Problema 1 · Sumas de consecutivos

Solución paso a paso

> ¿Qué números del **1 al 40** se pueden escribir como **suma de dos o más números naturales consecutivos**? ¿Cuáles no? ¿Por qué?

Paso 1 Explorar número a número

Lo primero es probar con cada número del 1 al 40 y anotar todas las sumas que se encuentran. Esta es la tabla completa; en rojo, los números que no se pueden escribir así:

N.º	Sumas de consecutivos	N.º	Sumas de consecutivos
1	— (no se puede)	**21**	10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + … + 6
2	— (no se puede)	**22**	4 + 5 + 6 + 7
3	1 + 2	**23**	11 + 12
4	— (no se puede)	**24**	7 + 8 + 9
5	2 + 3	**25**	12 + 13 = 3 + … + 7
6	1 + 2 + 3	**26**	5 + 6 + 7 + 8
7	3 + 4	**27**	13 + 14 = 8 + 9 + 10 = 2 + … + 7
8	— (no se puede)	**28**	1 + … + 7
9	4 + 5 = 2 + 3 + 4	**29**	14 + 15
10	1 + 2 + 3 + 4	**30**	9 + 10 + 11 = 6 + 7 + 8 + 9 = 4 + … + 8
11	5 + 6	**31**	15 + 16
12	3 + 4 + 5	**32**	— (no se puede)
13	6 + 7	**33**	16 + 17 = 10 + 11 + 12 = 3 + … + 8
14	2 + 3 + 4 + 5	**34**	7 + 8 + 9 + 10
15	7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + … + 5	**35**	17 + 18 = 5 + … + 9 = 2 + … + 8
16	— (no se puede)	**36**	11 + 12 + 13 = 1 + … + 8
17	8 + 9	**37**	18 + 19
18	5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6	**38**	8 + 9 + 10 + 11
19	9 + 10	**39**	19 + 20 = 12 + 13 + 14 = 4 + … + 9
20	2 + … + 6	**40**	6 + … + 10

Paso 2 Fijarse en los que no salen

Hasta el 40 solo fallan **1, 2, 4, 8, 16 y 32**. Cada uno es el doble del anterior: son las **potencias de 2**.

Esto nos da una conjetura: *un número se puede escribir como suma de consecutivos si y solo si no es una potencia de 2*. Ahora hay que explicar por qué.

Paso 3 Los números impares siempre se pueden

Todo número impar es la suma de dos números seguidos: **2k + 1 = k + (k + 1)**.

Por ejemplo: 17 = 8 + 9, 25 = 12 + 13, 39 = 19 + 20.

Paso 4 Los múltiplos de un número impar también se pueden

- **Suma de 3 consecutivos.** Tomamos el número del medio, n, y sus dos vecinos: (n − 1) + n + (n + 1) = **3n**. Por ejemplo, 24 = 3 · 8 = 7 + 8 + 9.

- **Suma de 5 consecutivos.** $(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2) = \mathbf{5n}$. Por ejemplo, $35 = 5 \cdot 7 = 5+6+7+8+9$.
- En general, si un número es **d · n** con d impar, se puede escribir como d números consecutivos centrados en n.

¿Y si el número del medio es pequeño? Entonces aparecen el 0 y números negativos, pero se anulan entre sí. Por ejemplo, $14 = 7 \cdot 2$. Tomamos 7 números centrados en el 2:

```
14 = (−1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5
     (el −1 y el 1 se anulan; el 0 no suma)
14 = 2 + 3 + 4 + 5
```

> **Conclusión:** cualquier número que tenga un **divisor impar mayor que 1** se puede escribir como suma de consecutivos.

