**TARJETA 0 · CALENTAMIENTO**

# ¿Qué tipo de agrupación es?

*Clasificar antes de calcular*

Para cada situación escribid en la pizarra: **¿Influye el orden? ¿Se pueden repetir? ¿Intervienen todos los elementos?** Después, el nombre del tipo de agrupación y el cálculo.

**a)** Contraseñas de 3 letras formadas con las letras A, B, C, D y E (se pueden repetir letras).

**b)** Elegir 3 representantes de una clase de 25 para ir a una charla.

**c)** Elegir presidente/a, secretario/a y tesorero/a entre esos 25.

**d)** Palabras (con o sin sentido) que se forman reordenando las letras de PAPEL.

**e)** Comprar 5 refrescos en una máquina que tiene 3 tipos distintos.

**f)** Colocar 5 libros distintos en una estantería.

**Para pensar:** ¿qué tienen en común b) y c)? ¿Qué relación hay entre sus resultados?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 1**

# Matrículas y quinielas

*Contar cuando se puede repetir*

Las matrículas españolas tienen **4 cifras** seguidas de **3 letras**. Solo se usan **20 consonantes** (no se usan vocales, ni la Ñ ni la Q).

**a)** ¿Cuántas matrículas distintas se pueden fabricar?

**b)** ¿Cuántas tienen las cuatro cifras distintas?

**c)** ¿Cuántas tienen al menos una cifra repetida? Intentad resolverlo de dos maneras distintas.

**d)** Una quiniela tiene 15 partidos y en cada uno se marca 1, X o 2. ¿Cuántas columnas distintas se pueden rellenar? Si cada columna cuesta 0,75 €, ¿cuánto costaría asegurarse los 15 aciertos?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 2**

# El podio

*Cuando el orden importa*

En la final de una carrera hay **10 corredoras**, entre ellas Ana y Berta. Se reparten medallas de oro, plata y bronce.

**a)** ¿De cuántas formas distintas puede quedar el podio?

**b)** ¿En cuántos de esos podios consigue medalla Ana?

**c)** ¿En cuántos consigue medalla Ana pero no Berta?

**d)** Dibujad el comienzo del diagrama de árbol del apartado a) (no hace falta dibujarlo entero) y explicad con él por qué el resultado es un producto.

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 3**

# La foto de grupo

*Ordenar a todos*

**7 amigos**, entre ellos Marta y Pau, se ponen en fila para hacerse una foto.

**a)** ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar?

**b)** ¿En cuántas de ellas Marta y Pau salen juntos?

**c)** ¿Y en cuántas salen separados?

**d)** Después de la foto se sientan alrededor de una mesa redonda. Dos disposiciones se consideran iguales si cada persona tiene a los mismos vecinos a su derecha y a su izquierda. ¿Cuántas disposiciones distintas hay?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 4**

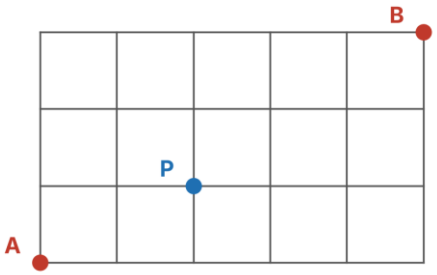
# Anagramas y caminos

*Ordenar cuando hay elementos iguales*

**a)** ¿Cuántos anagramas (palabras con o sin sentido) se pueden formar con las letras de **MATEMATICAS**?

**b)** ¿Cuántos de ellos empiezan por M?

**c)** En la cuadrícula se va de A a B moviéndose solo hacia la **derecha (D)** o hacia **arriba (S)**. ¿Cuántos caminos distintos hay?




**d)** ¿Cuántos de esos caminos pasan por el punto P?

**e)** El resultado de c) coincide con un número combinatorio. ¿Cuál? ¿Por qué tiene sentido?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 5**

# La comisión

*Cuando el orden no importa*

En una clase hay **7 chicas y 5 chicos**.

**a)** ¿Cuántas comisiones de 4 personas se pueden formar?

**b)** ¿Cuántas tienen exactamente 2 chicas y 2 chicos?

**c)** ¿Cuántas tienen al menos un chico?

**d)** Calculad de cuántas formas se puede elegir **delegado/a y subdelegado/a** y de cuántas formas se pueden elegir **2 representantes** sin cargo. Explicad la relación entre los dos números.

