Potencias y restos módulo 7 con pistas

OME, fase local 2011-12, problema D2.

Enunciado. Consideremos el número entero positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5. Hallar el menor número que cumple esta condición.

Pistas

Pista 1. Escribe la condición como una congruencia, $2^r - 16^s \equiv 5 \ (mod\ 7)$, y fíjate primero en el 16: ¿qué resto deja al dividirlo entre 7? Sustitúyelo por su resto.

Pista 2. Comprueba que $16 \equiv 2 \ (mod\ 7)$, de modo que $16^s \equiv 2^s \ (mod\ 7)$. Ahora haz una tabla con los restos de $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots$ módulo 7. Como $2^3 = 8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, los restos se repiten cada 3: solo pueden ser 2, 4 o 1, según el resto del exponente al dividirlo entre 3.

Pista 3. Cada una de las dos potencias deja uno de los restos 1, 2 o 4. Organiza el estudio en una tabla de 3×3 con todas las diferencias posibles módulo 7 (un resto negativo se arregla sumando 7) y busca cuáles valen 5.

Pista 4. Para la segunda pregunta, no olvides que n tiene que ser **positivo**. Escribe $16^s = 2^{4s}$: ¿qué relación tiene que haber entre r y s? Después, toma el menor s permitido y busca el menor r compatible.

Para comprobar. El menor número que cumple la condición está entre 700 y 800.

Solución

Como $2^3 = 8 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, los restos de las potencias de 2 módulo 7 se repiten con período 3:

$$2^r \equiv \begin{cases} 2 & \text{si } r \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ 4 & \text{si } r \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ 1 & \text{si } r \equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Además $16 \equiv 2 \ (mod\ 7)$, así que $16^s \equiv 2^s \ (mod\ 7)$ sigue el mismo ciclo, con el exponente s.

Las nueve diferencias. Los valores de $2^r - 16^s$ módulo 7 son:

2^r -16^s	**1**	**2**	**4**
1	0	6	4
2	1	0	**5**
4	3	2	0

Solo una casilla vale 5: $2^r \equiv 2$ y $16^s \equiv 4 \ (mod\ 7)$. Por tanto, las condiciones son

$$r \equiv 1 \ (mod\ 3) \quad \text{y} \quad s \equiv 2 \ (mod\ 3),$$

junto con $r > 4s$ para que n sea positivo, ya que $16^s = 2^{4s}$.

El menor número. El menor s con $s \equiv 2 \ (mod\ 3)$ es $s = 2$. Entonces $r > 8$ y $r \equiv 1 \ (mod\ 3)$, así que $r = 10$. Cualquier otra elección obliga a tomar un r mayor y da un n mayor. Por tanto:

$$n = 2^{10} - 16^2 = 1024 - 256 = 768$$

Comprobación: $768 = 7 \cdot 109 + 5$.