Paso 5 Por qué las potencias de 2 no se pueden

Usamos el **truco de Gauss**: escribimos la suma al derecho y al revés, y sumamos las dos filas. Por ejemplo, con 4 + 5 + 6 + 7:

```
  4 +  5 +  6 +  7
  7 +  6 +  5 +  4
 ──────────────────
11 + 11 + 11 + 11   →   2 · suma = 4 · 11
```

Siempre pasa lo mismo: **el doble de la suma = (cantidad de números) × (primero + último)**. Ahora hay dos casos:

- Si la cantidad de números es **impar** (3, 5, 7…), ese número impar es un divisor de la suma.
- Si la cantidad de números es **par** (2, 4, 6…), entonces **primero + último es impar**, porque el último está a una distancia impar del primero. Por ejemplo, 4 + 7 = 11.

En los dos casos, la suma tiene un divisor impar mayor que 1. Una potencia de 2 (2, 4, 8, 16, 32…) solo tiene el 1 como divisor impar.

> **Conclusión:** las potencias de 2 **nunca** se pueden escribir como suma de dos o más consecutivos, y todos los demás números **sí**.

Problema 1 · Ampliaciones

Solución de las tarjetas de ampliación

Ampliación 1 · ¿Qué número se puede escribir de más maneras?

Entre el 1 y el 40, los que tienen más maneras son el **15, 21, 27, 30, 33, 35 y 39**, con **3 maneras** cada uno:

Número	Maneras
15	$7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5$
21	$10+11 = 6+7+8 = 1+2+3+4+5+6$
27	$13+14 = 8+9+10 = 2+3+4+5+6+7$
30	$9+10+11 = 6+7+8+9 = 4+5+6+7+8$
33	$16+17 = 10+11+12 = 3+4+5+6+7+8$
35	$17+18 = 5+6+7+8+9 = 2+3+4+5+6+7+8$
39	$19+20 = 12+13+14 = 4+5+6+7+8+9$

Ampliación 2 · Sumas de 3 y de 5 consecutivos

- La suma de 3 consecutivos es siempre un **múltiplo de 3**: $(n-1)+n+(n+1) = 3n$. Además, n es el número del medio, así que 3n se reparte como n − 1, n y n + 1.
- La suma de 5 consecutivos es siempre un **múltiplo de 5**: 5n, con n en el centro.
- Al revés también funciona: todo múltiplo de 3 a partir del 6 es suma de 3 consecutivos, y todo múltiplo de 5 a partir del 15 es suma de 5 consecutivos.

Ampliación 3 · El 100, el 128 y el 1000

- **100** = 4 · 25 tiene como divisores impares el 5 y el 25. Se puede de 2 maneras: 100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16.
- **128** = 2^7 es una potencia de 2, así que **no se puede**.
- **1000** = 8 · 125 tiene como divisores impares el 5, el 25 y el 125. Se puede de 3 maneras:

```
1000 = 198 + 199 + 200 + 201 + 202        (5 números)
1000 = 28 + 29 + … + 52                   (25 números)
1000 = 55 + 56 + … + 70                   (16 números)
```

La tercera sale de 125 números centrados en el 8 (del −54 al 70). Los números del −54 al 54 se anulan y quedan solo los del 55 al 70.

Ampliación 4 · ¿Hay una regla para contar las maneras?

> **Regla:** un número se puede escribir como suma de consecutivos de tantas maneras como **divisores impares mayores que 1** tenga.

Cada divisor impar d da una manera: se reparte el número en d partes iguales alrededor del centro (y si salen negativos, se anulan).

Número	Divisores impares > 1	Maneras
9	3, 9	2
15	3, 5, 15	3
16	ninguno	0
30	3, 5, 15	3
45	3, 5, 9, 15, 45	5

Para la puesta en común

- Muestra primero las pizarras que solo tienen ejemplos, luego las que descubren que fallan las potencias de 2 y, por último, las que intentan explicar por qué.
- La pregunta clave para la clase es: *«Ya sabemos cuáles fallan, pero ¿por qué fallan?»*.
- El paso 4 con números negativos conecta muy bien con el tema de los números enteros.