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 6**

# Heladería y caramelos

*Elegir cuando se puede repetir y el orden no importa*

**a)** Una heladería tiene 4 sabores. Una tarrina lleva 3 bolas (se puede repetir sabor y el orden no importa). ¿Cuántas tarrinas distintas se pueden pedir? Escribid unas cuantas para comprobar que no se os escapa ninguna.

**b)** Se lanzan a la vez 3 dados idénticos. ¿Cuántos resultados distintos se pueden observar? (Por ejemplo, {1, 1, 5} es un resultado.)

**c)** ¿De cuántas formas se pueden repartir 10 caramelos idénticos entre 3 niños? (Algún niño puede quedarse sin caramelos.)

**d)** ¿Y si cada niño tiene que recibir al menos un caramelo?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 7 · PARA GRUPOS RÁPIDOS**

# Números con condiciones

*Mezclamos estrategias*

Consideramos los números de **4 cifras con todas sus cifras distintas** (el primero no puede ser 0).

**a)** ¿Cuántos hay?

**b)** ¿Cuántos son mayores que 5000 y pares?

**c)** ¿Cuántos contienen la cifra 7?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**TARJETA 8 · PARA GRUPOS RÁPIDOS**

# Inventad el enunciado

*De la fórmula a la situación*

Inventad una situación real cuya solución sea cada una de estas expresiones. Justificad por qué encaja (orden, repetición, todos los elementos).

**a)** $\mathrm{VR}_{2,5}$

**b)** $C_{8,3}$

**c)** $\mathrm{PR}_{6}^{3,2,1}$

**d)** $\mathrm{CR}_{3,5}$

**e)** $C_{8,3} \cdot 3!$

En e), ¿con qué otra expresión de la tarjeta 2 o de la tarjeta 5 se relaciona?

*Recordad: antes de cada operación, una frase que la identifique (¿influye el orden?, ¿se repiten?, ¿intervienen todos?). El rotulador cambia de manos en cada apartado.*

**RETO A**

## Polígonos

*Con pistas · para grupos rápidos*

Consideramos polígonos convexos.

**a)** ¿Cuántas diagonales tiene un decágono (10 lados)? Encontrad una fórmula para un polígono de n lados.

**b)** ¿Qué polígono tiene 54 diagonales?

**c)** ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar uniendo tres vértices del decágono?

**d)** ¿Cuántos de esos triángulos no tienen ningún lado en común con el decágono?

**RETO B**

## Ecuaciones que se cuentan

*Con pistas · para grupos rápidos*

**a)** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x + y + z + t = 10$ con x, y, z, t números enteros mayores o iguales que 0?

**b)** ¿Y si x, y, z, t tienen que ser enteros mayores o iguales que 1?

# Pistas recortables

*Recortar y entregar solo cuando el grupo lo pida (cada pista resta 0,25 en esa tarjeta).*

| | |
|---|---|
| **✂ PISTA · Tarjeta 1 c)**<br>Contad primero las que tienen todas las cifras distintas. ¿Qué os falta para llegar al total? | **✂ PISTA · Tarjeta 2 b)**<br>Colocad primero a Ana: ¿en cuántos escalones del podio puede estar? Después rellenad los dos huecos que quedan. |
| **✂ PISTA · Tarjeta 3 b)**<br>Imaginad que Marta y Pau van pegados con cinta adhesiva: son un solo «bloque». ¿Cuántos objetos hay que ordenar ahora? ¿De cuántas formas se ordenan dentro del bloque? | **✂ PISTA · Tarjeta 3 d)**<br>Sentad primero a una persona cualquiera. A partir de ella, solo importa cómo se colocan los demás. |
| **✂ PISTA · Tarjeta 4 c)**<br>Todo camino tiene 8 pasos: 5 D y 3 S. Un camino es una «palabra» como DDSDDSDS. | **✂ PISTA · Tarjeta 4 d)**<br>Contad los caminos de A a P y los de P a B. ¿Cómo se combinan? |
| **✂ PISTA · Tarjeta 5 c)**<br>Es más fácil contar lo contrario: ¿cuántas comisiones no tienen ningún chico? | **✂ PISTA · Tarjeta 6 c)**<br>Estrellas y barras: ★★★\|★★★★★\|★★ representa 3, 5 y 2 caramelos. ¿Cuántos símbolos hay? ¿Cuántas posiciones elegís para las barras? |
| **✂ PISTA · Tarjeta 6 d)**<br>Dad primero un caramelo a cada niño. ¿Cuántos quedan por repartir libremente? | **✂ PISTA · Tarjeta 7 b)**<br>Empezad por las cifras con condiciones (la primera y la última). Separad en casos: primera cifra par o impar. |
| **✂ PISTA · Reto A a)**<br>Cada pareja de vértices determina un segmento: o es un lado o es una diagonal. | **✂ PISTA · Reto A d)**<br>Contad los triángulos que tienen 2 lados del polígono (tres vértices consecutivos) y los que tienen exactamente 1 lado. Restad del total. |
| **✂ PISTA · Reto B**<br>Resolver $x + y + z + t = 10$ es lo mismo que repartir 10 caramelos idénticos entre 4 niños. | |

