Potencias y restos módulo 7 con pistas

Enunciado. Consideremos el número entero positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5. Hallar el menor número que cumple esta condición.

Pistas

Pista 1. Escribe la condición como una congruencia, $2^r - 16^s \equiv 5 \ (mod\ 7)$, y fíjate primero en el 16: ¿qué resto deja al dividirlo entre 7? Sustitúyelo por su resto.

Pista 2. Comprueba que $16 \equiv 2 \ (mod\ 7)$, de modo que $16^s \equiv 2^s \ (mod\ 7)$. Ahora haz una tabla con los restos de $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots$ módulo 7. Como $2^3 = 8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, los restos se repiten cada 3: solo pueden ser 2, 4 o 1, según el resto del exponente al dividirlo entre 3.

Pista 3. Cada una de las dos potencias deja uno de los restos 1, 2 o 4. Organiza el estudio en una tabla de 3×3 con todas las diferencias posibles módulo 7 (un resto negativo se arregla sumando 7) y busca cuáles valen 5.

Pista 4. Para la segunda pregunta, no olvides que n tiene que ser **positivo**. Escribe $16^s = 2^{4s}$: ¿qué relación tiene que haber entre r y s? Después, toma el menor s permitido y busca el menor r compatible.

Para comprobar. El menor número que cumple la condición está entre 700 y 800.