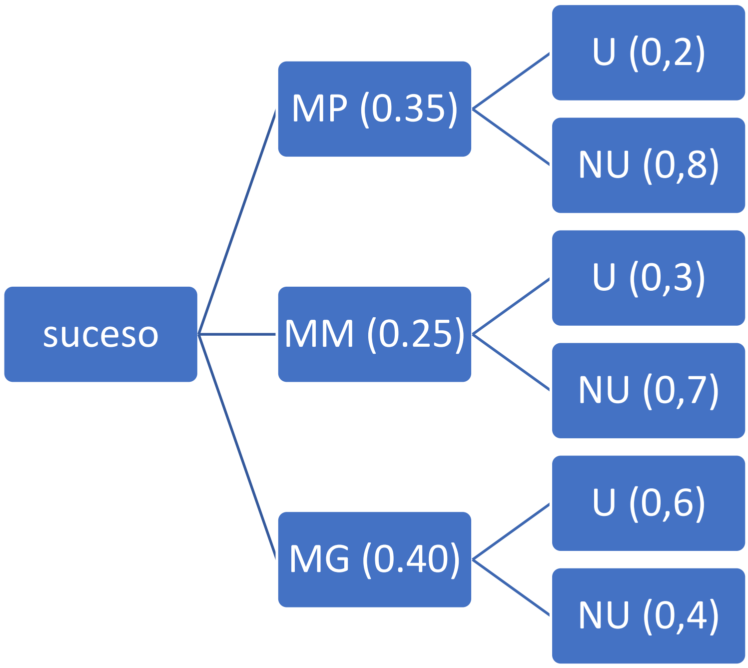
MM= personas que viven en municipios medianos con una P(MM) = 0.25

MG = personas que viven en municipios grandes con una P(MG) = 0.40

Entre las MP, 20% se graduó en la universidad

Entre las MM, 30% se graduó en la universidad

Entre las MG, 60% se graduó en la universidad



a)

$$P(U) = P(MP)\cdot P(U/MP) + P(MM)\cdot P(U/MM) + P(MG)\cdot P(U/MG) =$$
$$= 0.35\cdot 0.2 + 0.25\cdot 0.3 + 0.40\cdot 0.6 = 0.385$$

b)

M100 = suceso “ que una persona viva en un municipio con más de 10 000 habitantes”

$$P(M100/U) = \frac{P(M100 \cap U)}{P(U)} = \frac{P(MM\cap U) + P(MG \cap U)}{0.385} =$$
$$= \frac{P(MM)\cdot P(U/MM) + P(MG)\cdot P(U/MG)}{0.385} =$$
$$= \frac{0.25\cdot 0.3 + 0.40\cdot 0.6}{0.385} = \frac{9}{11} = 0.8182$$

c)

M50 = la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos

$U \cup M100$ = la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes

$$P(M50 \cap (U \cup M100)) = P(M50) - P(\bar{U} \cap P) = 0.60 - 0.28 = 0.32$$

$$P(M50) = P(MP) + P(MM) = 0.35 + 0.25 = 0.60$$

$$P(\bar{U} \cap P) = 0.35\cdot 0.8 = 0.28$$