## 3. Ticket de salida individual (10 minutos)

**Nombre:** _____ **Grupo:** _____

En un sorteo hay **3 premios** y **8 participantes**. Para cada caso escribe una frase que identifique el tipo de agrupación (¿influye el orden?, ¿se repiten?) y calcula.

**a)** Los premios son distintos (viaje, móvil, auriculares) y una misma persona puede ganar varios.

**b)** Los premios son distintos y cada persona puede ganar como máximo uno.

**c)** Los premios son iguales (3 entradas de cine) y cada persona puede ganar como máximo una.

**d)** Los premios son iguales y una misma persona puede ganar varios.

**e)** Ordena los cuatro resultados de mayor a menor y explica por qué ese orden tiene sentido.

**Nombre:** _____ **Grupo:** _____

En un sorteo hay **3 premios** y **8 participantes**. Para cada caso escribe una frase que identifique el tipo de agrupación (¿influye el orden?, ¿se repiten?) y calcula.

**a)** Los premios son distintos (viaje, móvil, auriculares) y una misma persona puede ganar varios.

**b)** Los premios son distintos y cada persona puede ganar como máximo uno.

**c)** Los premios son iguales (3 entradas de cine) y cada persona puede ganar como máximo una.

**d)** Los premios son iguales y una misma persona puede ganar varios.

**e)** Ordena los cuatro resultados de mayor a menor y explica por qué ese orden tiene sentido.

# 4. Solucionario

## Tarjeta 0 · ¿Qué tipo de agrupación es?

| | ¿Orden ? | ¿Repetición? | ¿Todos ? | Tipo y cálculo |
|---|---|---|---|---|
| a) Contraseñas | Sí | Sí | — | $\mathrm{VR}_{5,3} = 5^3 = 125$ |
| b) 3 representantes | No | No | — | $C_{25,3} = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} = 2300$ |
| c) Cargos | Sí | No | No | $V_{25,3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ |
| d) PAPEL | Sí | Hay letras iguales | Sí | $\mathrm{PR}_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$ |
| e) Refrescos | No | Sí | — | $\mathrm{CR}_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$ |
| f) Libros | Sí | No | Sí | $P_5 = 5! = 120$ |

**Para pensar:** en b) y c) se eligen 3 personas de 25 sin repetir; en c) además se ordenan. Cada grupo de 3 personas da lugar a 3! = 6 asignaciones de cargos:

$$V_{25,3} = C_{25,3} \cdot 3!$$
$$13800 = 2300 \cdot 6$$

## Tarjeta 1 · Matrículas y quinielas

**a)** Influye el orden y se pueden repetir cifras y letras: variaciones con repetición, y se multiplica por el principio del producto.

$$\mathrm{VR}_{10,4} \cdot \mathrm{VR}_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 10000 \cdot 8000 = 80.000.000 \text{ matrículas}$$

**b)** Las cifras ya no se repiten (variaciones sin repetición); las letras sí pueden repetirse.

$$V_{10,4} \cdot \mathrm{VR}_{20,3} = (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot 20^3 = 5040 \cdot 8000 = 40.320.000$$

**c)** Primera manera (complementario): total menos las que tienen todas las cifras distintas.

$$80.000.000 - 40.320.000 = 39.680.000$$

Segunda manera: bloques de cifras con alguna repetida por las letras.

$$(10^4 - V_{10,4}) \cdot 20^3 = (10000 - 5040) \cdot 8000 = 4960 \cdot 8000 = 39.680.000$$

**d)** En cada partido hay 3 opciones, influye el orden (el partido) y se repiten: variaciones con repetición.

$$\mathrm{VR}_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907 \text{ columnas}$$
$$14.348.907 \cdot 0{,}75 = 10.761.680{,}25\ €$$

