Sistema de ecuaciones con pistas

Enunciado. Encuentra todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2(xz + yz + x + y) \\ y^2 - z^2 = 2(yx + zx + y + z) \\ z^2 - x^2 = 2(zy + xy + z + x) \end{cases}$$

Pistas

Pista 1. Fíjate en el segundo miembro de la primera ecuación: los cuatro sumandos tienen algo en común con $x + y$. Intenta sacar factor común.

Pista 2. Comprueba que $xz + yz + x + y = (x + y)(z + 1)$ y que $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Así, la primera ecuación se puede escribir como

$$(x + y)(x - y - 2z - 2) = 0$$

Haz lo mismo con las otras dos ecuaciones (el sistema es *cíclico*: se pasa de una ecuación a la siguiente cambiando $x \to y \to z \to x$).

Pista 3. Un producto vale cero si y solo si algún factor vale cero. Cada ecuación te da dos posibilidades, así que organiza el estudio por casos según cuántos de los factores $x + y, y + z, z + x$ se anulan: ninguno, uno, dos o los tres.

Pista 4. En el caso en que no se anula ninguno, suma las tres ecuaciones lineales que quedan: obtendrás directamente el valor de $x + y + z$. Y aprovecha la simetría cíclica: si encuentras una solución (a, b, c), entonces (b, c, a) y (c, a, b) también lo son.

Para comprobar. El sistema tiene exactamente 8 soluciones reales.