4. Solucionario

Tarjeta 0 · ¿Qué tipo de agrupación es?

	¿Orden ?	¿Repetición?	¿Todos ?	Tipo y cálculo
a) Contraseñas	Sí	Sí	—	$\mathrm{VR}_{5,3} = 5^3 = 125$
b) 3 representantes	No	No	—	$C_{25,3} = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2300$
c) Cargos	Sí	No	No	$V_{25,3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$
d) PAPEL	Sí	Hay letras iguales	Sí	$\mathrm{PR}_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$
e) Refrescos	No	Sí	—	$\mathrm{CR}_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$
f) Libros	Sí	No	Sí	$P_5 = 5! = 120$

Para pensar: en b) y c) se eligen 3 personas de 25 sin repetir; en c) además se ordenan. Cada grupo de 3 personas da lugar a 3! = 6 asignaciones de cargos:

$$V_{25,3} = C_{25,3} \cdot 3!$$
$$13800 = 2300 \cdot 6$$

Tarjeta 1 · Matrículas y quinielas

a) Influye el orden y se pueden repetir cifras y letras: variaciones con repetición, y se multiplica por el principio del producto.

$$\mathrm{VR}_{10,4} \cdot \mathrm{VR}_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 10000 \cdot 8000 = 80.000.000 \text{ matrículas}$$

b) Las cifras ya no se repiten (variaciones sin repetición); las letras sí pueden repetirse.

$$V_{10,4} \cdot \mathrm{VR}_{20,3} = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot 20^3 = 5040 \cdot 8000 = 40.320.000$$

c) Primera manera (complementario): total menos las que tienen todas las cifras distintas.

$$80.000.000 - 40.320.000 = 39.680.000$$

Segunda manera: bloques de cifras con alguna repetida por las letras.

$$(10^4 - V_{10,4}) \cdot 20^3 = (10000 - 5040) \cdot 8000 = 4960 \cdot 8000 = 39.680.000$$

d) En cada partido hay 3 opciones, influye el orden (el partido) y se repiten: variaciones con repetición.

$$\mathrm{VR}_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907 \text{ columnas}$$
$$14.348.907 \cdot 0{,}75 = 10.761.680{,}25\ €$$

Tarjeta 2 · El podio

a) Se eligen 3 corredoras de 10, influye el orden (oro ≠ plata) y no se repiten: variaciones.

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ podios}$$

b) Ana puede estar en 3 posiciones; las otras 2 posiciones se reparten entre las 9 restantes.

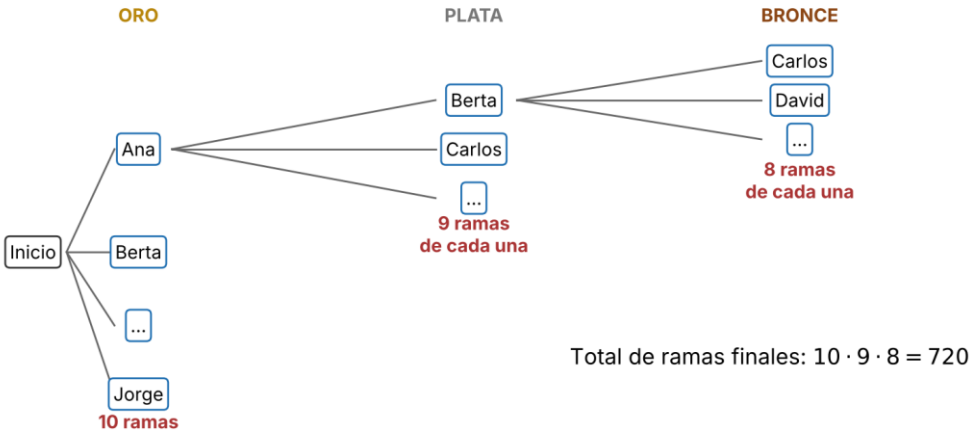
$$3 \cdot V_{9,2} = 3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$$

c) Ana en 3 posiciones posibles y los 2 huecos restantes entre 8 corredoras (sin Ana ni Berta).

$$3 \cdot V_{8,2} = 3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$$

Comprobación: podios con Ana y Berta a la vez: 3·2·8 = 48, y 216 − 48 = 168.

d) Árbol: del inicio salen 10 ramas (oro), de cada una 9 (plata) y de cada una de ellas 8 (bronce). El número de caminos completos es el producto 10·9·8 = 720.



Tarjeta 3 · La foto de grupo

a) Se ordenan los 7, todos distintos: permutaciones.

$$P_7 = 7! = 5040$$

b) Marta-Pau forman un bloque: se ordenan 6 objetos, y dentro del bloque hay 2 órdenes.

$$2! \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440$$

c) Complementario del total.

$$5040 - 1440 = 3600$$

d) En una mesa redonda se fija a una persona y se ordenan las otras 6 (permutaciones circulares).

$$\mathrm{PC}_7 = (7-1)! = 6! = 720$$

Tarjeta 4 · Anagramas y caminos

a) Se ordenan las 11 letras, pero hay repetidas: A (3 veces), M (2), T (2): permutaciones con repetición.

$$\mathrm{PR}_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{39916800}{24} = 1.663.200$$

b) Fijada la M inicial, quedan 10 letras: A (3), T (2), M, E, I, C, S.

$$\mathrm{PR}_{10}^{3,2} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{12} = 302.400$$

c) Todo camino es una palabra de 8 letras con 5 D y 3 S.

$$\mathrm{PR}_{8}^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56 \text{ caminos}$$

d) De A a P: 2 D y 1 S. De P a B: 3 D y 2 S. Principio del producto.

$$\mathrm{PR}_{3}^{2,1} \cdot \mathrm{PR}_{5}^{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 3 \cdot 10 = 30$$

e) Un camino queda determinado al elegir cuáles de los 8 pasos son hacia arriba (no importa el orden de la elección):

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \mathrm{PR}_{8}^{5,3} = 56$$

Tarjeta 5 · La comisión

a) Se eligen 4 de 12, no importa el orden, sin repetición: combinaciones.