## Tarjeta 2 · El podio

**a)** Se eligen 3 corredoras de 10, influye el orden (oro ≠ plata) y no se repiten: variaciones.

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ podios}$$

**b)** Ana puede estar en 3 posiciones; las otras 2 posiciones se reparten entre las 9 restantes.

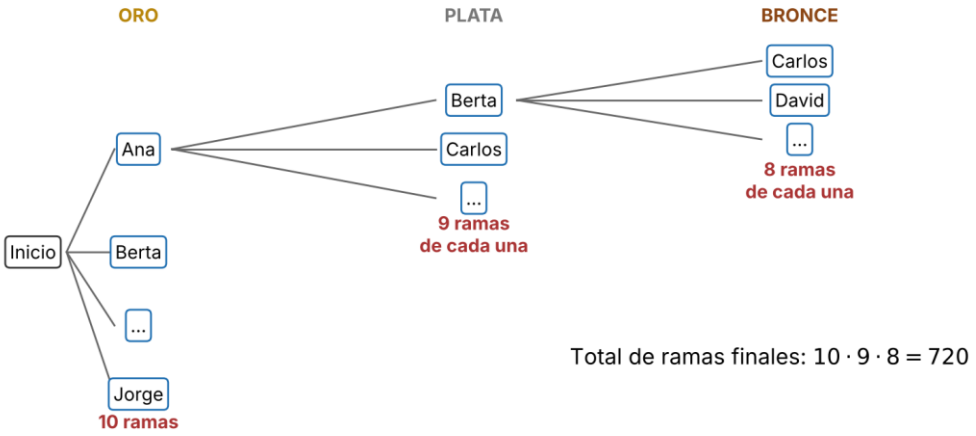
$$3 \cdot V_{9,2} = 3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$$

**c)** Ana en 3 posiciones posibles y los 2 huecos restantes entre 8 corredoras (sin Ana ni Berta).

$$3 \cdot V_{8,2} = 3 \cdot 8 \cdot 7 = 168$$

Comprobación: podios con Ana y Berta a la vez: 3·2·8 = 48, y 216 − 48 = 168.

**d)** Árbol: del inicio salen 10 ramas (oro), de cada una 9 (plata) y de cada una de ellas 8 (bronce). El número de caminos completos es el producto 10·9·8 = 720.




## Tarjeta 3 · La foto de grupo

**a)** Se ordenan los 7, todos distintos: permutaciones.

$$P_7 = 7! = 5040$$

**b)** Marta-Pau forman un bloque: se ordenan 6 objetos, y dentro del bloque hay 2 órdenes.

$$2! \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440$$

**c)** Complementario del total.

$$5040 - 1440 = 3600$$

**d)** En una mesa redonda se fija a una persona y se ordenan las otras 6 (permutaciones circulares).

$$\mathrm{PC}_7 = (7-1)! = 6! = 720$$

## Tarjeta 4 · Anagramas y caminos

**a)** Se ordenan las 11 letras, pero hay repetidas: A (3 veces), M (2), T (2): permutaciones con repetición.

$$\mathrm{PR}_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{39916800}{24} = 1.663.200$$

**b)** Fijada la M inicial, quedan 10 letras: A (3), T (2), M, E, I, C, S.

$$\mathrm{PR}_{10}^{3,2} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{12} = 302.400$$

**c)** Todo camino es una palabra de 8 letras con 5 D y 3 S.

$$\mathrm{PR}_{8}^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56 \text{ caminos}$$

**d)** De A a P: 2 D y 1 S. De P a B: 3 D y 2 S. Principio del producto.

$$\mathrm{PR}_{3}^{2,1} \cdot \mathrm{PR}_{5}^{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 3 \cdot 10 = 30$$

**e)** Un camino queda determinado al elegir cuáles de los 8 pasos son hacia arriba (no importa el orden de la elección):

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \mathrm{PR}_{8}^{5,3} = 56$$

## Tarjeta 5 · La comisión

**a)** Se eligen 4 de 12, no importa el orden, sin repetición: combinaciones.

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = 495$$

**b)** Elegimos las chicas y los chicos por separado y multiplicamos.

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210$$

**c)** Complementario: comisiones sin ningún chico (solo chicas).

$$\binom{12}{4} - \binom{7}{4} = 495 - 35 = 460$$

**d)** Con cargos influye el orden (variaciones); sin cargos no (combinaciones). Cada pareja se puede ordenar de 2! formas.

$$V_{12,2} = 12 \cdot 11 = 132$$

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = 66$$

$$132 = 66 \cdot 2!$$

## Tarjeta 6 · Heladería y caramelos

**a)** Se eligen 3 bolas de 4 sabores, no importa el orden y se repiten: combinaciones con repetición.

$$\mathrm{CR}_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20 \text{ tarrinas}$$