Problema 2 · Cuadrados en el tablero

Solución paso a paso

> Un tablero de ajedrez tiene 8 × 8 casillas. ¿**Cuántos cuadrados** puedes encontrar en él, de todos los tamaños?

Paso 1 Empezar por tableros pequeños

- **Tablero de 1×1:** 1 cuadrado.
- **Tablero de 2×2:** 4 cuadrados pequeños y 1 grande. En total, **5**.
- **Tablero de 3×3:** 9 de 1×1, 4 de 2×2 y 1 de 3×3. En total, **14**.

Ya se ve algo: 1, 4, 9… son **cuadrados perfectos**.

Paso 2 Contar por tamaños fijándose en la esquina

Cada cuadrado queda fijado por su **esquina superior izquierda**. Basta con contar dónde puede estar esa esquina:

- **1×1:** la esquina puede estar en 8 posiciones de cada fila, y hay 8 filas: 8 × 8 = **64**.
- **2×2:** el cuadrado ocupa 2 columnas, así que la esquina solo puede estar en 7 posiciones de cada fila, y en 7 filas: 7 × 7 = **49**.
- **3×3:** 6 × 6 = **36** posiciones.
- Y así hasta el **8×8**, que solo cabe de **1** manera (el tablero entero).

En general, un cuadrado de **k×k** cabe de **(9 − k) × (9 − k)** maneras.

Paso 3 Hacer la tabla y sumar

Tamaño	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
Cuántos	64	49	36	25	16	9	4	1

$$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

> **Solución:** en un tablero de ajedrez hay **204 cuadrados**.

Paso 4 Generalizar

En un tablero de **n×n** hay $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}$ cuadrados. Es la suma de los n primeros cuadrados perfectos.

Problema 2 · Ampliaciones

Solución de las tarjetas de ampliación

Ampliación 1 · Tableros de 3×3 y 4×4

- **3×3:** 9 + 4 + 1 = **14** cuadrados.
- **4×4:** 16 + 9 + 4 + 1 = **30** cuadrados.

El patrón: cada tablero suma el siguiente cuadrado perfecto al resultado del anterior (1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204…).

Ampliación 2 · Tableros de 10×10 y n×n

- **10×10:** 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = **385** cuadrados.
- **n×n:** $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Para alumnos que quieran ir más allá, existe la fórmula $\mathbf{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) / 6}$. Comprobación con n = 8: $8 \cdot 9 \cdot 17 / 6 = 204$ ✓.

Ampliación 3 · Rectángulos en el tablero de 8×8

Un rectángulo queda fijado al elegir **2 líneas verticales** (sus lados izquierdo y derecho) y **2 líneas horizontales** (los de arriba y abajo).

- El tablero tiene **9 líneas verticales**. ¿De cuántas maneras se eligen 2? Con la primera línea se pueden emparejar las 8 restantes; con la segunda, 7 nuevas; y así sucesivamente: 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **36**.
- Con las **9 líneas horizontales** pasa lo mismo: **36** maneras.
- Cada pareja vertical se combina con cada pareja horizontal: 36 × 36 = **1296**.

> **Solución:** en el tablero de 8×8 hay **1296 rectángulos** (contando los 204 cuadrados).

Ampliación 4 · Rectángulos en un tablero de 4×7

- Tiene 5 líneas horizontales: parejas posibles = 4 + 3 + 2 + 1 = **10**.
- Tiene 8 líneas verticales: parejas posibles = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **28**.
- Total: 10 × 28 = **280 rectángulos**.

Para la puesta en común

- Ordena las pizarras así: primero las que cuentan a mano, luego las que hacen una tabla por tamaños y, por último, las que descubren los cuadrados perfectos.
- La idea de fijarse en la **esquina** (paso 2) es la clave del recuento. Si ningún grupo la ha usado, pregunta: *«¿Dónde puede estar la esquina de un cuadrado de 3×3?»*.
- En los rectángulos, contar **líneas** en lugar de casillas es el cambio de mirada importante.