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = 495$$

b) Elegimos las chicas y los chicos por separado y multiplicamos.

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210$$

c) Complementario: comisiones sin ningún chico (solo chicas).

$$\binom{12}{4} - \binom{7}{4} = 495 - 35 = 460$$

d) Con cargos influye el orden (variaciones); sin cargos no (combinaciones). Cada pareja se puede ordenar de 2! formas.

$$V_{12,2} = 12 \cdot 11 = 132$$

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = 66$$

$$132 = 66 \cdot 2!$$

Tarjeta 6 · Heladería y caramelos

a) Se eligen 3 bolas de 4 sabores, no importa el orden y se repiten: combinaciones con repetición.

$$\mathrm{CR}_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20 \text{ tarrinas}$$

b) Cada resultado es una elección de 3 números del 1 al 6, con repetición y sin orden.

$$\mathrm{CR}_{6,3} = \binom{8}{3} = 56$$

c) Estrellas y barras: 10 estrellas y 2 barras (12 símbolos); se eligen las posiciones de las barras.

$$\mathrm{CR}_{3,10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$$

d) Se da un caramelo a cada niño y se reparten libremente los 7 restantes.

$$\mathrm{CR}_{3,7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$$

Tarjeta 7 · Números con condiciones

a) Primera cifra: 9 opciones (no 0). Las otras 3: variaciones de las 9 cifras restantes.

$$9 \cdot V_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

b) Primera cifra ∈ {5, 6, 7, 8, 9}; última cifra par y distinta de la primera; las dos centrales, variaciones de las 8 restantes.

Caso 1: primera cifra par (6 u 8): la última tiene 4 opciones.

$$2 \cdot 4 \cdot V_{8,2} = 2 \cdot 4 \cdot 56 = 448$$

Caso 2: primera cifra impar (5, 7 o 9): la última tiene 5 opciones.

$$3 \cdot 5 \cdot V_{8,2} = 3 \cdot 5 \cdot 56 = 840$$

$$\text{Total: } 448 + 840 = 1288$$

c) Complementario: números sin la cifra 7 (primera cifra: 8 opciones; resto: variaciones de 8).

$$8 \cdot V_{8,3} = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$$

$$4536 - 2688 = 1848$$

Tarjeta 8 · Inventad el enunciado (ejemplos de respuesta)

a) $\mathrm{VR}_{2,5} = 2^5 = 32$: resultados al lanzar una moneda 5 veces (orden sí, repetición sí).

b) $C_{8,3} = 56$: elegir 3 ingredientes de 8 para una pizza (orden no, repetición no).

c) $\mathrm{PR}_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$: anagramas de BANANA (A tres veces, N dos, B una).

d) $\mathrm{CR}_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$: comprar 5 cruasanes eligiendo entre 3 tipos.

e) $C_{8,3} \cdot 3! = V_{8,3} = 336$: elegir 3 personas de 8 y luego asignarles 3 cargos distintos. Es la misma relación V = C·P de la tarjeta 5 d) y de la tarjeta 0.

Reto A · Polígonos

a) Cada par de vértices da un segmento; se restan los n lados.

$$\binom{10}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$$

$$D_n = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

b) Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 54 \Rightarrow n^2 - 3n - 108 = 0 \Rightarrow n = \frac{3 + \sqrt{9 + 432}}{2} = \frac{3 + 21}{2} = 12$$

Es un dodecágono (la solución negativa n = −9 no tiene sentido).

c) Un triángulo queda determinado por 3 vértices sin importar el orden.

$$\binom{10}{3} = 120$$

d) Triángulos con 2 lados del polígono: tres vértices consecutivos, 10. Con exactamente 1 lado: se elige el lado (10) y el tercer vértice no puede ser ninguno de sus dos extremos ni sus dos vecinos (10 − 4 = 6).

$$120 - 10 - 10 \cdot 6 = 50 \text{ triángulos}$$

Reto B · Ecuaciones que se cuentan

a) Repartir 10 unidades entre 4 incógnitas: combinaciones con repetición.

$$\mathrm{CR}_{4,10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$$

b) Se asigna 1 a cada incógnita y se reparten las 6 unidades restantes.

$$\mathrm{CR}_{4,6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

Ticket de salida individual

Caso	Frase identificativa	Cálculo
a) distintos, se acumulan	Influye a quién toca cada premio y se repite persona → VR	$\mathrm{VR}_{8,3} = 8^3 = 512$
b) distintos, máximo uno	Influye el orden, no se repite → V	$V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$
c) iguales, máximo uno	No influye el orden, no se repite → C	$C_{8,3} = \binom{8}{3} = 56$
d) iguales, se acumulan	No influye el orden, se repite → CR	$\mathrm{CR}_{8,3} = \binom{10}{3} = 120$

e) 512 > 336 > 120 > 56. Permitir repeticiones añade casos (VR > V y CR > C) y que el orden importe multiplica los casos (cada elección sin orden de 3 personas distintas da 3! = 6 ordenaciones: 336 = 56·6).