**b)** Cada resultado es una elección de 3 números del 1 al 6, con repetición y sin orden.

$$\mathrm{CR}_{6,3} = \binom{8}{3} = 56$$

**c)** Estrellas y barras: 10 estrellas y 2 barras (12 símbolos); se eligen las posiciones de las barras.

$$\mathrm{CR}_{3,10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$$

**d)** Se da un caramelo a cada niño y se reparten libremente los 7 restantes.

$$\mathrm{CR}_{3,7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$$

## Tarjeta 7 · Números con condiciones

**a)** Primera cifra: 9 opciones (no 0). Las otras 3: variaciones de las 9 cifras restantes.

$$9 \cdot V_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

**b)** Primera cifra ∈ {5, 6, 7, 8, 9}; última cifra par y distinta de la primera; las dos centrales, variaciones de las 8 restantes.

Caso 1: primera cifra par (6 u 8): la última tiene 4 opciones.

$$2 \cdot 4 \cdot V_{8,2} = 2 \cdot 4 \cdot 56 = 448$$

Caso 2: primera cifra impar (5, 7 o 9): la última tiene 5 opciones.

$$3 \cdot 5 \cdot V_{8,2} = 3 \cdot 5 \cdot 56 = 840$$

$$\text{Total: } 448 + 840 = 1288$$

**c)** Complementario: números sin la cifra 7 (primera cifra: 8 opciones; resto: variaciones de 8).

$$8 \cdot V_{8,3} = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$$

$$4536 - 2688 = 1848$$

## Tarjeta 8 · Inventad el enunciado (ejemplos de respuesta)

**a)** $\mathrm{VR}_{2,5} = 2^5 = 32$: resultados al lanzar una moneda 5 veces (orden sí, repetición sí).

**b)** $C_{8,3} = 56$: elegir 3 ingredientes de 8 para una pizza (orden no, repetición no).

**c)** $\mathrm{PR}_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$: anagramas de BANANA (A tres veces, N dos, B una).

**d)** $\mathrm{CR}_{3,5} = \binom{7}{5} = 21$: comprar 5 cruasanes eligiendo entre 3 tipos.

**e)** $C_{8,3} \cdot 3! = V_{8,3} = 336$: elegir 3 personas de 8 y luego asignarles 3 cargos distintos. Es la misma relación V = C·P de la tarjeta 5 d) y de la tarjeta 0.

## Reto A · Polígonos

**a)** Cada par de vértices da un segmento; se restan los n lados.

$$\binom{10}{2} - 10 = 45 - 10 = 35$$

$$D_n = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

**b)** Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 54 \Rightarrow n^2 - 3n - 108 = 0 \Rightarrow n = \frac{3 + \sqrt{9 + 432}}{2} = \frac{3 + 21}{2} = 12$$

Es un dodecágono (la solución negativa n = −9 no tiene sentido).

**c)** Un triángulo queda determinado por 3 vértices sin importar el orden.

$$\binom{10}{3} = 120$$

**d)** Triángulos con 2 lados del polígono: tres vértices consecutivos, 10. Con exactamente 1 lado: se elige el lado (10) y el tercer vértice no puede ser ninguno de sus dos extremos ni sus dos vecinos (10 − 4 = 6).

$$120 - 10 - 10 \cdot 6 = 50 \text{ triángulos}$$

## Reto B · Ecuaciones que se cuentan

**a)** Repartir 10 unidades entre 4 incógnitas: combinaciones con repetición.

$$\mathrm{CR}_{4,10} = \binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$$

**b)** Se asigna 1 a cada incógnita y se reparten las 6 unidades restantes.

$$\mathrm{CR}_{4,6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

## Ticket de salida individual

| Caso | Frase identificativa | Cálculo |
|---|---|---|
| a) distintos, se acumulan | Influye a quién toca cada premio y se repite persona → VR | $\mathrm{VR}_{8,3} = 8^3 = 512$ |
| b) distintos, máximo uno | Influye el orden, no se repite → V | $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ |
| c) iguales, máximo uno | No influye el orden, no se repite → C | $C_{8,3} = \binom{8}{3} = 56$ |
| d) iguales, se acumulan | No influye el orden, se repite → CR | $\mathrm{CR}_{8,3} = \binom{10}{3} = 120$ |

**e)** 512 > 336 > 120 > 56. Permitir repeticiones añade casos (VR > V y CR > C) y que el orden importe multiplica los casos (cada elección sin orden de 3 personas distintas da 3! = 6 ordenaciones: 336 = 56·6).